GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1932

SUMARUL

1. Lista membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Rezumatele articolelor publicate în „Gazeta Matematică". . . . . *G. Ţiţeica*
4. Concursul „Gazetei Matematice"
5. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".
6. Note matematice: 1 — 4.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 221.
9. Probleme rezolvate: 3809, 3827, 3895, 3908 şi 4050, 4016, 4023, 4037, 4095, 4141.
10. Exerciţii: 1 — 3.
11. Probleme propuse: 3874, 3908, 4041, 4171 — 4180.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1932

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul 1932 se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 45, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 79, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21, 23, 26, 28, 32, 35, 42, 43, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXVIII

15 SEPTEMVRIE 1932 — 15 AUGUST 1933

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ”

DELEGAȚIUNEA PENTRU ANUL 1932*)

COLONEL GH. LITEANU, C. D. ORĂȘANU și AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII

I. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreațiuni, diverse și reclamațiuni privitoare la tipărire.

G. ȚIȚEICA. Raportor.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

Z. CONSTANTINESCU, GH. A. IOACHIMESCU, GH. ILIESCU, C. LAZU, C. H. NICOLAU și D. VASILIU. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

COLONEL GH. BUICLIU și CĂPITAN I. LINTEȘ. Membri delegați pentru aritmetică elementară.

N. BOTEA, CĂPITAN GH. NICULESCU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometrie elementară.

M. GHERMĂNESCU și COLONEL GH. LITEANU. Membri delegați pentru trigonometrie.

TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, CĂPITAN GH. NICULESCU, M. SARIAN și O. ȚINO. Membri delegați pentru algebră elementară.

C. ORĂȘANU. Membru delegat pentru geometria descriptivă.

CR. MATEESCU și E. ABASON. Membri delegați pentru mecanica elementară.

COLONEL GH. BUICLIU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometria analitică.

C. ORĂȘANU. Membru delegat pentru cosmografie.

M. GHERMĂNESCU. Membru delegat pentru probleme și note de matematici superioare.

TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU și P. SERGESCU. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

GH. TH. GHEORGHIU. Membru delegat pentru exerciții.

E. ABASON, N. ABRAMESCU, V ALACI, GH. TH. GHEORGHIU, COLONEL GH. LITEANU. MIRON NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru chestiuni de examen.

GH. TH. GHEORGHIU și M. GHERMĂNESCU. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.

CĂPITAN GH. NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru cercetarea prealabilă a problemelor redijate.

I. S. ANTONIU, N. BOTEA, COL. GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, CĂPITAN I. LINTEȘ, COLONEL GH. LITEANU, CĂPITAN GH NICULESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, LT.-COL. GH. POTOPEANU, M. SARIAN și O. ȚINO. Membri delegați pentru cercetarea și redactarea problemelor rezolvate.

---

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 14 din Statute).

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici. — Conferenţiar şi Subdirector la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Mateiu Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara şi Şcoala Militară de Artilerie. — Str. General Foch, 27. Timişoara.
4	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici — Profesor Universitar. — Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2.
5	1922, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
6	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat de Şcoala Politechnică din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat de Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Str. Edgar Quinet, 6. Bucureşti 1. Telefon 302/21.
7	1931, Mart 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar.
8	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Str. Porumbaru, 56. Bucureşti.
9	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director technic al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Olari, 15. Bucureşti 4.
10	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Belgrano. Republica Argentina.
11	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Contabilităţii Generale a Statului şi a Finanţelor Publice. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti.
12	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Asistent Universitar. — Str. Carol Davila, 60. Bucureşti.
13	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Academia de Architectură. Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2.
14	1932, Apr. 20	BOTEA NICULAE. Licenţiat în Matematici. — Calea Floreasca, 46. Bucureşti 3.
15	1920, Ian. 10	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Brătianu, 29. Cluj.
16	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer. — Bulevardul Dacia, 15. Bucureşti 3.
17	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.

*) Data admiterii.

18	1920, Aug. 15	Budeanu I. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Parcul Bonaparte. Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
19	1910, Apr. 3	Buicliu Gh. Colonel de Artilerie. — Ministerul Apărării Naţionale. Direcţia Armamentului. — Strada Uranus. Bucureşti 6.
20	1928, Mai 9	Bujoreanu N. Inginer-Şef. — Inspector principal C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
21	1924, Ian. 30	Bunescu D. Al. Inginer S. N. P. S. — Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Telefon 300/79. Bucureşti 6.
22	1930, Aug. 31	Bungescu Ion. Ofiţer de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Art. A. A. din Franţa (Metz). — Căpitan în Regt. 1 Art. A. A. Profesor la Şcoalele Militare de Aeronautică. — Str. Elina Matei Voevod, 7. Bucureşti 4.
23	1920, Ian. 10	Buradescu Traian. Inginer-Şef. — Inspector principal technic. Conducătorul Inspecţiei a 7-a M. Cluj. — Calea Victoriei, 51 a. Cluj.
24	1930, Aug. 31	Buşilă Adrian. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noi C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
25	1910, Oct. 25	Buşilă D. C. Inginer de Poduri şi Şosele. Inginer Electrician. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — B-dul Dacia, 35 A. Bucureşti 3.
26	1921, Mai 4	Buşilă I. Inginer. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Dr. Lueger, 6 bis. Bucureşti 2.
27	1914, Iulie 12	Cambureanu V. Inginer. — Subdirector General al Casei Muncii C. F. R. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
28	1926, Iunie 28	Cambureanu V. D. Inginer. — Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Cobălcescu, 31. Bucureşti.
29	1922, Noem. 4	Capriel I. Inginer-Şef. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
30	1920, Mart. 1	Caraman E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alexandri" din Galaţi. — Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
31	1928, Aug. 29	Cassian Gh. Maior. — Membru în Comisia militară de recepţie la Uzinele Skoda. — Hotel Skoda-Lohotin. Pilzen. Cehoslovacia.
32	1920, Ian. 10	Cazacu N. C. Inginer-Şef. — Inspector de Mişcare C. F. R. — Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi
33	1914, Dec. 20	Chiricuţă A. Inginer Inspector General.—Regia Autonomă a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă.—Bulevardul Elisabeta, 89. Bucureşti 2.
34	1920, Mart. 1	Chiţulescu I. Ioan. Inginer. — Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pantelimon, 34. Bucureşti 4.
35	1921, Febr. 5	Cioc M. Inginer. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.

36	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice.—Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2.
37	1895,Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Senator. Fost Ministru.—Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
38	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer diplomat dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. - Şeful Serviciului Exploatării din Imprimeria Naţională M. O. - Calea Şerban Vodă, 133. Bucureşti 5.
39	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica de Hârtie „Letea". Bacău.
40	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer. — Şeful Secţiei L 3 C. F. R. — Str. N. Bălcescu, 34. Craiova.
41	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Şos. Ştefan cel Mare, 170. Bucureşti 3.
42	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
43	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director General al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3.
44	1929, Ian 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Locotenent de Artilerie. Licenţiat în Matematici. — Ofiţer instructor şi Profesor la Şcoala pregătitoare de Artilerie. — Şcoala Militară de Artilerie. Timişoara.
45	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer-Şef. — Subdirectorul General al Energiei din Ministerul Industriei şi Comerţului. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
46	1921, Mai 4	GABRIELESCO RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
47	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Şef.—Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti 2.
48	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
49	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
50	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică din Paris. — Profesor de Matematici la Liceul din Constanţa.—Str. Tudor Vladimirescu, 14. Constanţa.
51	1922, Aug, 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4.
52	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Licenţiat în Mathematici. — B-dul Pache, 91 Bucureşti 4.
53	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. — Şef de Serviciu la Regia Autonomă a Porturilor. Serviciul Porţilor de Fer. — Orşova.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

54	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice. Statistician. — Subdirector în Ministerul de Finanţe. — Str. Robert des Flers, 3. Bucureşti.
55	1913, Aug. 30	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
56	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Căpitan. Inginer Radio. E. S. E. — Directorul Şc. Radio-ofiţeri. Profesor la Şcoalele Militare de Geniu şi la Şcoalele Aeronauticei.—Regimentul Transmisiuni. Telefon 313/37. Bucureşti.
57	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar titular. - Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
58	1910, Iunie 2	GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
59	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer.— Directorul Manufacturei de Tutun.—Iaşi.
60	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşi şi al Şcoalei superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Soc. „Edilitatea". Asistent la Şc. Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti.
61	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Conducătorul Inspecţiei I de Mişcare C. F. R. — Gara de Nord. Bucureşti 2.
62	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
63	1928, Aug. 29	ILIESCU TRAIAN. Locot.-Colonel de Artilerie. — Direcţia XI Technică Superioară. — Str. Uranus, 98. Bucureşti 6.
64	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. — Directorul Fabricei de Timbre. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
65	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
66	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer.—Antreprenor.—Str. General Berthelot, 55. Bucureşti 2.
67	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU I. Inginer Inspector General. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Preşedintele Secţiunii Constructorilor. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Căluşei, 23. Bucureşti 4.
68	1922, Noem. 1	IONESCU V. D Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.— Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
69	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer diplomat dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Inginer în Direcţia Generală M. O. — Str. Vaselor, 42. Bucureşti.
70	1912, Iunie 2	JIJIE ADAM. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer Electrician. — Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.

71	1924, Ian. 30	KAUFMANN N. Inginer. — Şef de Secţie. Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
72	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti.—Director la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
73	1919, Sept. 12	LINTEŞ I. Căpitan Inginer aeronautic. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Membru în Comisiunea română de recepţie la Skoda (Cehoslovacia). — Hotel Skoda-Lochotin. Pilzen. Cehoslovacia.
74	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. Colonel de Artilerie, Marele Stat Major al Armatei.— Profesor la Şcoalele Militare ale Aeronauticei şi la Cursul de pregătire militară al Şcoalei Politechnice „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. G-ral Angelescu, 24. Bucureşti 2. Telefon 343/68.
75	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
76	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti Senator. Mare industriaş. — Str. Musolini, 27. Bucureşti 3.
77	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer diplomat dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Şeful Serviciului Aprovizionărilor din Direcţiunea Generală M O. — Şoseaua Crângaşi, 119. Bucureşti.
78	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Director regional la Casa Autonomă a drumurilor de Stat. — Bulev. Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti.
79	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer.—Asistent la Şc. Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector al Soc. „Electrica" Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
80	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Inspectoratul I C. F. R. — Gara Filaret. Bucureşti 6.
81	1929, Ian. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Comercială din Ploeşti — Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2.
82	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General.—Regia autonomă a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Profesori, 6 bis. Bucureşti 5.
83	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia". — Buştenari. Jud. Prahova.
84	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti .— Directorul Serviciului Exploatării Fabricilor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti.
85	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
86	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de Lucrări Publice. — Calea Griviţei, 36. Telefon 367/93. Bucureşti 2.

87	1932, Febr. 21	NEAMȚU P. Inginer. — Directorul Atelierelor S. T. B. Asistent la Școala Politechnică din București. — Str Roma, 38. București 3.
88	1922, Mart. 1	NEGRETZU I. Inginer de mine.—Exploatări agricole (agricultor).— Str. Șerban-Vodă, 170. Pitești.
89	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licențiat în Matematici dela Universitea din București.— Profesor la liceul „Codreanu" din Bârlad.— Str. Carol, Bârlad.
90	1910, Mai 20	NIGHIFOR A. G. Doctor în Științele Matematice.—Profesor agregat la Facultatea de Științe din București — Str. Dimitrie Racoviță, 32. București 4.
91	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONST. Inginer.—Directorul Imprimeriei Naționale.— Str. Fabrica de Chibrituri, 22. București 6. Telefon 372/88.
92	1922, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer. — Director în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Lăzureanu, 31 bis. București 6.
93	1929, Ian. 31	NICOLESCU MIRON. Fost elev al Școalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Științele Matematice dela Sorbonne. — Conferențiar de Algebră Superioară și Teoria numerelor la Facultatea de Științe din Cernăuți. — Universitate, Cernăuți.
94	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Șef.—Director General al Soc. Anonime industriale „Arad-Brad". – Str. Arhitect Mincu, 13. București 2.
95	1923, Iulie 4	NICULESCU GHEORGHE. Căpitan inginer. Absolvent al Școalei Politechnice Timișoara și al Școalei Superioare de Aeronautică Paris. — Str. Isvor, 98. București 6.
96	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licențiat în Matematici.—Profesor secundar.— Str. Isvor, 98. București 6.
97	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor agregat la Facultatea de Științe din București. Director al Institutului Superior de Educație Fizică. Director al Școalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. București.
98	1927, Ian. 28	OPRESCU GH. Colonel. — Fundătura Orațiu, 6 bis. București 2.
99	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer-Șef. — Inginer mecanic la Navigațiunea Fluvială Română, Galați. — Str. Bolintineanu, 2 bis. Galați.
100	1913, Oct. 7	ORĂȘANU D. CEZAR. Diplomat al Școalei Naționale de Poduri și Șosele. Licențiat în Matematici. Inginer-hotarnic și Operator Topometru.—Conferențiar la Școala Politechnică „Regele Carol II" din București. Profesor la Școalele Aeronautice. Antreprenor de Lucrări. — Str. Știrbei Vodă, 45. București 2.
101	1910, Mai 20	ORĂȘANU GR. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din București. — Str. Popa Nan, 19. București.
102	1927, Oct. 17	OTTULESCU EUG. Inginer. — Str. Alexandrina, 10. București 2.
103	1914, Dec. 20	PANAITESCU SC. General de Divizie în retragere. — Conferențiar Universitar. Membru corespondent al Academiei Române. Consilier la Banca Românească din Chișinău. — Str. Alexandru cel Bun, 79. Chișinău.
104	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar. — Inspector actuar în Ministerul de Industrie și Comerț. — Str. Vaselor, 42. București.

105	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Licenţiat în Matematici. — Str. Justinian, 18. Bucureşti 3
106	1924, Ian. 30	PAŞCANU S. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele (1919); Arhitect Naval diplomat Univ. din Glasgow (1921). B. Sc.; A. I. N. A. — Inginer Expert la Societatea Naţională de Credit Industrial. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Calea Dorobanţilor, Aleea A, 8. Bucureşti 3.
107	1911, Dec. 17	PATRICIU G. TITUS. Licenţiat în Matematici.— Profesor. Directorul Liceului „M. Kogălniceanu" din Iaşi. Fost director General al Învăţământului Primar şi Normal în Ministerul Instrucţiunii.— Str. Rosetti, 8. Iaşi.
108	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer.—Directorul General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D.—Str. Radu Vodă, 25. Bucureşti 5.
109	1911, Aug. 11	POPESCU GH. Inginer Inspector General. — Director General al Societăţii Naţionale de Credit Industrial. Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. G-ral Praporgescu, 27. Bucureşti 1.
110	1922, Aug. 31	POPESCU ION. Inginer.— Director la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 12 A. Bucureşti 2.
111	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Str. Nicu Filipescu, 25. Arad.
112	1931, Mart. 11	POPP N. Căpitan. — Preşedintele Comisiunii militare de recepţie la Uzinele I. A. R. Braşov.
113	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. – Profesor la Seminarul pedagogic universitar şi la Colegiul Naţional Sf. „Sava".—Parcul Delavrancea, Aleea D, 2. Bucureşti 2.
114	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAI. Inginer. — B-dul Domniţei. 15. Bucureşti 1.
115	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE Lt.-Col.—Şeful secţiei operaţiilor din Marele Stat Major.—B-dul Elisabeta, 97. Et. II. Bucureşti 2.
116	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE Colonel de Artilerie. — Directorul Artileriei din Ministerul Apărării Naţionale. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
117	1927, Mai 11	RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Inginer Diplomat de l'Ecole Supérieure d'Electricité de Paris. — Directorul „Revistei Universitare Matematice".—Aleea Vulpache, 21. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
118	1910, Aug. 3	RADU E. M. Inginer Inspector General în Direcţiunea Apelor din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Armenească, 24. Bucureşti 1.
119	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer. — Şef de Secţie în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. D. Racoviţă, 14. Bucureşti 4.

120	1914, Dec. 20	ROȘU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. București.
121	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL, Inginer. — Directorul Imprimeriei Chișinău.— Str. Iașilor, 11. Chișinău
122	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Școala de Conductori de Lucrări Publice din București.— Str. G Gr. Cantacuzino, 50. București 2.
123	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri și Șosele. — Director General al Societății „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). București 3.
124	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Inginer la Direcțiunea Atelierelor C. F. R. Grivița. Asistent la Școala Politechnică „Regele Carol II" din București. — Str. Columb, 9 București 3.
125	1920, Aug. 15	ȘERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Antreprenor de construcții.— Str Sf. Constantin, 24 București.
126	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licențiat în Matematici. — Inginer Inspector la Societatea „Steaua Română". — Soc. „Steaua Română". Câmpina.
127	1919, Sept. 12	SERGESCU P. Doctor în Matematici. Licențiat în Filosofie. — Profesor Universitar. — Str. Berde, 3. Cluj.
128	1921, Febr. 5	SFINȚESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Technic la Municipiul București. — Șoseaua Kiselef, 25. București 2.
129	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Casei Autonome a Drumurilor de Stat. — Str. Sf. Ștefan, 5. București 4.
130	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab și Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. București 3.
131	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer.—Asistent la Școala Politechnică „Regele Carol II" din București. Inginer la Soc. Anonimă Română de telefoane. — Aleea Mântuleasa, 1. București 4.
132	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. Colonel. — Str. Frumoasă, 54. București 2.
133	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licențiat în Matematici. — Conferențiar la Școala Politechnică „Regele Carol II" din București. Șeful Serviciului de Radio-Comunicații P. T. T. — Str. Salvator, 37. București 6.
134	1911, Mai 18	TEODORESCU N. N. Inginer Inspector General. — Str. Aurel Vlaicu, 22. București 3.
135	1900, Noem. 1	TEODORESCU V. Profesor la Liceul Național și Liceul Militar din Iași. — Str. Elena Doamna, 39. Iași.
136	1929, Aug. 28	TEODORU D. RADU. Inginer-Șef — Director la Direcția Generală a exploatării monopolurilor. — Piața Lahovary, 1. București 3.
137	1910, Mai 20	THIERRIN H. G. Licențiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str Scaune, 33. București 1.
138	1921, Aug. 31	ȚINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Școala Politechnică din Timișoara. — Str. Ismail, 16. București 4.

139	1929, Oct. 30	Ţiţeica Gabriela. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.—Str. Dionisie, 80. Bucureşti.
140	1895, Noem. 1	Ţiţeica Gh. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar general al Academiei Române Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agregat la Sorbona. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
141	1919, Sept. 12	Ulescu Al. Inginer. — Director la Fabrica I. A. R. — Str. General Dona. 11. Bucureşti 2.
142	1914, Dec. 10	Vardala I. Inginer Inspector General.—Director General al Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — B-dul Tacke Ionescu, 38. Bucureşti 4.
143	1927, Mai 11	Vasilache I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2,
144	1927, Mai 11	Vasilescu Fl. Doctor în Matematici. — Str. Eroului, 19. Bucureşti.
145	1920, Ian. 10	Vasilescu G. I. Inginer-Şef. — Director General al Regiei Conductelor de Petrol ale Statului. — Str. I. G. Saita, 10. Bucureşti 1.
146	1923, Mart. 26	Vasilescu Gr. Inginer. — Str. Costache Negri, 21. Bucureşti 6.
147	1932, Apr. 20	Vasiliu G. Dan. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. Inginer la Monitorul Oficial. — B-dul Schitu Măgureanu, 47. Bucureşti 1.
148	1927, Aug. 26	Vasiliu M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
149	1924, Ian. 30	Zamfirescu Grigore. Inginer. Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1920 şi E. S. A. Paris 1921. — Proprietarul fabricei de avioane „SET". Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Domiciliu: Parcul Ferdinand, Str. F, 105. Birou: Str. Popa Lazăr, 13—15. Bucureşti.
150	1920, Sept. 28	Zapan Gh. Doctor în Filosofie. — Profesor la Institutul superior de educaţie fizică din Bucureşti. — Psychologisches Institut der Universität, Schloss, Berlin C 2.
151	1921, Mai 4	Zapan Grigore. Căpitan.— Inginer de construcţii Aeronautice şi Mecanice. Inginer hotarnic. Inginer la Arsenalul Aeronauticei. Profesor de Matematici. — Légation de Roumanie. 17, rue Brémontier, Paris (17-e).
152	1925, Aug. 26	Zlatcu St. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politechnică din Zürich. — Antreprenor. — Str. Pasteur, 8. Tel. 336/54. Bucureşti 6.

†

MEMBRII DECEDAȚI*)

	Data admiterii	Data morții
1. Alexandrescu T. I.	1928 Mai 9	1930 Sept. 5.
2. Alexandrini O.	1895 Noemb. 15	1905 Sept. 6.
3. Balaban V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1895 Sept. 22.
4. Cristescu V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1929 Martie 10.
5. Davidescu Em.	1895 Sept. 15 (fondator)	1905 Aug. 28.
6. Dordea Tr.	1928 Ian. 26	1930 Apr. 30.
7. Erbiceanu C.	1898 Sept. 15	1904 Apr. 3.
8. Evolceanu V.	1927 Ian. 28	1928 Oct. 19.
9. Lalescu Tr.	1905 Mart. 1	1929 Iunie 15.
10. Mirea N. Șt.	1909 Iunie 1	1932.
11. Moțoi I.	1906 Apr. 1	1929 Ian. 16.
12. Năsturaș D.	1909 Noemb. 9	1930.
13. Nicolaevici G.	1909 Iunie 1	1917.
14. Nicolescu N.	1895 Sept. 15 (fondator)	1924 Mai 5.
15. Roco M.	1895 Sept. 15 (fondator)	1931 Ian. 5.
16. Roșu Al.	1910 Iunie 21	1917 Apr. 17.
17. Saligny A.	1914 Dec. 9	1925 Iunie 17.
18. Teodor D. I.	1906 Apr. 1	1924 Iulie 30.
19. Teodorescu I. S.	1914 Iunie 12	1918 Dec. 22.
20. Zottu I. G.	1895 Sept. 15 (fondator)	1902 Iulie 8.

REZUMATELE ARTICOLELOR PUBLICATE ÎN „GAZETA MATEMATICĂ“

Un comitet de consilieri științifici s'a întrunit anul trecut la Geneva și a hotărît că, pentru ușurarea citirii și mai ales a întrebuințării memoriilor și lucrărilor științifice publicate în nenumăratele reviste care apar în toate țările, e neapărată nevoie ca ele să fie însoțite de rezumate făcute chiar de autori și după anumite reguli.

La noi, D-l E. Racoviță, profesor la Universitatea din Cluj, a fost rugat să arate Institutului de Cooperație intelectuală diferitele publicațiuni științifice care apar în Țară. Printre ele figurează

*) Aci sunt trecuți numai redactorii și membrii, cari au stat la *„Gazeta Matematică“* până la sfârșitul vieții lor, în ordine alfabetică.

şi *Gazeta Matematică*. Şi astfel revista noastră a primit oficial intervenire ca să arătăm colaboratorilor noştri care sunt regulile după care se fac rezumatele.

Vom observa în rândul întâi că în *Gazeta Matematică* se publică rar memorii întinse, aşa în cât articolele noastre fiind scurte şi se citesc uşor.

Cu toate acestea spre a se uşura darea de seamă într'un organ de bibliografie analitică, unde spaţiul e foarte măsurat, rezumatul e necesar.

Mărginindu-mă numai la articolele Gazetei, iată regulile care se recomandă.

Rezumatul se dă în câteva rânduri la începutul articolului. El trebue să arate pe scurt concluziunile articolului, aşa încât cititorul rezumatului, care poate fi reprodus într'o revistă de bibliografie, să-şi poată da seama dacă articolul cuprinde ceva care să-l intereseze.

Incă odată rezumatul trebue să fie scurt, foarte scurt.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE:

G. Ţiţeica.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

Adunarea generală a Societăţii „*Gazeta Matematică*" a decis, în şedinţa sa dela 24 August a. c., de a ţine un concurs de matematici în anul 1933, orcare ar fi numărul de candidaţi care s'ar prezenta. Concursul va avea loc după Paşte, înainte de reînceperea cursurilor, dacă vom dispune de mijloace de a aduce pe candidaţi la Bucureşti, unde s'ar ţine examen înscris şi oral, sau într'o Duminică din luna Mai, în diferite centre din ţară, când se va da numai teze. Deciziunea în această privinţă se va publica în No. din Februarie 1933.

Cererile de înscriere se vor trimite *direct de candidaţi*, elevi ai liceelor din ţară şi ai anilor pregătitori de pe lângă şcolile superioare. Nu se primesc cereri trimise de părinţi, corespondenţi sau profesori.

Cererile vor arăta neapărat, — în ordinea aci arătată şi numerotate, — următoarele date:

1. Numele şi pronumele elevului, scrise lizibil.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiţi în particular se va arăta şcolile în care au urmat anul precedent sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul şcolii şi în timpul vacanţei Paştelui pentru a li se putea face comunicările şi înştiinţările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni la Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut aci în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurate de Societatea „*Gazeta Matematică*". Dacă are nevoie de bani pentru drum, va indica şi gara de unde va lua trenul pentru a veni la Bucureşti şi gara la care se va întoarce după concurs.

5. Materia de matematici din clasa care urmează sau din anul precedent la care vrea să se prezinte la concurs.

6. Activitatea candidatului la „*Gazeta Matematică*" sau la alte reviste matematice din ţară sau din străinătate.

Cererile de înscriere se vor trimite D-lui Inginer Inspector General Ion Ionescu, Bucureşti, Strada Căluşei No. 23, până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1932.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile pentru înscriere şi ţinerea concursului trebuesc respectate cu toată atenţiunea şi exactitatea inerentă ştiinţelor matematice.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Numărul candidaţilor admişi la concurs va depinde de sacrificiile materiale ce se va cere Societăţii „*Gazeta Matematică*" pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o în cererea ce va face. Se va căuta ca la concurs să fie reprezentate cât mai multe licee şi cât mai multe clase, precum şi elevi din licee militare şi din ani pregătitori ai şcolilor secundare sau superioare.

Comisiunea examinatoare se va compune din membri ai Societăţii „*Gazeta Matematică*", care nu vor avea rude printre candidaţii admişi la concurs.

In numărul 6 din Februarie 1933 se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare şi numele candidaţilor admişi la concurs.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni. Primul care va reuşi la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Şcoala Politecnică *„Regele Carol II"* din Bucureşti, va primi premiul „ANGHEL SALIGNY" oferit de un membru al Societăţii noastre, iar primul reuşit dintre toţi candidaţii va primi premiul „LT.-COL. C. TĂNĂSESCU", în cărţi, în conformitate cu înştiinţarea făcută în acest număr la articolul Premii şi alte dispoziţiuni ale fondurilor *„Gazetei Matematice"*.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII :

AL. BUNESCU, COL. GH. I. LITEANU

şi C. ORĂŞANU.

PREMIILE ŞI ALTE DISPOZIŢIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE"

PENTRU

CURSUL ANULUI 1932 — 1933

(1 Septemvrie 1932 — 31 August 1933)

In conformitate cu dispoziţiunile art. 12 din Regulamentul general al administrării fondurilor «Gazetei Matematice», subsemnaţii membri ai Comisiunii pentru controlul gestiunii fondurilor şi pentru privigherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnaţi în adunarea generală dela 28 August 1931, aducem la cunoştinţă următoarele :

1. Premiul bienal «INGINER H. CAPRIEL», pentru lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, se acordă celei mai bune lucrări ce se va prezenta Societăţii, de către studenţii Universităţilor, elevii şcolilor Politecnice sau elevii şcolilor militare de Aeronautică, Artilerie, Geniu şi Marină din ţară.

Subiectul lucrării pentru premiul pe anul 1934 se va anunţa în «Gazeta Matematică» anul XXXVIII, numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările — semnate de autor — trebuesc trimise Societăţii cel mai târziu până la 1 Mai 1934, iar rezultatul se va publica în numărul din Decemvrie 1934 al «Gazetei Matematice».

Premiul constă din venitul fondului «Inginer H. Capriel» şi este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă el măreşte fondul.

2. Premiul «Vasile Conta», din fondul constituit de «Gazeta Matematică», se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filozofia matematicilor.

Autorul trebue să fie român şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Lucrările trebuesc trimise Societăţii până la 1 Iulie ale fiecărui an, iar rezultatul se va publica în numărul din Noemvrie al «Gazetei Matematice».

Dacă până la acea dată nu se prezintă nici-o lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Premiul constă din totalitatea venitului fondului cumulat până la data acordării.

3. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, din veniturile fondului «General Sc. Panaitescu», se acordă celei mai bune lucrări de matematică aplicată la studiile militare, publicate în cursul anului.

Studiile în manuscris care se aduc la cunoştinţa Societăţii pe orice cale, se iau şi ele în consideraţie la acordarea premiului.

Autorii publicaţiunilor prezentate trebue să fie români, sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an.

In cazul când nu se găseşte nici-o lucrare de premiat, sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voeşte a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică şi chestiuni de matematică aplicată la ştiinţele militare.

Raportul Comisiunii însărcinate cu acordarea premiului se publică în numărul «Gazetei Matematice» din Octomvrie.

4. Premiul «Inginer Vasile Cristescu», se acordă din venitul fondului «Vasile Cristescu», autorului celui mai bun articol referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, publicat în ultimul volum apărut al «Gazetei Matematice». Autorul articolului trebue să fie elev de liceu, de şcoală militară, de şcoală politecnică sau student de facultate.

Premiul este indivizibil anual, şi în cazul când într'unul sau mai mulţi ani dearândul nu s'au publicat articole putând fi premiate, premiul se cumulează până la acordarea lui.

Raportul comisiunii însărcinate cu decernarea premiului se publică în numărul din Iunie al «Gazetei Matematice».

5. Din venitul anual al fondului «SPIRU C. HARET», potrivit dispoziţiunilor regulamentului pentru administrarea lui, se cumpără cărţi de matematici pure şi aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, recreaţiuni matematice, etc.) care se donează bibliotecilor şcolare dela şcolile secundare, sau corespondenţilor meritoşi, elevi ai acestor şcoli.

In loc de cărţi se pot dona aparate sau modele necesare învăţământului matematic.

In baza hotărîrii luate de adunarea generală dela 24 August 1932, cărţile ce se vor procura din venitul fondului pe anul 1932, s'a destinat să se doneze liceului de băeţi din Lugoj.

6. Din venitul fondului «LT.-COLONEL G. A. TĂNĂSESCU» urmează să se dea cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale «Gazetei Matematice».

In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile măresc fondul.

7. Din venitul fondului «ANGHEL SALIGNY», destinat să servească la înfiinţarea «Bibliotecii tecnice a Gazetei Matematice», urmează să se publice lucrări complete de matematici aplicate, sau cu cuprins tecnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Până în prezent delegaţiunea Societăţii n'a primit niciun manuscris care să poată fi publicat din acest fond, în cursul anului 1932 — 1933, dealtfel venitul fondului este angajat pentru anul acesta.

8. In «Biblioteca Gazetei Matematice», destinată publicării de cărţi privitoare la matematicile pure (cu caracter didactic sau ştiinţific), la matematicile aplicate, la filozofia sau istoria lor, precum şi la orice fel de lucrare cu caracter matematic, nu se va putea tipări nici-o lucrare, fondurile fiind angajate.

COMISIUNEA PENTRU PREMII:

IOAN BUŞILĂ, GH. ILIESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală anuală din 24 August 1932.

NOTE MATEMATICE

1. *Timpul ca măsură a suprafețelor.* Se știe că mai înainte, lungimile, mari mai ales, se exprimau în ore sau zile de mers pe jos sau cu căruța. Se zicea *„cale de 2 zile"*, sau *„drum de 3 ceasuri"* etc. Nu știu însă dacă s'a aplicat acest mod de măsură pentru evaluarea ariilor în *„timp patrat"!* Sunt însă exprimate suprafețe în timp în alte moduri.

Astfel într'o foiță de adeverință din 4 Martie 1693 găsesc următoarele :

«Un loc mare rudinesc carele este în marginea Oltului dela Măguri între drumuri, din drumul podului până în Mlăci, loc de 10 zile arătură».

In o scrisoare a lui Mihail Kogălniceanu, trimisă tatălui său din Lemberg, pe când plecase la studii în Franța, datată 24 August 1834, găsim :

«Câmpuri și dealuri de o întindere de un ceas și două sunt acoperite cu cartoafe, lucru, care dacă ar fi în Moldova, ar opri pe țărani să se jăluiască de foame și nici odată în patria noastră nu s'ar auzi de foamite».

I. Ionescu.

2. *O curbă trisectoare.* Să considerăm un cerc și un diametru AOA'. Să considerăm un unghiu AOB împărțit în trei părți egale AOC, COD, DOB. Fie C' și D' punctele diametral opuse punctelor C și D. Fie M intersecția dreptelor AD', BC'. Să punem :

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle DOA = \alpha.$$

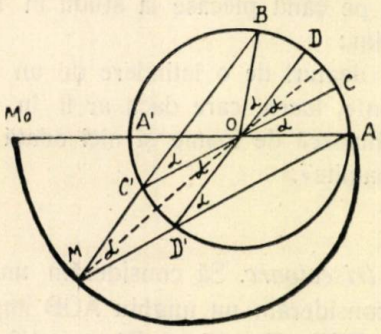
Avem acum $\sphericalangle C'OD' = \alpha$, căci este opus unghiului COD. Unghiurile înscrise CC'B și DD'A sunt tot α, căci subîntind pe cerc arce corespunzătoare lui 2α. De aci reiese :

$$\sphericalangle BC'O = \sphericalangle AD'O = \sphericalangle C'OD.$$

Aceasta ne arată că dreptele OC', MD' de o parte, și OD', MC' de alta, sunt paralele. Figura MC'OD' având laturile opuse paralele și $OC' = OD'$, ca raze ale cercului O, este un romb. Deci $MC' = MD' = OA$ iar dreapta MO este bisectoară a unghiului C'OD' sau a unghiului opus COD. Cum unghiurile COA, DOB sunt egale, reiese că MO este și bisectoară a unghiului AOB.

Dacă punctul B se mişcă pe cerc, pornind din A şi parcurge tot cercul până revine în A, punctul M va descrie o curbă. Ea porneşte din M_0, de pe AA' dincolo de A la distanţa $A'M_0 = OA$, şi se apropie de cerc ajungând în A când B revine în A. Cu ajutorul acestei curbe putem trisecta un unghiu. Observăm mai întâiu că pentru un unghiu dat putem să folosim acelaşi cerc OA, descris între laturile lui. Cu modul acesta curba este unică pentru toate trisecţiunile. Putem dar să o tăiem dintr'un carton, tinichea, celuloid, etc.

Să presupunem că ni se dă un unghiu de împărţit în 3 părţi egale. Construim bisectoara unghiului. Din O cu raza OA cu care s'a tăiat curba lui M, descriem cercul OA. Trasăm curba M cu tiparul făcut şi luăm intersecţia bisectoarei cu această curbă. Unim M cu A şi B, care taie cercul în C' şi D'. Dreptele C'O şi D'O sunt trisectoarele căutate.



Putem să aplicăm metoda indicată în această notă, întrebuinţând două rigle şi un compas, şi operând cu două persoane. După ce descriem cercul OA şi ducem bisectoara unghiului AOB, aşezăm o riglă după bisectoară. Cu deschiderea de compas OA lăsată fixă, mişcăm un vârf al compasului pe bisectoara MO şi altul pe cerc. In timpul acestei mişcări al doilea operator ţine o riglă cu capul la vârful compasului de pe bisectoară şi alipită continuu de celălalt vârf al compasului, până ce rigla lui trece prin B şi apoi prin A. Se obţine astfel punctele C' şi D' la intersecţia riglei lui cu cercul PA. Ca verificare se încearcă dacă unghiurile AOC, COB, DOA sunt egale.

Notă. Se poate găsi uşor că ecuaţia curbei M în coordonate polare este:

$$p = -2r\cos\tfrac{1}{3}\varphi.$$

MALPIG.

3. *Asupra problemei 3438.* La rezolvarea acestei probleme, publicată în «G. M» No. 7 (Vol. XXXVII), la pag. 268 s'a scris eronat:

$$x = V_0 \cdot t \cdot \sin\varphi$$

în loc de:

$$x = V_0 \cdot t \cdot \cos\varphi$$

astfel că unele rezultate din acea problemă trebuesc modificate. In forma lor actuală sunt adevărate pentru $\varphi = 45^0$ şi numai aproximative pentru $40^0 < \varphi < 50^0$.

CPT. GH. N.

4. *Asupra problemei 4136.* Rădăcinile ecuaţiei de gradul III sunt bine calculate, dar ele nu verifică prima din ecuaţiile date, căci:

$$-0{,}603 + (2{,}109/5{,}494) = -0{,}603 + 0{,}38 < 2.$$

Cauza este că ordinea rădăcinilor nu este cea dată, ci:

$$x = -0{,}603, \quad y = 5{,}494, \quad z = 2{,}109\ldots$$

şi alte două serii deduse prin permutări circulare.

P. M. VARLAM.

Notă. O soluţie directă a ultimei părţi a fost trimisă în urma apariţiunii soluţiunii de un anonim. O soluţie bazată pe cunoaşterea sumelor a fost trimisă de D-l M. NEGREA.

I. I.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the Mathematical American Society. Volumul XXXVIII. No. 5. Mai 1932. New-York. Adunarea din Martie dela New-York, de T. FORT, Adunarea din Aprilie din Chicago, de M. H. INGRAHAM. Cărţile de geometrii diferenţiale, de D. J. STRUIK. VAN DER WAERDEN asupra Algebrei, de O. ORE. Extrase din memorii.

Mathesis. Tomul XLVI. No. 5—6. Mai—Iunie 1932. Gembloux. Asupra dreptelor lui SIMSON de CL. SERVAIS. Asupra funcţiunilor lui RIEMANN asociate ecuaţiilor diferenţiale lineare, de M. H. J. GERMAY. Asupra fascicolelor conjugate, de J. DIEUDONNÉ. Asupra centrelor de greutate ale arcelor de curbe strâmbe, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra punctelor triple ale suprafeţelor algebrice, de M. PAUL. Asupra reciprocităţii între două spaţii superpuse cu trei dimensiuni, de AD. M. Sfera lui LONGCHAMPS a tetraedrului, de V. THÉBAULT. Asupra unei funcţiuni asociate indicatorului, de J. D. HILL. Asupra curbelor strâmbe, de M. LANNOYE. Asupra transformării circulare directe, de R. DEAUX.

Mathesis. Tomul XLVI. No. 7. Iulie 1932. Gembloux. Asupra transformării circulare directe, de R. DEAUX. Asupra funcţiunilor lui RIEMANN asociate cu soluţiunile ecuaţiunilor integro-diferenţiale lineare, de M. H. J. GERMAY. Exerciţii de geometrie infinitezimală, de D-ra BERTHE UMÉ. Despre reciprocitatea a două spaţii superpuse cu trei dimensiuni, de AD. M.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIII. Fascicola V. Mai 1932. Buenos Aires. Serii şi integrale divergente sumabile cu metoda lui HARDY, de J. C. VIGNAUX.

Boletin Matematico. Anul V. No. 5. Iulie 1932. Buenos Aires. Asupra teoremei fundamentale a algebrei, de N. BOGOLIOUBOFF.

Boletin Mathematico Elemental. Anul III. No. 5. Iulie 1932. Buenos Aires. Locurile geometrice mai uzuale, de B. I. B.

Journal de mathematiques élémentaires. Publié par H. VUIBERT, Anul 56. No. 19. Iulie 1932.

Revista de Pedagogie. Anul II. No. I — II. Bucureşti 1932. Filosofia socială a lui VASILE CONTA, de TR. BRĂILEANU. Viaţa şi opera lui VASILE CONTA, de C. NARLY.

V. THÉBAULT. *Contribution à la Géométrie du triangle.* Gembloux. 1932. (Supliment la *Mathesis*).

J. LEEMANS. *Sur une famille de triangles triplement homologiques et triplement métaparallèles.* (Supliment la *Mathesis*).

Revista matematică din Timişoara. Anul XII. No. 6. August 1932. Timişoara. HENRI POINCARÉ, de N. O. ZAHARIA.

Societatea Gazeta Matematică. Statutele şi Regulamentele fondurilor. Bucureşti 1932

CERERI

221. Primul tratat de Mecanică aplicată la Rezistenţa Materialelor şi Stabilitatea construcţiunilor tipărit în limba română este al inginerului CONSTANTIN MĂNESCU, fost profesor la Şcoala naţională de Poduri şi Şosele. Noţiuni despre această ştiinţă s'a mai tipărit anterior prin vre-o carte română?

I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3809. *Se consideră determinantul:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ca funcţie de a_{ik}, $i, j = 1, 2, \ldots n$.

Să se arate că determinantul funcţional:

$$\frac{D(\Delta^m a_{11}, \Delta^m a_{12} \ldots \Delta^m a_{1n}, \ldots \Delta^m a_{nn})}{D(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, \ldots a_{nn})}$$

este egal cu:

$$(m \cdot n + 1)\, \Delta^{m \cdot n^2}.$$

T. Popoviciu.

Soluţie şi Generalizare. Fie în general $f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ o funcţie omogenă de gradul p în raport cu cele k variabile $x_1, x_2, \ldots x_k$. Ne propunem a calcula determinantul funcţional:

$$(1) \qquad \frac{D(x_1 \cdot f, x_2 \cdot f, \ldots x_k \cdot f)}{D(x_1, x_2, \ldots x_k)}.$$

Dacă în (1) împărţim liniile şi coloanele cu $x_1, x_2, \ldots x_1$; $f'_{x1}, f'_{x2}, \ldots f'_{xk}$ respectiv obţinem un determinant în care diagonala principală e formată de cantităţile:

$$1 + \frac{f}{x_1 \cdot f'_{x_1}}, \quad 1 + \frac{f}{x_2 \cdot f'_{x_2}}, \quad \ldots \quad 1 + \frac{f}{x_k \cdot f'_{x_k}},$$

şi toate celelalte elemente sunt egale cu 1.

Dacă punem:

$$F(z) = \prod_{i=1}^{k} \left(z - 1 - \frac{f}{x_i \cdot f'_{x_i}} \right)$$

se ştie că acest determinant este egal cu:

$$(-1)^{k+1} [F'(1) - F(1)].$$

(«Culegere de Pr. de Alg.», C. XXVIII, problema 21, p. 97).

Făcând calculele găsim:

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2 \ldots x_k \cdot f'_{x_1} \cdot f'_{x_2} \ldots f'_{x_k}} \cdot f^{k-1}\left(f + \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f'_{x_i}\right).$$

Ţinând seamă de formula lui EULER relativă la funcţiile omogene găsim în fine că determinantul (1) este egal cu:

$$(p+1) f^k.$$

In cazul problemei propuse funcţia f este Δ^m şi $p = m.n$ iar $k = n^2$. Se deduce aşa dar egalitatea cerută.

Au rezolvat bine problema în cazul particular al enunţului D-nii: ADRIAN GHEORGHIU (student Bucureşti) şi VALERIU NOVACU (student Cluj).

T. P.

---

*PROBLEMA 3827. *Fie* I, I_a, I_b, I_c *centrele cercurilor tritangente triunghiului* ABC. *Să se demonstreze relaţiunile:*

$$\sum \frac{\overline{AI}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \sum \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AI_a}^2} = 1$$

$$\sum \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AI}^2} = \sum \frac{\overline{AI_a}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

$$\sum \frac{\overline{AI}^2 \cdot \overline{BI_a}^2}{\overline{AB}} = \sum \overline{AI}^2 \cdot \overline{BC}.$$

(Cei trei termeni ai fiecărei sume se obţin făcând permutări circulare asupra literelor A, B, C *şi indicilor* a, b, c).

CEZAR COŞNIŢĂ.

Bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC formează triunghiul $I_a I_b I_c$ al cărui triunghiu podar relativ la punctul I este chiar triunghiul ABC.

Din această observare imediată, deducem egalităţile cunoscute între unghiuri, anume:

$$\sphericalangle BAI = \sphericalangle IAC = \sphericalangle BI_c I = \sphericalangle CI_b I = \tfrac{1}{2}A$$

$$\sphericalangle CBI = \sphericalangle IBA = \sphericalangle CI_a I = \sphericalangle AI_c I = \tfrac{1}{2}B$$

$$\sphericalangle ACI = \sphericalangle ICB = \sphericalangle AI_b I = \sphericalangle BI_a I = \tfrac{1}{2}C$$

în virtutea cărora rezultă asemănări de triunghiuri. In acest fel, triunghiurile AIB și ACI_a fiind asemenea deducem relațiunile următoare :

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AI_a}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{CI_a}} . \tag{1}$$

In mod analog, obținem relațiunile :

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BI_b}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AI_b}} \tag{2}$$

și

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CI_c}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI_c}} . \tag{3}$$

Din prima relațiune, primele două rapoarte egale conduc la relațiunea :

$$\overline{AI} \cdot \overline{AI_a} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} ,$$

apoi la următoarea :

$$\frac{\overline{AI}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AI_a}^2} \tag{4}$$

deci fără greutate obținem relațiunea :

$$\sum \frac{\overline{AI}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \sum \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AI_a}^2} \tag{5}$$

în care ținând seamă de relațiunea $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AI} \cdot \overline{AI_a}$ și analoagele ei, obținem relațiunea mai complectă :

$$\sum \frac{\overline{AI}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \sum \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AI_a}^2} = \sum \frac{\overline{AI}}{\overline{AI_a}} . \tag{6}$$

Dacă M și M' sunt punctele de tangență ale cercurilor I și I_a la dreapta $\overline{AB}$, triunghiurile AIM și $AI_a M'$ sunt asemenea, deci ținând seamă de relațiunile $\overline{AM} = p - a$, $\overline{AM'} = p$, $\overline{IM} = r$, $\overline{I_a M'} = r_a$. și analoagele lor, deducem :

$$\sum \frac{\overline{AI}}{\overline{AI_a}} = \sum \frac{r}{r_a} = \sum \frac{p-a}{p} = 1 ; \tag{7}$$

p, a, b, c, r, r_a, r_b, r_c având semnificările cunoscute.

II. A doua relaţiune a enunţului se deduce imediat, căci având relaţiunile (4) avem deasemenea, după cele ce preced:

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\overline{AI}^2}=\frac{\overline{AI}_a^2}{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{AI}_a}{\overline{AI}}=\frac{r_a}{r} \tag{8}$$

şi analoagele; în consecinţă avem pe următoarele:

$$(9)\quad \sum\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\overline{AI}^2}=\sum\frac{\overline{AI}_a^2}{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}=\sum\frac{\overline{AI}_a}{\overline{AI}}=\sum\frac{r_a}{r}.$$

III. Pentru stabilirea relaţiunii a treia a enunţului, este de ajuns să observăm că triunghiurile AIC şi ABI_a sunt asemenea şi să scriem relaţiunile care rezultă:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AI}_a}=\frac{\overline{CI}}{\overline{BI}_a} \tag{10}$$

precum şi analoagele, care se deduc în acelaş fel:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BI}_b}=\frac{\overline{AI}}{\overline{CI}_b}\quad(11)\quad\text{şi}\quad\frac{\overline{CI}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CI}_c}=\frac{\overline{BI}}{\overline{AI}_c}.\quad(12)$$

Din (10) deducem considerând primul şi ultimul raport, relaţiunea:

$$\overline{AI}\cdot\overline{BI}_a=\overline{CI}\cdot\overline{AB}, \tag{13}$$

deci

$$\frac{\overline{AI}^2\cdot\overline{BI}_a^2}{\overline{AB}}=\overline{CI}^2\cdot\overline{AB}. \tag{14}$$

Din (11) şi (12) deducem în acelaş fel relaţiunile analoage:

$$\frac{\overline{BI}^2\cdot\overline{CI}_b^2}{\overline{BC}}=\overline{AI}^2\cdot\overline{BC}\quad\text{şi}\quad\frac{\overline{CI}^2\cdot\overline{AI}_c^2}{\overline{CA}}=\overline{BI}^2\cdot\overline{CA}. \tag{15}$$

Adunând relaţiunile (14) şi (15) obţinem relaţiunea cerută:

$$\sum\frac{\overline{AI}^2\cdot\overline{BI}_a^2}{\overline{AB}}=\sum\overline{AI}^2\cdot\overline{BC}. \tag{16}$$

Observare. Dacă vrem să găsim valoarea comună a expresiunilor din (16), observăm că din relaţiunile (1) şi (10) obţinem:

$$\overline{AI}=\frac{\overline{BI}\cdot\overline{AC}}{\overline{CI}_a}\quad\text{şi}\quad\overline{AI}=\frac{\overline{CI}\cdot\overline{AB}}{\overline{BI}_a} \tag{17}$$

din care deducem imediat:

$$\overline{AI}^2\cdot\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\frac{\overline{BI}}{\overline{BI}_a}\cdot\frac{\overline{CI}}{\overline{CI}_a}.$$

Considerând însă perechile de triunghiuri asemenea (IBI_a, INC) şi ICI_a, IMB) deducem :

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BI_a}} = \frac{\overline{IN}}{\overline{NC}} = \frac{r}{p-c} \text{ şi } \frac{\overline{CI}}{\overline{CI_a}} = \frac{\overline{IM}}{\overline{MB}} = \frac{r}{p-b} \qquad (19)$$

(M, N fiind punctele de tangenţă ale cercului înscris), şi ca urmare :

$$\overline{AI}^2 \cdot \overline{BC} = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{r^2}{(p-b)(p-c)} \cdot \qquad (20)$$

Din expresiunile suprafeţii triunghiului ABC, avem relaţiunea :

$$r^2 \cdot p^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

deci

$$\frac{r^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p-a}{p} ; \qquad (21)$$

în consecinţă relaţiunea (20) devine :

$$\overline{AI}^2 \cdot \overline{BC} = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{p-a}{p} \qquad (22)$$

şi ca urmare :

$$(23) \quad \sum \frac{\overline{AI}^2 \cdot \overline{BI_a}^2}{\overline{AB}} = \sum \overline{AI}^2 \cdot \overline{BC} = abc \frac{p-a}{p} = abc .$$

Observarea II-a.

Soluţiunea de mai sus permite a construi foarte multe alte relaţiuni între laturile triunghiului ABC şi distanţele vârfurilor acestui triunghiu la centrele cercurilor tritangente lui.

Dintre relaţiunile date în enunţul problemii, prima este cunoscută (după cum arată D-l VLADIMIR I. CRIVĂŢ) fiind dată în *«Relations entre les éléments d'un triangle» par* H. VUIBERT (ex. 76 şi 77), a doua este o consecinţă imediată a calculului făcut pentru prima. A treia relaţiune prezintă interes atât prin forma ei simetrică, cât şi prin valoarea comună a celor două sume, fiind egale cu produsul laturilor triunghiului.

Au rezolvat problema calculând fiecare sumă în parte şi deducând egalitatea din faptul că au o valoare comună D-nii : MIHAIL VELEA, AURELIAN I. STAN, CONST. D. IONESCU-ŢIU, I. MURĂROIU, VLADIMIR I. CRIVĂŢ, V. IONESCU, CONSTANTIN DAN, PETRE I. GHIŞOIU, CRISTIAN I. RÂMNICEANU, H. P. IONESCU-BISS [ultimii trei folosind relaţiunile date D-l CEZAR COŞNIŢĂ în R. M. T. an. IX pag. 7], IOAN G. POPA, CORNELIU POPESCU, LUPESCU CONSTANTIN, IOAN N. CRAIU, N. N. MIHĂILEANU, MARIUS MARGULIUS (plecând dela identităţi trigonometrice).

O. N. Ţ.

*PROBLEMA 3895. *Să se arate că într'un patrulater inscriptibil* ABCD, *în care notăm cu* E *punctul de intersecţiune al diagonalelor, avem relaţiunea*

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CE} = \overline{CB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AE}.$$

ROMEO I. RĂŞCANU *)

Soluţiunea I-a dată de D-nii: N. ALDEA, HARALAMB P. IONESCU-BISS, MĂRGĂRIT FAŢE, CONSTANTIN N. AVRAM, ALEXANDRU H. HALPERIN, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, EUGEN P. HARALAMB, D. V. ŞERBAN-ULMENI, S.-LT. I. G. ZAMFIRESCU, NICOLAE N. MIHĂILEANU, NICOLAE N. VELICESCU, VLADIMIR I. CRIVĂŢ, I. EPURAN, GH. OPRESCU, ION N. CRAIU, IOAN C. BOIAN, TITU G. VELICESCU-BUCUREŞTI, C-TIN I. ŞERBU, D. ŞERBAN-ULMENI, NICOLAE ANTONESCU, I. C. PAREPEANU, CORNELIU POPESCU, MARIUS MARGULIUS.

Este cunoscut că unghiurile înscrise în acelaş segment de cerc sunt egale, deci avem egalităţile:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC, \quad \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD,$$

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB, \quad \sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC, \quad (1)$$

în virtutea cărora, perechile de triunghiuri

$$(AEB \text{ şi } DEC) \quad ; \quad (AED \text{ şi } BEC)$$

sunt respectiv asemenea, adică, pe lângă egalitatea unghiurilor, avem între laturi relaţiunile:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \quad (2) \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CB}}. \quad (3)$$

Inmulţind relaţiunile (2) şi (3) între ele, obţinem

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CB} \cdot \overline{CD}} \quad (4)$$

sau încă

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CE} = \overline{CB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AE},$$

care este relaţiunea cerută.

*) Problema este cunoscută. (Vezi Traité de géométrie par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, pag. 389 ex. 199, première partie).

Soluțiunea II-a dată de D-nii: MIHAIL VELEA, PETRE GHIȘOIU, MARIN P. CHIȚU. MARIS AL. LICHERDOPOL-BURA, NICOLAE N. MIHĂILEANU.

Fie A' și C' proiecțiunile punctelor A și C pe diagonala BD. Patrulaterul ABCD, fiind înscris într'un cerc, unghiurile BAD și BCD sunt suplimentare (sau egale), deci raportul ariilor triunghiurilor BAC și BCD este egal cu raportul produselor laturilor care formează unghiurile suplimentare (sau egale), adică:

$$\frac{\text{aria BAD}}{\text{aria BCD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CB} \cdot \overline{CD}} \cdot \qquad (1)$$

De altă parte triunghiurile BAD și BCD, având o bază comună $\overline{BD}$, au raportul ariilor lor egal cu raportul înălțimilor corespunzătoare bazei comune:

$$\frac{\text{aria BAD}}{\text{aria BCD}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}} \cdot \qquad (2)$$

Comparând (2) cu (1) deducem relațiunea:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CB} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}} \cdot \qquad (3)$$

Insă, triunghiurile dreptunghiuri AA'E și CC'E, având unghiurile ascuțite din E egale, sunt asemenea, deci:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CB}} \cdot \qquad (4)$$

Comparând acum relațiunile (3) și (4), deducem

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CB} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} \qquad (5)$$

care este o altă formă a relațiunii cerute.

Soluțiunea III-a dată de D-nii: AUREL C. CONSTANTINESCU, MIRCEA D. MOTOC.

Considerând triunghiurile determinate de diagonala BD și aplicând proprietatea cunoscută că: *într'un triunghiu produsul a două*

laturi este egal cu produsul înălțimii adiacente cu diametrul cercului circumscris triunghiului, avem relațiunile:

$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{AB} &= 2R \cdot \overline{AA'} \\ \overline{CB} \cdot \overline{CD} &= 2R \cdot \overline{CC'} \end{aligned} \qquad (1)$$

pe care împărțindu-le obținem:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CB} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}} . \qquad (2)$$

Restul ca în soluțiunea precedentă.

Soluțiunea IV-a dată de D-nii: NICOLAE N. VELICESCU, CONST. GH. LUPESCU.

Folosind relațiunile dintre laturile și sinusurile unghiurilor opuse dintr'un triunghiu, obținem, considerând triunghiurile ABC, AED și CED, următoarele egalități:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{BAC}} , \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\sin \widehat{AED}}{\sin \widehat{ADE}} = \frac{\sin \widehat{AED}}{\sin \widehat{ACB}}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\sin \widehat{CDE}}{\sin \widehat{CED}} = \frac{\sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{AED}} .$$

Inmulțind aceste egalități între ele, avem relațiunea cerută sub forma:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CE}}{\overline{CB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AE}} = 1.$$

Observarea I. Demonstrațiunile sunt aceleaș fie că patrulaterul inscriptibil ABCD este *convex* sau *stelat.* Toate soluțiunile primite se referă numai la patrulaterul convex.

II. Unii corespondenți au dat și alte relațiuni între segmentele diagonalelor și laturile patrulaterului inscriptibil.

Proprietatea dată în enunț este caracteristică. Ea leagă raportul produselor obținute luând perechile de laturi adiacente la acelaș capăt al unei diagonale, de raportul segmentelor determinate pe diagonala considerată de cealaltă diagonală a patrulaterului inscriptibil.

O. N. Ț.

PROBLEMA 3908 şi 4050. *O corabie în mers se găseşte la un moment dat pe aceeaşi linie cu două faruri, cel mai apropiat fiind la distanţa a de corabie. După o oră de mers pe o direcţie ce făcea unghiul α cu linia farurilor, razele vizuale dela corabie la cele două faruri fac cu direcţia de mers unghiurile β şi γ. Să se afle iuţeala corăbiei şi depărtarea dintre faruri.*

M. Ghermănescu.

Soluţie dată de D-nii: N. Acikgheozian, A. Bădescu, A. Buţan, R. Dumitraşcu, S. Efstate, M. Margulius, N. Mihăileanu, M. Negrea, Em. Pănoiu, N. Patraulea, R. Patraulea, G. Roşca, A. Sachelarescu, Sub.-lt. I. Savin, Cr. Ştefănescu, L. Theoharide, P. Varlam şi V. I. Vissarion.

Fie A şi B cele două faruri, C punctul unde se află corabia în momentul iniţial şi D poziţia sa după o oră de mers. Viteza corăbiei, dacă luăm ora cu unitate de timp se exprimă prin lungimea CD. Presupunem punctul C în afară de farurile A şi B, mai aproape de farul B. Din triunghiul BCD deducem

$$CD = \frac{a \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma}, \quad BD = \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

iar din triunghiul ABD

$$AB = \frac{BD \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a \sin\alpha \sin(\beta - \gamma)}{\sin\gamma \sin(\alpha + \beta)}.$$

Discuţia. Unghiul α e diferit de zero, căci altfel problema nu mai are sens; de aci rezultă că şi unghiurile β, γ sunt diferite de zero. Formulele de rezolvare se simplifică în câteva cazuri particulare. Astfel, dacă $\alpha = 90^0$, avem

$$CD = a \cot\gamma \quad , \quad AB = \operatorname{tg}\beta \cot\gamma - 1 \quad \beta > \gamma.$$

Notă. 1. Singuri D-nii: G. Roşca, L. Theoharide şi P. Varlam au examinat şi cazul când punctul C se găseşte între faruri, caz foarte posibil în realitate, de exemplu când corabia ar trece printr'un canal.

2. Problema a apărut din eroare sub două numere, de aceea am dat aci soluţia unică.

M G.

PROBLEMA 4016. *Un amestec de aur şi argint, în greutate de 2350 gr. are forma unui con circular drept, cu înălţimea de 5 cm. Dacă cufundăm conul în apă, el pierde 148 grame din greutate. Să se afle raza bazei conului şi cantităţile de aur şi argint din amestec ştiind că densitatea aurului este 19,25 iar a argintului 10,47.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: C. CINSKY, I. COJOCARU, H. IONESCU-BISS, I. LEUCÓ, M. MARGULIUS, N. MIHĂILEANU, I. PAREPEANU, G. ROŞCA, I. SAVIN, A. STOICA, P. VARLAM, V. VISSARION, I. ZAMFIRESCU şi N. ZANE.

Insemnăm cu x şi y cantităţile de aur şi argint conţinute în amestec; vom avea de rezolvat sistemul de ecuaţii:

$$x + y = 2350$$

$$\frac{x}{19{,}25} + \frac{y}{10{,}47} = 148$$

care ne dă rezultatele rotunjite $x = 1755$ gr., $y = 595$ gr.

Fie R raza bazei conului; volumul conului fiind egal cu 148, vom avea:

$$\pi R^2 \cdot 5 = 3.148$$

care ne dă: $R = 5{,}31$ cm.

M. G.

PROBLEMA 4023. *Insemnând cu* V_b, V_c *volumele născute de un triunghiu dreptunghiu* BAC, *care se roteşte succesiv în jurul catetelor* AC, AB, *avem relaţia*

$$V_b^2 + V_c^2 = \frac{4\pi^2}{9} \overline{BC}^2 \cdot \overline{ABC}^2.$$

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: V. CRIVĂŢ, R. DUMITRAŞCU, P. GHIŞOIU, C. IONESCU-ŢIU, C. LUPESCU, M. MARGULIUS, N. MIHĂILEANU, E. MILEA, ST. OLTEANU, I. PAREPEANU, N. PATRAULEA, M. POPESCU-STĂNEŞTI, G. ROŞCA, I. SAVIN, A. STOICA, P. VARLAM, N. VELICESCU, V. VISSARION şi I. ZAMFIRESCU.

Cu ocazia rezolvării problemelor 3993 şi 4004 s'au invederat relaţiile

$$V_b = \frac{2}{3}\pi \cdot AB \cdot ABC \quad , \quad V_c = \frac{2}{3}\pi AC \cdot ABC.$$

Ridicându-le la patrat, adunând în ambii membrii şi ţinând seama de teorema lui PITAGORA

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

obţinem tocmai relaţia propusă.

Notă. In enunţul problemei, din eroare a fost omis factorul 4/9. Totuşi s'a găsit cineva care s'o demonstreze . . . *tale quale.*

M. G.

PROBLEMA 4037. *O prismă cu înălţimea de 6 dm. e cufundată în apă. Să se găsească înălţimea părţii intrate în apă, precum şi densitatea materialului din care e făcută prisma, ştiind că dacă e cufundată în alcool, înălţimea părţii cufundate este egală cu înălţimea părţii rămase deasupra apei, densitatea alcoolului fiind 0,838.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: A. BĂDESCU, C. CINSKY, M. MARGULIUS, N. PATRAULEA, G. ROŞCA, P. VARLAM, V. VISSARION şi N. ZANE.

Insemnăm cu x înălţimea părţii intrate în apă, cu B suprafaţa bazei prismei, iar cu y densitatea materialului din care e făcută prisma. Conform principiului lui ARHIMEDE vom putea scrie relaţiunile

$$Bx = B \cdot 6 \cdot y$$

$$0{,}838\ B(6 - x) = B \cdot 6 \cdot y$$

sau

$$x = 6y = 0{,}838\ (6 - x)$$

găsim

$$x = 2{,}735 \text{ dm.} \quad y = 0{,}456.$$

Notă. Dacă în general înălţimea prismei era h iar cele două lichide aveau densităţile d_1 şi d_2, am fi obţinut formulele de rezolvare

$$x = \frac{hd_2}{d_1 + d_2} \quad , \quad y = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} .$$

M. G.

PROBLEMA 4095. *Se dau în plan două puncte fixe* A, B, *o dreaptă* Δ *şi un punct* M *mobil pe* Δ. *Fie* Δ' *simetrica dreptei* Δ *faţă de* MA. *Se cere locul proiecţiei lui* B *pe* Δ'.

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: SUB-LT. A. STAN (Fontainebleau, Franţa); AD. C. GHEORGHIU (Student, Bucureşti); şi N. N. MIHĂILEANU (Constanţa).

Fie C, D proiecţiile lui A pe Δ şi Δ'. Prin construcţie AM este bisectoara unghiului dreptelor Δ, Δ' deci

$$AD = AC = \text{const.}$$

Prin urmare Δ' rămâne tangenta cercului constant şi fix cu centrul în A şi cu raza AC. Proiecţia lui B pe tangenta Δ' la cercul fix descrie, după cum se ştie un melc al lui PASCAL cu polul în B şi cu axa AB.

D-nii S.-LT. I. C. SAVIN (Sub-Lt., Student) şi N. N. MIHĂILEANU (Constanţa) au trimis foarte bune soluţiuni analitice stabilind ecuaţia locului.

PROBLEMA 4141. *Să se arate că diferenţa puterilor a cincea a două numere întregi nu se poate divide cu 13 de cât dacă diferenţa acelor numere se divide cu 13.*

I. IONESCU.

Dacă numerele sunt $\not\equiv 13$ proprietatea este evidentă.

Dacă unul din numere e $\not\equiv 13$ şi altul nu este, acelaşi lucru e şi pentru puterile lor şi prin urmare nu putem avea un caz corespunzător enunţului.

Faţă de divizorul 13 un număr poate da resturile ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ± 6. Puterile a cincea ale acestora divizate cu 13 dau resturile ± 1, ± 6, ± 9, ± 10, ± 5, ± 11. Aceste numere combinate prin scădere, două câte două, nu dau niciodată 13 şi dau 0 ca diferenţă numai dacă numerele sunt de aceeaşi formă faţă de divizorul 13. Deci diferenţa puterilor a cincea a două numere nu este $\not\equiv 13$ de cât dacă ele sunt de aceeaşi formă faţă de acest divizor. Dar atunci diferenţa numerelor este $\not\equiv 13$.

Notă. Au rezolvat bine chestiunea şi D-nii: S.-LT. A. EM. BĂDESCU şi M. MARGULIUS (Lic. Spiru Haret, Bucureşti).

SAGER N. IANCU
Profesor. Râmnicul-Sărat.

*EXERCIŢII

1. In orice triunghiu avem relaţia:

$$(\Sigma a^n)^2 - 2^{n+1}\, S^n\, \Sigma \frac{1}{\sin^n A} = 2^{2n} R^n \Sigma \sin^{2n} A.$$

(Generalizarea ex. 1 din G. M. Vol. XXXVII).

VL. CRIVĂŢ.

R. Se trece suma a doua din prima parte, în partea a doua şi se ţine seamă de relaţiile:

$$a = 2R \sin A, \text{ etc... şi } S = \frac{abc}{4R}.$$

Se ajunge la relaţia:

$$(\Sigma a^n)^2 = 2\Sigma b^n c^n + \Sigma a^{2n}$$

care este evidentă. Pentru $n = 1$ se obţine ex. citat.

2. Se cere expresia razei cercului înscris în triunghiul ortic r', în funcţie de A, B, C, R elementele triunghiului fundamental.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Avem: $r' = 4R' \sin\frac{1}{2}A' \sin\frac{1}{2}B' \sin\frac{1}{2}C'$ şi cum se ştie că $R' = \frac{1}{2}R$ ca fiind raza cercului lui EULER al triunghiului ABC, iar $A' = 180^\circ - 2A$, etc.. se găseşte: $r' = 2R \cos A \cos B \cos C$.

3. Să se stabilească relaţiile

$$S'^2_a + S'^2_b + S'^2_c = 4R^2 \sum \frac{1}{(\cot C - \cot B)^2}$$

$$S'_a S'_b + S'_b S'_c + S'_c S'_a = \frac{S}{R} \sum \frac{c}{\sin(B - C) \sin(C - A)}$$

unde S'_a, S'_b, S'_c reprezintă simedianele exterioare, iar celelalte notaţiuni sunt obişnuite.

MARIUS MARGULIUS.

R. Se ştie că $S'_a = \frac{abc}{b^2 - c^2}$. (G. M. XXXIII, p. 78), şi deoarece $b^2 - c^2 = 2S(\cot C - \cot B)$, iar $abc = 4RS$, se obţine uşor prima relaţie din

$$S'^2_a = \frac{4R^2}{(\cot C - \operatorname{cotg} B)^2}.$$

Deasemenea ţinând seama de

$$b^2 - c^2 = a^2 \frac{\sin(B - c)}{\sin A}, \text{ etc...}$$

şi formând

$$S'_a S'_b = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}$$

se obţine

$$S'_a S' = \frac{abc^2}{4R^2 \sin(B - c) \sin(c - A)},$$

de unde prin însumare se capătă relaţia a doua.

PROBLEME PROPUSE

*3874[1]). Fie ABCD un patrunghiu şi *qrs* triunghiul său diagonal astfel că : $q \equiv (AB, CD)$, $r \equiv (BD, CA)$, $s \equiv (BC, AD)$. O dreaptă Δ trecând prin A taie pe *qr*, *rs*, *sq* respectiv în *s'*, *q'*, *r'*. Se consideră punctele :

$$m \equiv (rr', qq') \quad \text{şi} \quad n \equiv (BrD, ss').$$

Să se arate că dreptele *qn*, A*r* C, *sm* sunt concurente.

ADRIAN C. GHEORGHIU.

*3908[2]). Să se arate că între unghiurile unui triunghiu există relaţiunea :

$$\sin^2A \sin^2B + \sin^2B \sin^2C + \sin^2C \sin^2A \leqslant \tfrac{3}{4}(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C).$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

*4041[3]). Să se spună, dacă pot fi determinate două numere *m* şi *n*, întregi şi pozitive, astfel ca ecuaţiunea

$$x^{2n} - y^{2n} = 10^m$$

să poată fi rezolvată în numere întregi.

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

4171. Care este cel mai mare număr care divide totdeauna produsul a trei numere consecutive perechi ? Dar dacă numerele ar fi neperechi consecutive ?

I. IONESCU.

---

1) Problema 3874, propusă la pag. 279, Vol. XXXV, fiind identică cu problema 3797, propusă la pag 78, Vol. XXXV şi rezolvată la pag. 342, Vol. XXXVI, se înlocueşte cu prezenta.

2) Problema 3908, propusă la pag. 119, Vol. XXXVII, fiind identică cu problema 4050, propusă la pag. 480, Vol. XXXVI, se înlocueşte cu prezenta.

3) Problema 4041, propusă la pag. 479, Vol. XXXVI, fiind identică cu problema 3392, propusă la pag. 279, Vol. XXXI şi rezolvată la pag. 473, Vol. XXXI, se înlocueşte cu prezenta.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

*4172. Să se demonstreze că nu există numere întregi x, y, z care să verifice egalitatea:

$$\frac{x^2 - z}{z + 1} = \frac{y^2 + z}{z - 1}.$$

IOAN B. FLORESCU.

*4173. Să se prelungească segmentul dat $\overline{AB}$ cu o lungime $\overline{BC}$ egală cu o lungime dată a, *construindu-se noua extremitate* C *numai cu compasul.* Să se construiască apoi, de asemenea numai cu compasul, un al doilea punct al perpendicularei ridicată în punctul B pe $\overline{AB}$.

O. N. ȚINO.

*4174. In triunghiul ABC, fie A_1, B_1, C_1 picioarele cevienelor punctului I din planul său, A′ intersecțiunea (AA_1, B_1C_1), iar A_2 intersecțiunea (BC, B_1C_1). Să se demonstreze că:

1°. Punctele (A_1B_1, CA'); (A_1C_1, BA'); I; A_2 sunt colineare.

2°. Punctele (A_1B_1, BA'); (A_1C_1, CA'); A, A_2 sunt colineare.

3°. Punctele (BB_1, A_1C_1); (CC_1, A_1B_1); A_2 sunt colineare.

4°. Punctele (BB_1, CA'); (CC_1, BA'); A_2 sunt colineare.

5°. Punctele (BB_1, A_1C_1); (CC_1, BA'); A sunt colineare.

6°. Punctele (CC_1, A_1B_1); (BB_1, CA'); A sunt colineare.

S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

4175. Intr'un cerc O, o secantă oarecare întâlnește două coarde $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în B′ și C′, iar cercul O în M_b și M_c. Să se arate că:

1°. Perechile de cercuri M_bBB' cu M_bCC' și M_cCC' cu M_cBB sunt respectiv tangente.

2°. Tangentele comune respective în M_b și M_c sunt concurente în P pe cercul O, iar AP este paralelă la M_bM_c.

3°. Dacă T_b și T_c sunt intersecțiunile perechilor de drepte (M_bP, AC) și (M_cP, AB), dreptele T_bT_c, M_bB, M_cC sunt concurente în N.

4°. Punctul A fiind mobil pe cerc, iar coarda M_bM_c păstrând o lungime constantă, să se găsească locurile punctului N și al centrului radical al cercurilor M_bCC', M_cBB' și O.

I. NICOLAU-DOBRIDOR.

4176. Fie ABCD un patrulater înscris în cercul O. Dacă O_1 și O_2 sunt respectiv centrele cercurilor ACO și BDO, dreapta O_1O_2 este paralelă cu a treia diagonală a patrulaterului ABCD.

S. M. Feldstein.

4177. Fie A', B', C', D' și A'', B'', C'', D'' centrele patratelor construite exterior, apoi interior pe laturile unui patrulater ABCD ale cărui diagonale AC, BD sunt egale. Să se arate că patrulaterele A'B'A''B'', B C'B''C'', C'D'C''D'', D'A'D''A'' au ariile echivalente.

V. Thébault.

*4178. Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:

$$\left|\begin{array}{r} x^6 - y^6 + x^2y^4 - x^4y^2 = 51 \\ x^8y^4 + x^4y^8 = 272. \end{array}\right|$$

Ioan Curchi.

*4179. Dacă Δ și Δ_1 reprezintă determinanții:

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin b & \sin 2b & \sin 3b \\ \sin c & \sin 2c & \sin 3c \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{vmatrix} \cos a & \sin 2a & \cos 3a \\ \cos b & \sin 2b & \cos 3b \\ \cos c & \sin 2c & \cos 3c \end{vmatrix},$$

avem relațiunea

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{a+c}{2}.$$

Nicolae Donciu.

*4180. Se consideră expresia:

$$(avz + bwx + cvx)(awy + bwx + cuy)(avz + buz + cuy)$$
$$+ (awy + bwx + cvx)(awy + buz + cuy)(avz + buz + cvx).$$

Să se pună această expresie sub forma unui produs de trei factori.

N. G. Botea.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandrescu B. (4037, 138); *Bădescu Em. A. Subloc.* (4138, P); *Cârstoiu I.* (4039); *Ghiuţă V. Gh.* (4138); *Ionescu B. P. H.* (C, P); *Ivănescu Cezar* (4083, 88, 89, 124, 29, 38, 40, E, N); *Mănescu M.* (4027, 44, 137); *Margulius M.* (4109, 58, E, P); *Olteanu St.* (4137, 39, P); *Parepeanu C. I.* (3827, 40, 925, 4109); *Popescu-Stăneşti M.* (4109); *Sager I.* (4137, 59, P); *Savin C. I. Subloc.* (4083, E); *Thébault V.* (A, N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 0 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI are se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNEA"
STATUL

ANUL XXXVIII

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1932

SUMARUL

1. Quelques propriétés du triangle rectangle . . . *V. Thébault*
2. Considerațiuni practice la alcătuirea și rezolvarea problemelor de matematică (urmare) . . . . *I. Ionescu*
3. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu".
4. Note matematice: 5 — 7.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 222.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2414, 2443, 3694, 3929, 4014, 4027, 4115, 4138.
10. Exerciții: 4 — 9.
11. Probleme propuse: 3491, 4181 — 4190.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1932

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul 1932 se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 45, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 13, 18, 19, 21, 23, 26, 32, 35, 42, 43, 47, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

*QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTANGLE

1. Soient un quadrilatère convexe ABCD, ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$) ; A', B', C', D' et A'', B'', C'', D'', les centres des carrés construits extérieurement et intérieurement sur les côtés AB, BC, CD, DA ; S l'aire du quadrilatère ABCD. [1])

Nous avons montré que le quadrilatère A' B' C'' D'', par exemple, déterminé par les centres de deux carrés extérieurs consécutifs et par ceux des deux carrés intérieurs relatifs aux deux autres côtés du quadrilatère fondamental, est un *pseudo-carré,* dans lequel les côtés A'D'' et B'C'' sont rectangulaires [2]).

L'aire S_1 de ce quadrilatère s'exprime

$$S_1 = S + \overline{A'BB'} + \overline{BB'C} + \overline{AA'D''} + \overline{ADD''} + \overline{DCC''} + \overline{CB'C''} + \overline{DC''D''},$$

soit

$$8S_1 = 4S + a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

et devient nulle lorsque

$$4S = c^2 + d^2 - a^2 - b^2.$$

Cette condition est réalisée dans deux cas de figure : 1° deux sommets B', D'', par exemple, *coïncident ;* 2° le quadrilatère A'B'C''D'' est *croisé* et formé de deux triangles *symétriquement* égaux.

Nous ne retiendrons ici que la figure dans laquelle les sommets B', D'', coïncident.

Dans ce cas, le quadrilatère A'B'C''D'' se réduit à deux droites A'B', C''D'', égales et perpendiculaires. Il en est de même du pseudo-carré B'C'A''D'', et le segment de droite $B''D'' \equiv B''B'$ est égal et perpendiculaire au côté BC. Alors, le segment de droite A''C''=B''D'', est parallèle à AC. Les côtés AB et CD du quadrilatère fondamental sont rectangulaires, et, comme les triangles C'C''A et ABC sont égaux, $AB = C'C'' = CD$.

---

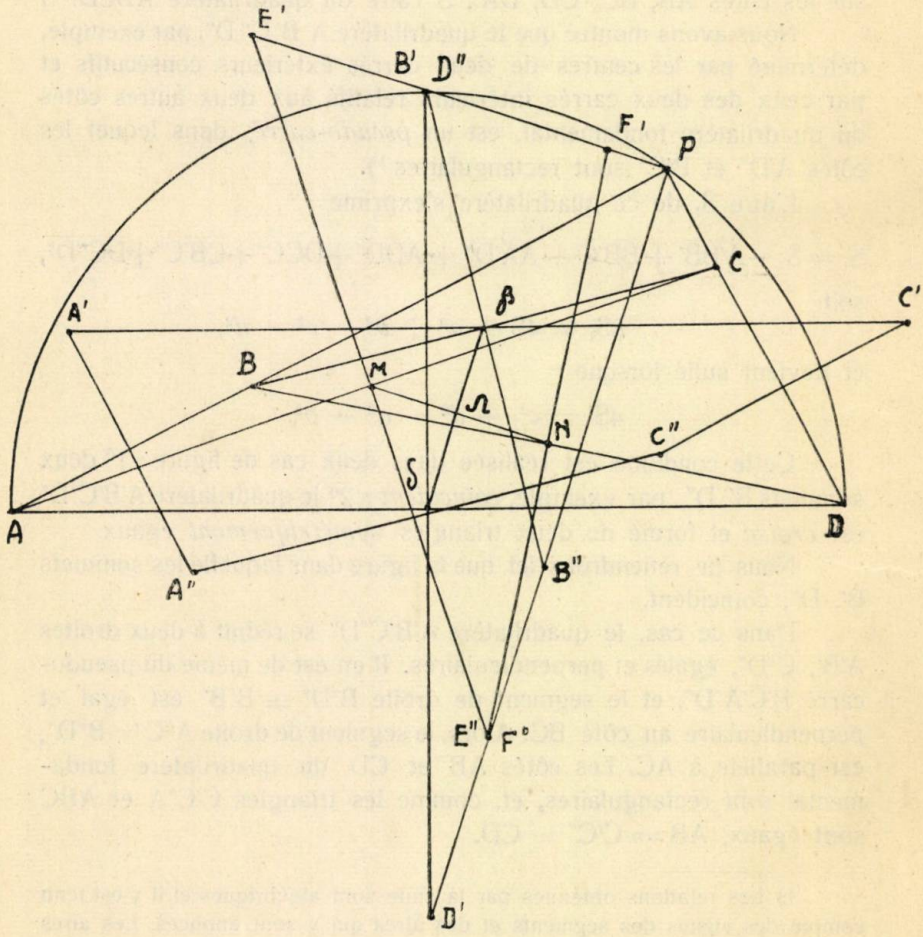
1) Les relations obtenues par la suite sont algébriques et il y est tenu compte des signes des segments et des aires qui y sont énoncés. Les aires satisfont à la définition générale de l'aire vectorielle d'un polygone plan ou gauche.

2) Communication au *Congrès de l'Association française pour l'Avancement des sciences.* Bruxelles, 1932.

Le quadrilatère ABCD *est donc un pseudo-carré.*
Dans ce quadrilatère,

$$a = c = C'C'' \; ; \; b = A''C'' = B''D'' \; ; \; 4S = d^2 - b^2. \qquad (1)$$

Pour le construire, il suffit de marquer sur les côtés AP, PD, de l'angle droit d'un triangle rectangle APD, deux points B, C, tels que $\overline{AB} = \overline{CD}$.



2. Ces remarques permettent d'énoncer ces propriétés du triangle rectangle APD sur les côtés duquel on marque les points B, C, tels que AB = CD = *a*. Si l'on pose BC = *b*, DA = *d*, et

que M, N, soient les milieux de AC, BD, A′, B′, C′, D′, E′, F′ et A″, B″, C″, D″, E″, F″, les centres des carrés construits extérieurement et intérieurement sur les côtes et les diagonales du quadrilatère ainsi déterminé :

1°. *Les centres des carrés construits intérieurement sur l'hypoténuse* DA *et extérieurement sur* BC, *coïncident,* $D'' \equiv B''$. *Ce point est le milieu du segment de droite* E′F′, *et* $E'F' = 2MN$.

2°. *Les segments* A′C′ *et* A″C″ *égalent respectivement* DA *et* BC *et passent aux milieux* β *et* δ *de* BC *et* DA.

3°. *Les droites* A″C′ *et* AC *sont parallèles, ainsi que* A′C″ *et* BD.

4°. *Les droites* A′B′ *et* B′C″ *sont égales et perpendiculaires, de même que* B′A″ *et* B′C′.

5°. *Lorsque la longueur a varie, le triangle* APD *restant fixe, la droite* BC *enveloppe une parabole de foyer* $B' \equiv D''$, *dont la tangente au sommet est la droite* $\beta\delta$.

6°. *Les centres* E″, F″, *coïncident avec le symétrique du point* P *par rapport à* MN, *et* $B'E'' = E''D' = MN$.

7°. *L'aire du quadrilatère* ABCD *est le quart de la différence entre celles des carrés construits sur l'hypoténuse et sur le segment* BC [1]).

N. B. Si l'on marque sur DP un point C_1 tel que $\overline{C_1D} = \overline{AP}$, $B \equiv P$, et le quadrilatère ABC_1D se réduit au triangle rectangle APD et à un segment de droite $\overline{C_1P}$ porté par PB.

La relation d'aires (1) subsiste pour cette figure.

Si $DA = m$, $AP = n$, $PD = p$, la relation (1) devient

$$2np = m^2 - (n - p)^2,$$

soit

$$m^2 = n^2 + p^2,$$

ce qui justifiè le théorème de PYTHAGORE.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

---

1) Cette remarque qui provient de la relation (1) peut être obtenue directement. (V. T.).

*CONSIDERAȚIUNI PRACTICE LA ALCĂTUIREA ȘI REZOLVAREA PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

(Urmare)

Sub acest titlu am studiat de mult în *„Gazeta Matematică"* (Anul XVI pag. 9 și 121 și Anul XVII pag. 325 și 363) mai multe chestiuni în legătură cu enunțul și rezolvarea problemelor practice de matematică. Aci mă voiu ocupa de chestiunea dării rezultatelor unor astfel de probleme.

III. *Rezultatele problemelor.* Am arătat că nu putem alcătui o problemă practică de matematică dacă nu-i cunoaștem rezultatul definitiv și chiar rezultatele intermediare ale calculelor ce duc la cel definitiv și am dat destule exemple ca să invederez acest lucru. Nu voiu reveni asupra acestor chestiuni; dar, fiindcă unii din cititorii acestui articol, nu vor putea avea articolele enumerate mai sus, voiu mai da aci un exemplu, de necesitatea cunoașterii rezultatului pentru a pune bine o problemă.

La admiterea în Anul Preparator al fostei Școale Naționale de Poduri și Șosele din București s'a dat, la concursul de aritmetică din anul 1911, următoarea problemă:

„Două trenuri, care parcurg distanța AB *cu iuțeli diferite, pleacă, unul din stația* A *la ora 6 dimineața, celălalt din stația* B *la ora 6½ dimineața și se întâlnesc în stația intermediară* C *la ora 7 și 47 minute dimineața. La întoarcere ambele trenuri pornesc la ora 6 seara, fiecare cu aceiași iuțeală ca la ducere și fără oprire în* C. *La ora 7 seara distanța între trenuri se micșorase cu 4/5 din distanța* AB; *în sfârșit, întâlnirea are loc, de data aceasta, la 37 km. depărtare de* C. *Să se determine* AC *și* CB, *iuțeala trenurilor și ora de întâlnire la întoarcere"*. (A se vedea *Gazeta Matematică* Anul XVII, pag. 55).

Dacă se rezolvă problema se găsește că distanța AB e de 3219/53 = 60,736 km., că distanța CB este de 5217/265 = 19,687 km., că trenul care pleacă dimineața din A are iuțeala de 60088/1325 = 45,349 km/oră iar celălalt 4292/1325 = 3,239 km/oră și că a doua întâlnire are loc la ora 7 și 15 minute. Toate aceste rezultate sunt admisibile, afară de iuțeala de 3,239 km/oră. Chiar

*CONSIDERAȚIUNI PRACTICE LA ALCĂTUIREA ȘI REZOLVAREA PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

(Urmare)

Sub acest titlu am studiat de mult în *„Gazeta Matematică"* (Anul XVI pag. 9 și 121 și Anul XVII pag. 325 și 363) mai multe chestiuni în legătură cu enunțul și rezolvarea problemelor practice de matematică. Aci mă voiu ocupa de chestiunea dării rezultatelor unor astfel de probleme.

III. *Rezultatele problemelor.* Am arătat că nu putem alcătui o problemă practică de matematică dacă nu-i cunoaștem rezultatul definitiv și chiar rezultatele intermediare ale calculelor ce duc la cel definitiv și am dat destule exemple ca să invederez acest lucru. Nu voiu reveni asupra acestor chestiuni; dar, fiindcă unii din cititorii acestui articol, nu vor putea avea articolele enumerate mai sus, voiu mai da aci un exemplu, de necesitatea cunoașterii rezultatului pentru a pune bine o problemă.

La admiterea în Anul Preparator al fostei Școale Naționale de Poduri și Șosele din București s'a dat, la concursul de aritmetică din anul 1911, următoarea problemă:

„Două trenuri, care parcurg distanța AB *cu iuțeli diferite, pleacă, unul din stația* A *la ora 6 dimineața, celălalt din stația* B *la ora 6½ dimineața și se întâlnesc în stația intermediară* C *la ora 7 și 47 minute dimineața. La întoarcere ambele trenuri pornesc la ora 6 seara, fiecare cu aceiași iuțeală ca la ducere și fără oprire în* C. *La ora 7 seara distanța între trenuri se micșorase cu 4/5 din distanța* AB; *în sfârșit, întâlnirea are loc, de data aceasta, la 37 km. depărtare de* C. *Să se determine* AC *și* CB, *iuțeala trenurilor și ora de întâlnire la întoarcere"*. (A se vedea *Gazeta Matematică* Anul XVII, pag. 55).

Dacă se rezolvă problema se găsește că distanța AB e de 3219/53 = 60,736 km., că distanța CB este de 5217/265 = 19,687 km., că trenul care pleacă dimineața din A are iuțeala de 60088/1325 = 45,349 km/oră iar celălalt 4292/1325 = 3,239 km/oră și că a doua întâlnire are loc la ora 7 și 15 minute. Toate aceste rezultate sunt admisibile, afară de iuțeala de 3,239 km/oră. Chiar

dacă s'ar admite că maşina lui hodorogită s'ar fi dus dimineaţa la un atelier de reparat, nu erea motiv să se pună în o cursă seara! Cu astfel de rezultate nu se împacă o problemă practică! Acest rezultat a şi făcut pe unul din candidaţii, care a rezolvat-o, să spună că acel tren merge cu boi vapori! Enunţul trebuia schimbat ca date, şi datele chiar alese aşa ca rezolvarea să nu ceară calcule numerice prea lungi, întrucât scopul chestiunii erea de a pune la încercare puterea de judecată aritmetică a candidaţilor. Sau trebuia să se ridice chestiunii caracterul de problemă practică, înlocuind *staţiunile* cu *puncte fixe* şi *trenurile* cu puncte *mobile.*

Dar în afară de această preocupare de rezultate la alcătuirea problemelor practice de matematică, trebuie ca rezultatele ce le dăm să fie puse sub forme corespunzătoare condiţiunilor practice şi aşa încât să fie utilizate imediat, fără calcule suplimentare şi fără modificări în enunţarea lor.

Astfel mai întâiu de toate nu trebuie să dăm rezultate dacă acestea nu sunt fixe ci se schimbă cu timpul, cu locul, etc. Astfel în *Aritmetica practică* pentru clasa I de Al. Manicatide & C. S. Popescu, tipărită în 1909, găsim la pag. 33 şi 35 problemele:

„Un om este născut în anul 1865. Ce vârstă are acum? (44 ani)".

„Câţi ani sunt dela războiul pentru independenţă până azi? (32)".

Cifrele dela urmă, din paranteze, sunt rezultatele. Ele nu conveneau decât anului în care s'a tipărit acea carte. Asemenea rezultate nu trebuiesc date. De altfel chiar autorii la pagina 33 dau alte două probleme, fără rezultat:

„Un om are azi 54 ani. Care este anul naşterii?".

„Un om avea 46 ani în 1906; care este vârsta sa azi?".

E apoi de observat că unele probleme de asemenea natură îşi pierd caracterul lor practic cu timpul, ca de exemplu primele, din aceste grupe, căci *„acum"* şi *„azi"* se îndepărtează în timp, pe când viaţa omului este limitată! Problemele acestea devin cu rezultate certe dacă se înlocuiesc *„acum"* şi *„azi"* cu *1909,* cân voim a da rezultatele.

Rezultatele trebuie să ţină seama de faptele practice la care se refer şi deci exprimate în consecinţă. Astfel în *Aritmetica raţionată* pentru clasa V de Al. Manicatide & C. S. Popescu & N. Abramescu, 1910 găsim la pag. 271:

„50 oameni mănâncă în 4 zile 160 kg. pâine. După 2 zile se mai adaugă 2 oameni. Cât timp va mai ajunge pâinea, admiţând că porţia a rămas neschimbată? (1 zi şi 22 minute)".

Rezultatul nu corespunde condiţiunilor practice; el presupune că omul mănâncă continuu ziua şi noaptea! Rezultatul practic e că unde mănâncă 50 oameni mai pot mânca încă 2, dar porţia nu mai poate rămâne matematiceşte aceiaşi. Problema trebuia aranjată cu date întregi, ca să-şi păstreze caracter practic.

Fracţiile ce intervin în rezultate trebuiesc date sub forma vulgară (ordinară), zecimală sau complexă după cum e obiceiul în practică. Astfel în Aritmetica, partea II pentru clasa III de Al. Manicatide & C. S. Popescu, 1909, pag. 59, găsim problema:

„Un lucrător a făcut un lucru de 9½ m. într'o zi până la 6½ seara lucrând 5/6 m. pe oră. Dacă s'a odihnit 2 ore, la ce oră a început lucrul? ($5\frac{1}{10}$)".

Lumea nu obişnueşte să exprime timpul în ore şi zecimale de ore. Rezultatul trebuia dat astfel: *„la ora 5 şi 6 minute".*

In aceiaşi aritmetică la pag. 131 găsim:

„Cât vor produce 4 ha. şi 25 arii dacă se produc 3 kile la hectar? (12,75 kile)".

Aci rezultatul trebuia dat în fracţii ordinare (12¾ kile) sau ca număr complex (12 kile şi 15 baniţe), căci kilele nu s'au zecimalizat.

In *Aritmetica* pentru clasa II de Gr. Orăşanu, 1929, pag. 167 găsim problema:

„Două echipe de lucrători termină o lucrare, una în 10 zile, alta în 12. Dacă se ia din prima 2/5 şi din a doua 3/4 şi se formează o singură echipă, în câte zile această nouă echipă va termina aceiaşi lucrare? ($9\frac{31}{41}$)".

Aci fracţia 31/41 trebuia transformată în ore, divizate cel mult în sferturi de oră, fixându-se numărul orelor de lucru pe zi. In cazul de faţă rezultatul se poate da sub forma *„aproximativ 9 zile şi trei sferturi"* oricare ar fi numărul de ore de lucru pe zi, căci 31/41 diferă de 3/4 cu 1/164 din zi. Dacă ziua de lucru e de 10 ore, aceasta nu reprezintă nici 4 minute, valoare neglijabilă în practică, unde sunt numeroase cauze de pierdere de timp din cel destinat lucrului.

Preciziunea rezultatului nu trebuie împinsă până peste limitele

permise în practică. In această privinţă găsim în *Aritmetica* pentru clasele secundare a lui SPIRU C. HARET, din 1888, exemple caracteristice. Iată două probleme dela pagina 90 :

„Cât costă chila moldovenească de grâu, dacă pentru 11 kile, 1 merţă, 4 dimirlii şi 5 oca s'a dat 2129 lei? (R. 18 lei, 30 parale, 1 lescaie $\frac{683}{937}$)".

„Câte oca de fer se pot cumpăra cu 436 lei 24 parale ştiind că o oca costă 1 leu, 8 parale 0 lescăi? (R. 360 ocale 1 litră 42 dramuri $\frac{474}{853}$)".

La pag. 104 găsim problema :

„O familie cheltueşte 284 lei în 33 zile. Câte zile i-ar ajunge 529 lei? (R. 42 $\frac{239}{284}$)".

La această problemă se aplică şi observaţiunile făcute înainte relativ la continuitatea consumării şi neexprimarea rezultatului ca număr complex. La pag. 105 găsim un exemplu isbitor de preciziune, fără valoare practică :

„Un număr de 214 boi au consumat în 13 zile o cantitate de 18324 oca de fân ; pe câte zile ar ajunge pentru 45 boi 2437 oca fân? (R. 20 $\frac{144590}{260759}$)".

Şi aci aceleaşi observaţiuni ca la problema precedentă.

Alt exemplu de această natură :

„Un detaşament de 250 soldaţi sunt închişi într'un fort, unde ei au nutriment pentru 60 zile, având dreptul zilnic fiecare la 800 grame de nutriment. Garnizoana se măreşte cu 50 de soldaţi şi trebuie să stea în fort 70 zile fără să primească ceva din afară. Cu cât trebuie să se micşoreze porţia fiecărui soldat? (228,58 g.). (*Aritmetica* pentru clasa II de GR. ORĂŞANU. 1929, pag. 167).

Rezultatul nu e dat sub formă practică, de oarece nimeni nu are să cântărească porţia la centigram. Erea destul a se pune 225 grame sau chiar 200 g. de oarece proviziile nu cresc cu durata timpului ci scad prin diferite cauze practice, ca stricăciuni, pierderi, furturi, etc. Şi apoi totdeauna e mai bine dacă rămâne de cât dacă nu se ajunge.

Numărul cifrelor zecimale trebuie să corespundă diviziunilor unităţilor corespunzătoare în care este dat rezultatul. Iată aci două probleme la care această condiţiune nu este îndeplinită ; luate din *Aritmetica* pentru clasa I de AL. MANICATIDE & C. S. POPESCU, 1909, pag. 165 şi 106 :

„Înălțimea lichidului dintr'un tub este de 0,136 m.; greutatea acelui lichid fiind 1 g. și densitatea lui fiind 13,5, să se afle suprafața bazei tubului. (0,005 cm^2).

Diviziunile unităților metrice de suprafață mergând din sută în sută, aci mai trebuia scoasă o zecimală, sau dacă exactitatea chestiunii nu ar comporta această preciziune, s'ar mai scrie un 0 după 5 așa că rezultatul să aibă un număr pereche de zecimale.

„Un con are raza bazei 0,8 iar înălțimea dublul diametrului. Care e volumul său? (2, 14324 $m.^3$)".

Cum diviziunile unităților metrice de volum merg din mie în mie, rezultatul trebuia să aibă șase cifre zecimale, deci calculată încă una mai departe, sau mai bine a se fi dat rezultatul 2,143 m^3, mai ales că ultimele două cifre sunt și eronate! Cu șase zecimale rezultatul este 2,143573 luând $\pi = 3{,}14$. Cu o valoare mai exactă pentru π diferența se accentuiază.

Aci e locul să mai spunem că preciziunea rezultatului trebuie să corespundă preciziunii calculului. Astfel la problema de care ne ocuparăm acum, de ce să se dea rezultatul cu cinci zecimale când se face calculul luând la π numai două? Dacă am lua $\pi = 3{,}1416$, valoare mult mai apropiată, găsim rezultatul 2,144666, așa că chiar cu trei zecimale ultima e nesigură. Rezultatul trebuia dar dat rotunjit 2,144 m^3. Nu are dar nici un sens să se dea cifre inexacte și inutile la rezultate, mai ales la probleme la care scopul nu este calculul numeric, ci aplicare de formule sau raționamentul aritmetic.

Mărimea unităților în care se exprimă rezultatul trebuie să nu fie nici prea mare, nici prea mică, căci atunci nu se poate face o idee clară a mărimilor. Astfel la problema de mai înainte cu tubul de 0,136 m., cineva nu-și face o idee clară ce este 0,005 cm^2, pe când dacă s'ar scrie 0,50 $mm.^2$ oricine știe cât este $\frac{1}{2}$ $mm.^2$. Practica de altfel a consacrat anumite unități pentru diferite mărimi, ca de exemplu *cm* pentru lățimea și grosimea grinzilor de lemn și scândurilor, *m* pentru lungimea lor, *mm* pentru grosimea tablelor, m^2 pentru locuri de case, *ha* pentru terenuri mari, km^2 pentru suprafețele unităților mari administrative, *kg* pentru unități curente, *tona* pentru încărcăminte de mărfuri, etc. Rezultatele practice trebuiesc date pe cât se poate în asemenea unități.

Bine înțeles că cele spuse aci se aplică problemelor date ca având caracter practic; pentru probleme teoretice sau artificiale,

autorul problemei poate da rezultatul cum voieşte. Astfel de exemplu de s'ar cere înălţimea unui dreptunghiu cu aria 1 m^2 şi baza 3 *m,* rezultatul poate fi scris 0,333333333333 m, sau 333,3 *mm,* sau 333333,3333.. *microni,* sau 0,00003 *miriametri,* sau 0,000000000000000033333333.. *ani lumină* (a zece trilioane de kilometri). Toate aceste rezultate sunt atunci admisibile. In practică însă nu se poate lua unitatea oricum. Acest rezultat, exprimat practic, ar fi de exemplu 33,3 cm.

(Va urma) I. IONESCU.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU"

PE ANUL 1931 — 1932

Subsemnaţii membri ai comisiunei pentru decernarea premiului pentru lucrări de matematici aplicate la ştiinţele militare, cercetând revistele technice militare şi lucrări apărute în intervalul 1/IX/931 la 24/VIII/932, care să trateze astfel de chestiuni, am constatat următoarele:

In acest interval au apărut:

1°. In revista *„Aeronautica"*, articolul *„Cadenţa tragerii sincronizate"* de D-l Lt. Av. R. MALINOVSCHI.

2°. In *„Revista Artileriei"* următoarele articole:

a) *„Asupra regulării direcţiei"* de D-l Lt. M. I. FOCŞĂNEANU.

b) *„Calculul lungimei bazei secţiei telemetrice tip S. O. M"* de D-l Maior M. ANASTASESCU.

c) *„Un procedeu pentru exploatarea tragerilor oricărei baterii dintr'un divizion sau grupare, de către celelalte"* de D-l Maior VLĂDESCU AUGUST.

3°. In *„Revista Geniului"*, articolul *„Problema coordonatelor în măsurători"* de D-l Căpitan EMANOIL V.

4°. In volum tipărit *„Materialul şi tragerile Artileri antiaeriene"* de D-l Căpitan DRAGODĂNESCU I. NIC.

Luând în cercetare publicaţiile de mai sus, ne-am oprit atenţia asupra articolului D-lui Maior VLĂDESCU AUGUST, care se remarcă

prin originalitate şi claritate şi asupra lucrării D-lui CĂPITAN DRAGODĂNESCU, care cuprinde:

Partea I-a. Noţiuni generale, definiţiuni.
Partea II-a. Preparaţia tragerii.
Partea III-a. Preparaţia tragerii după sunet.
Partea IV-a. Interpretarea abaterilor observate.
Partea V-a. Conducerea şi execuţia tragerei.
Partea VI-a. Execuţia tragerilor de instrucţie în poligon.

In cea mai mare parte a lucrării, având 494 pagini, autorul foloseşte noţiuni de matematici generale, în special geometrie, trigonometrie şi cinematică.

Având în vedere că lucrarea este mai dezvoltată, mai sistematică şi mai metodică în expunerea procedeelor de tir antiaerian, reprezentând astfel o adevărată necesitate pentru Artileria Antiaeriană, propunem ca *„premiul General Sc. Panaitescu"* pe anul 1931 — 1932 să fie acordat D-lui CĂPITAN DRAGODĂNESCU I. NIC. din Regimentul 2 Apărare contra Aeronavelor-Iaşi, pentru lucrarea sa: *„Materialul şi tragerile Artileriei Antiaeriene"*.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „GENERAL SC. PANAITESCU"
COLONEL LITEANU, CĂPITAN GH. NICULESCU,
ING. C. ORĂŞANU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Şedinţa din 24 August 1932.

NOTE MATEMATICE

*5. *Curiosités arithmétiques.* Les cubes des nombres suivants ont des formes remarquables:

$1001^3 = 1\ 003\ 003\ 001$
$2002^3 = 8\ 024\ 024\ 008$
$3003^3 = 27\ 081\ 081\ 027$
$4004^3 = 64\ 192\ 192\ 064$
$5005^3 = 125\ 375\ 375\ 125$
$6006^3 = 216\ 648\ 648\ 216$
$7007^3 = 344\ 030\ 029\ 343$
$8008^3 = 513\ 537\ 536\ 512$
$9009^3 = 731\ 189\ 187\ 729.$

Le premier de ces nombres est le *seul* cube *symètrique* de *dix* chiffres.

Les cubes des nombres 1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, peuvent s'écrire

$$N = a \cdot 10^9 + b \cdot 10^6 + b \cdot 10^3 + a,$$

et sont ainsi de la forme *symètrique abba*.

Ceux des nombres 7007 et 8008, sont de la forme $N = (a+1)(b+1)\,ba$.

Enfin le dernier de ces cubes, 9009^3, est de la forme $N = (a+2)(b+2)\,ba$.

V. THÉBAULT.

*6. *Sur certaines formules du triangle.*

Soient a, b, c, les côtés d'un triangle ; p le demi-périmètre ; R, r, les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

1. Toute fonction symétrique rationnelle de a, b, c, peut s'exprimer en fonction rationnelle de p, r, R, au moyen des formules

$$a + b + c = 2p, \tag{1}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) = pr^2, \tag{2}$$

$$abc = 4RS = 4Rrp. \tag{3}$$

En développant la formule (2), il vient

$$p^3 - p^2(a+b+c) + p(bc+ca+ab) - abc = pr^2,$$

d'où, en remplaçant $(a+b+c)$ par $2p$ et abc par $4Rrp$, la formule connue

$$bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr. \tag{4}$$

D'autre part, en développant l'expression

$$(p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b),$$

on trouve

$$3p^2 - p(2a+2b+2c) + bc + ca + ab = r^2 + 4Rr;$$

donc

$$(p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b) = r^2 + 4Rr. \tag{5}$$

D'ailleurs, on a aussi

$$p - a + p - b + p - c = p. \tag{6}$$

En divisant membre à membre les relations (5) et (6) par (2), on a

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{r+4R}{pr}, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)}=\frac{1}{r^2}. \qquad (8)$$

De ces deux dernières formules, on déduit

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}=\frac{(r+4R)^2-2p^2}{p^2r^2}. \qquad (9)$$

En se servant des formules (1) à (9), on arrive aisément à exprimer, comme nous l'avons énoncé, n'importe quelle fonction symétrique de a, b, c, en fonction de p, R, r.

2. Exemples. *Dans un triangle, on a les relations suivantes :*

$$1^0\ \left(\frac{a}{p-a}\right)^2+\left(\frac{b}{p-b}\right)^2+\left(\frac{c}{p-c}\right)^2=\frac{2}{r^2}(8R^2+r^2-p^2);$$

$$2^0\ bc(p-a)+ca(p-b)+ab(p-c)=p(p^2+r^2-8Rr).$$

Le premier membre de la première peut, en effet, s'écrire

$$\left(\frac{p}{p-a}-1\right)^2+\left(\frac{p}{p-b}-1\right)^2+\left(\frac{p}{p-c}-1\right)^2,$$

ou

$$p^2\left[\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p\quad c)^2}\right]-2p\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)+3$$

c'est-à-dire, en vertu de (7) et (9),

$$\frac{(r+4R)^2-2p^2}{r^2}-\frac{2(r+4R)}{r}+3,$$

soit

$$\frac{1}{r^2}(2r^2+16R^2-2p^2).$$

La seconde peut être mise sous cette forme

$$abc\left(\frac{p}{a}-1+\frac{p}{b}-1+\frac{p}{c}-1\right)=4Rrp\left(\frac{p}{a}+\frac{p}{b}+\frac{p}{c}-3\right).$$

Or, à cause de (4),

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4Rrp},$$

et, finalement,

$$\Sigma\, bc\,(p-a)=p\,(p^2+r^2-8Rr).$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

7. *Asupra problemii 274 din «Recueil de problèmes de mathématiques» par* C. A. LAISANT *(vol. II).*

Enunțul problemii este următorul: «*Dacă prin mijlocul* O *al «ipotenuzei unui triunghiu dreptunghiu ducem o transversală «oarecare, ce întâlnește catetele* AC, AB *în* β *și* γ, *avem relațiunea:*

$$\frac{b^2}{\overline{O\gamma}^2}+\frac{c^2}{\overline{O\beta}^2}=4\text{»}.$$

D-l CEZAR COȘNIȚĂ, arătând că problema este menționată «nerezolvată» în culegerea citată, dă, folosind teorema lui MENELAUS, o soluțiune exactă acestei probleme.

Socotim că este o eroare în culegerea citată, deoarece problema admite o soluțiune cu totul elementară și imediată. Ducând perpendicularele OM, ON respectiv pe AB, AC și considerând perechile de triunghiuri asemenea (OMγ, γAβ) și (ONβ, γAβ) avem relațiunile:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{O\gamma}}=\frac{\overline{A\beta}}{\overline{\beta\gamma}}\ \text{și}\ \frac{\overline{ON}}{\overline{O\beta}}=\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\beta\gamma}},$$

care în virtutea relațiunii lui PYTHAGORA:

$$\overline{\beta\gamma}^2=\overline{A\beta}^2+\overline{\gamma A}^2,$$

dă relațiunea:

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{O\gamma}^2}+\frac{\overline{ON}^2}{\overline{O\beta}^2}=+1$$

în care

$$\overline{OM}=\frac{b}{2}\ \text{și}\ \overline{ON}=\frac{c}{2}.$$

O. N. Ț.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ „REGELE CAROL II" DIN BUCUREŞTI

Examen general. 1 Iunie 1932

Ciclul I. Secţiile D şi E

MATEMATICI GENERALE

Chestiuni comune, obligatorii pentru secţia Industrială şi Silvică

Propuse de: E. ABASON

I. Se consideră funcţiunile:

$$P(x, y) \equiv \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} \quad . \quad Q(x, y) \equiv \frac{y}{(1-x)^2+y^2}$$

şi se cere să se arate că există relaţiile:

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} \equiv \frac{\partial Q}{\partial y} \quad . \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \equiv 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \equiv 0.$$

II. Să se reprezinte, în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy, curbele:

(1) $y = x^2$, (2) $x^2 + y^2 = 2$.

Fie A punctul în care axa *pozitivă* Oy, taie curba (2), iar B punctul comun curbelor (1) şi (2), şi aflat în cadranul I-iu al axelor. Se cere:

a) Să se calculeze aria OAB cuprinsă între curbele (1), (2) şi axa Oy.

b) Volumul născut prin rotirea acestei arii în jurul axei Ox.

c) Raza de curbură la curba (1) în punctul B.

III. Fie M (x, y) un punct *oarecare* de pe o curbă (C), N proiecţia lui Ox, P proiecţia pe Oy, iar T punctul în care tangenta la curbă în M întâlneşte axa Ox.

Se cere să se determine curbele (C), care se bucură de proprietatea:

$$\frac{\overline{MN}^2}{\overline{MN}^2 - \overline{MP}^2} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NT}} .$$

Chestiune obligatorie numai pentru secţia D.

IV. Se consideră funcţiunea periodică (perioada egală cu 2π), care este egală cu $\frac{\pi}{2}$, pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ şi $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ şi care are valoarea $\frac{\pi}{4}$ în tot restul intervalului de periodicitate $\left(\text{adică pentru } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$. Se cere

să se afle desvoltarea în serie FOURIER a acestei funcţii şi în particular să se afle elementele caracteristice. (Perioadă, frecvenţă, pulsaţie, amplitudine, fază) a armonicei de ordinul al 3-lea.

Secţia de Mine. 8 Iunie 1932

EXAMEN DE GEOMETRIE ANALITICĂ

Partea II-a

Toate chestiunile obligatorii

Propuse de: E. ABASON

1. Să se reprezinte curbele:

(1) $x^2 + y^2 = 1$, (2) $y^2 = x$.

Fie A punctul comun acestor curbe, situat în cadranul pozitiv al axelor, iar B, punctul unde curba (1) întâlneşte axa pozitivă Oy. Se cere:

a) Aria OAB, mărginită de curbele (1) şi (2) şi axa Oy;

b) Lungimile arcului OA de pe curba (2) şi a arcului AB de pe curba (1).

2. Tangenta la o curbă (C) într'un punct oarecare M (x, y), întâlneşte axa Ox în T; fie N şi P proiecţiile lui M pe axele Ox şi Oy.

Să se determine curbele (C) astfel ca:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{NT}} = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{OM}^2}.$$

3. Despre curbură şi torsiune la o curbă strâmbă. (Definiţie şi expresii analitice).

Examen general. 16 Iunie 1932

Secţia Constructorilor

GEOMETRIE ANALITICĂ

Propuse de: E. ABASON

Partea II-a

1. Să se reprezinte curbele definite de ecuaţiile:

(1) $x^2 + y^2 = 2$ şi (2) $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.

Să se calculeze razele de curbură la curbele (1) şi (2), în punctul lor comun, situat în unghiul pozitiv al axelor Ox, Oy.

2. Se consideră în spaţiu curba definită de ecuaţiile:

(1) $x = 3t^2 - \frac{1}{2}\alpha t$, $y = 2t^3 + \frac{1}{3}(\alpha - 1)$, $z = t + 1$

în care α este un parametru variabil şi se cere să se arate că planul osculator la această curbă, într'un punct oarecare al ei, trece necontenit printr'o dreaptă fixă din planul xOy; să se scrie ecuaţia acestei drepte.

Să se explice rezultatul.

3. Fie T punctul în care tangenta într'un punct oarecare M (x, y) al unei curbe (C) taie axa Ox; N proiecţia lui M pe axa Oy, P proiecţia lui M pe axa Ox.

Se cere să se determine curbele care au proprietatea:

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{OM}^2}.$$

Să se reprezinte una din curbele astfel determinate.

(Timpul acordat: 3 ore).

Examen general. 24 Iunie 1932

Secţia Electromecanică

GEOMETRIE ANALITICĂ

Partea II-a

Toate chestiunile obligatorii

Propuse de: E. Abason

I. Se consideră curba:

$$y = \frac{a}{2} \cdot \left(l \frac{x}{a} + l - \frac{x}{a} \right).$$

Să se determine coordonatele punctului M (x, y) de pe curbă în care raza de curbură este $R = y + 2a$.

II. Se consideră familia de curbe $\frac{x}{1-\alpha} = \frac{y}{\alpha^2+\alpha+1}$ în care α e un parametru variabil şi se cere să se afle învelitoarea.

Să se reprezinte curba învelitoare şi să se explice geometric rezultatul.

III. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice care are vârful în punctul (O, O, 1) iar drept curbă directoare:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Să se scrie ecuaţia planului tangent la această suprafaţă în punctul 3), O, O). Să se explice rezultatul.

IV. Fie T punctul în care tangenta la o curbă C într'un punct M (x, y) taie axa Ox; N proiecţia lui M pe această axă, iar P intersecţia dintre ordo-

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

nata MN şi paralela dusă din origine la tangenta MT. Să se determine curbele C astfel ca ele să se bucure de proprietatea:

$$\overline{NP} + \overline{NM} = a,$$

a fiind o lungime constantă cunoscută.

Examen general. 6 Iunie 1932

Secţia Electromecanică
(Sem. IV)

MATEMATICI APLICATE

Toate chestiunile obligatorii

Propuse de: E. ABASON

I. Se consideră funcţia scalară $U = \frac{-1}{x^2 + y^2 + z^2}$ şi se cere să se calculeze

$$\text{div. } \overline{\text{grad. U}} \qquad \text{şi} \qquad \text{rot. } \overline{\text{grad. U}}.$$

II. Să se desvolte în serie FOURIER funcţiunea periodică ($T = 2\pi$) egală cu 1 pentru $0 < x < \frac{\pi}{4}$ şi $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ şi egală cu zero pentru $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$.

Să se afle elementele caracteristice ale armonicei de ordinul al 3-lea: amplitudine, perioadă, pulsaţie, frecvenţa, fază.

III. Se consideră circuitul compus din o capacitate C şi dintr'o derivaţie compusă din selful L şi rezistenţa R; la capetele A şi B ale circuitului se aplică tensiunea $u = U \sin \omega t$.

Se cere:

a) Impedenţa imaginară a derivaţiei (L, R);

b) Impedenţa imaginară a circuitului AB;

c) Tensiunile u_1 şi u_2 corespunzătoare capacităţii şi derivaţiei (L, R);

d) Curentul total I;

e) Curenţii parţiali I_1 şi I_2.

IV. Se consideră funcţia Z de variabilă complexă $z = x + iy$

$$Z = \frac{1}{z + 1}$$

şi se cere:

a) Să se scrie sub forma $Z = P(x, y) + iQ(x, y)$ arătând că P şi Q verifică condiţiile de analiticitate ale lui CAUCHY.

b) In ipoteza că z descrie în planul z, cercul:

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1$$

se cere să se determine curba descrisă de punctul:

$$Z = u + iv$$

în planul (u, v). In ce se transformă pe planul Z axele Ox şi Oy din planul z. Se conservă unghiurile în această transformare?

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul XXXVIII. No. 7. Iulie 1932. New-York. CARTAN despre geometria proiectivă complexă, de A. EMCH. Noui table matematice, de W. R. LONGLEY. DICKSON despre teoria numerelor, de J. V. USPENSKY. Extrase din memorii.

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul XXXVIII. No. 8. August 1932. New-York. Sumarea seriilor lui FOURRIER, de E. HILLE. Notă asupra legii reciprocității bicuadratice, de V. W. ADKISSON. Asupra unei serii de puncte în plan conexate în mod special, de R. L. WILDER. Unele transformări involutorii de linii interpretate ca puncte din V_2 din S_5, de J. M. CLARKSON. Notă asupra unei teoreme datorită lui BROMWICH, de H. L. GARABEDIAN. O teoremă asupra determinanților simetrici, de W. V. PARKER. Partiţiuni cuadratice, de E. T. BELL. Transformarea liniilor spaţiului prin două cuadratice regule, de A. R. WILLIAMS. Asupra desvoltărilor trigonometrice a unor funcţiuni dublu periodic de al doilea tip, de M. A. BASOCO. Partiţiuni cuadratice, de E. T. BELL. O expansiune logică în matematici, de H. WHITNEY. Asupra unghiurilor în un anumit spaciu metric, de W. A. WILSON. Relaţiuni între teoria deducţii a lui WHITEHEAD şi RUSSELL şi logica propoziţiilor boleane, de B. A. BERNSTEIN. Asupra ecuaţiilor algebrice având numai rădăcini reale, de W. E. ROTH.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIV. Fascicola I. Iulie 1932. Buenos Aires.

Boletin Matematico. Anul V. No. 6. August 1932. Buenos Aires. Integrarea prin părţi a unei integrale multiple, de S. SELTZER.

Boletin Matematico Elemental. Anul III. No. 6. August 1932. Buenos Aires. Sume, resturi şi înmulţiri de numere simultanee, de B. I. B.

Revista matematică din Timişoara. Anul XII. No. 7. Timişoara 15 Septemvrie 1932. Sphères remarquables du tétrèdre, par V. THÉBAULT. Generalizarea unei probleme a lui NEWTON, de D. V. IONESCU.

CERERI

222. Pentru a-mi complecta Colecţiunea *Gazetei Matematice* îmi sunt necesare numerele 2, 10, 11 şi 12 din Anul XI; 2 şi 10 din Anul XIII; 3 din Anul XIV; 1, 2, 3 din Anul XV; 5, 10, 11, 12 din Anul XVIII; 1, 2, 12 din Anul XXXIII. Cine mi le poate procura şi în ce condiţiuni?

Totdeodată anunţ celor ce au nevoie că am disponibile numerele 1, 5, 6, 7, 8, 10 din Anul XIV; 11 din Anul XVI; 3 din Anul XVII şi 2 din Anul XXI şi că le pot ceda celor ce-mi vor comunica adresa.

HARALAMB P. IONESCU-BISS
Student-matematici
Bulevardul Carol 59. Bucureşti

DIVERSE

La Congresul matematicianilor ţinut la Zürich la începutul lunei Septemvrie au participat următorii români: I. Chiţulescu cu D-na, Miron Niculescu cu D-na, Gh. Popescu cu D-na, R. Racliş, P. Sergescu cu D-na, G. Sudan, Gh. Ţiţeica cu D-na şi D-ra.

Românii au făcut următoarele comunicări:

Miron Niculescu: Extension du théorème de Liouville-Picard aux intégrales de l'équation du Fourrier.

R. Racliş. Sur la série de Taylor généralisée.

P. Sergescu. Quelques points de la théorie des équations algébriques.

G. Ţiţeica. Sur les courbes quadratiques.

G. Vrânceanu. Sur le principe d'Hamilton appliqué aux systèmes non holonomes.

D-l Gh. Ţiţeica a fost ales preşedinte al uneia din secţiunile Congresului.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2414 [1]). *Să se stabilească identitatea:*

$$16\left(6\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1}-5\sum_{p=1}^{n}\sin^3\frac{2p\pi}{2n+1}\right)=$$

$$3\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n+1}-5\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1}.$$

Gh. Dumitrescu.

Soluţie dată de D-l Const. C. Popovici (Lic. internat Iaşi): Dacă în formulele:

$$2^{m-1}\sin^m a=\sin ma-C_m^1\sin(m-2)a+C_m^2\sin(m-4)a-\ldots+C_m^{\frac{m-1}{2}}\sin a,$$

în care $m=\mathcal{M}4+1$ şi

$$2^{m-1}\sin^m a=-\sin ma+C_m^1\sin(m-2)a-C_m^2\sin(m-4)a+\ldots+C_m^{\frac{m-1}{2}}\sin a,$$

unde $m=\mathcal{M}4+3$, facem respectiv:

---

1) Enunţ rectificat: în loc de $3\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1}$, cum era în G. M. anul XXI, se scrie $6\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1}$.

$m = 5\ ,\ a = \frac{2p\pi}{2n+1}$; $m = 3\ ,\ a = \frac{2p\pi}{2n+1}$, obținem:

$$16\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1} = \sin\frac{10p\pi}{2n+1} - 5\sin\frac{6p\pi}{2n+1} + 10\sin\frac{2p\pi}{2n+1}$$

$$-16\sin^3\frac{2p\pi}{2n+1} = \sin\frac{6p\pi}{2n+1} - 3\sin\frac{2p\pi}{2n+1}\ .$$

Înmulțind-o pe prima egalitate cu 6 și adunând-o cu a doua înmulțită cu 20, avem:

$$16\left(6\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1} - 5\sin^3\frac{2p\pi}{2n+1}\right) = 6\sin\frac{10p\pi}{2n+1} - 10\sin\frac{6p\pi}{2n+1}$$

Sau, trecând la sumă:

$$(1)\quad 16\left(6\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1} - 5\sum_{p=1}^{n}\sin^3\frac{2p\pi}{2n+1}\right) = 6\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{10p\pi}{2n+1} - 10\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{6p\pi}{2n+1}\ .$$

In formula:

$$\sum_{p=1}^{n}\sin pa = \frac{\sin\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\ .$$

Să facem:

$$a = \frac{10p\pi}{2n+1}\ .$$

Obținem:

$$\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{10p\pi}{2n+1} = \frac{\sin\frac{5(n+1)\pi}{2n+1}\sin\frac{5n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{5\pi}{2n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{5\pi}{2n+1} - \cos\frac{5(2n+1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{5\pi}{2n+1}}\ .\ .$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{10p\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{5\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}\frac{5\pi}{2n+1}\right).$$

Identitatea: $\cot a + \operatorname{cosec} a = \cot\frac{a}{2}$ ne permite să scriem:

$$(2)\quad \sum_{p=1}^{n} \sin \frac{10p\pi}{2n+1} = \frac{1}{2} \cot \frac{5\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n+1}.$$

La fel găsim:

$$(3)\quad \sum_{p=1}^{n} \sin \frac{6p\pi}{2n+1} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n+1}.$$

Ţinând socoteală de relaţiile (2), (3), egalitatea (1) se poate scrie:

$$16\left(6 \sum_{p=1}^{n} \sin^5 \frac{2p\pi}{2n+1} - 5 \sum_{p=1}^{n} \sin^3 \frac{2p\pi}{2n+1}\right) = 3\operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n+1} - 5\operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n+1},$$

ceeace reprezintă tocmai identitatea propusă.

Observarea I. Folosindu-se de formulele:

$$2^{m-1}\cos^m a = \cos ma + C_m^1 \cos(m-2)a + \ldots + C_m^{\frac{n-1}{2}} \cos a \quad (m \text{ impar}),$$

$$\sum_{p=1}^{n} \cos pa = \frac{\cos \frac{(n+1)a}{2} \sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}},$$

D-l Const. C. Popovici stabileşte şi identitatea:

$$16\left(6 \sum_{p=1}^{n} \cos^5 \frac{2p\pi}{2n+1} - 5 \sum_{p=1}^{n} \cos^3 \frac{2p\pi}{2n+1}\right) = -8,$$

sau:

$$1 + 12 \sum_{p=1}^{n} \cos^5 \frac{2p\pi}{2n+1} = 10 \sum_{p=1}^{n} \cos^3 \frac{2p\pi}{2n+1}.$$

Observarea II. D-l Ioan B. Florescu, care a observat că enunţul problemei 2414 era greşit, a rectificat, propunând să se demonstreze identitatea:

$$16\left(6 \sum_{p=1}^{n} \sin^5 \frac{p\pi}{2n+1} - 5 \sum_{p=1}^{n} \sin^3 \frac{p\pi}{2n+1}\right) = 3\operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n+1} - 5\operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n+1}.$$

Precum se vede, D-sa s'a depărtat, prin rectificare, mai mult de forma identității date, deoarece a schimbat pe lângă coeficientul sumei dintâi și argumentul.

Identitatea a fost demonstrată de D-sa foarte bine, urmând o cale asemănătoare cu aceia întrebuințată de D-l Popovici.

Observarea III. Din identitatea din enunț și cea demonstrată de D-l Florescu, rezultă că avem:

$$(4)\quad 6\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1}-5\sum_{p=1}^{n}\sin^3\frac{2p\pi}{2n+1}=6\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{p\pi}{2n+1}-5\sum_{p=1}^{n}\sin^3\frac{p\pi}{2n+1},$$

prin urmare înjumătățind argumentul expresiei din membrul întâi, valoarea ei nu se schimbă.

In adevăr, calculul arată că:

$$(5)\quad\begin{cases}6\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{2p\pi}{2n+1}-5\sum_{p=1}^{n}\sin^3\frac{2p\pi}{2n+1}\\ \qquad=\frac{6}{16}\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{10p\pi}{2n+1}-\frac{10}{16}\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{6p\pi}{2n+1},\\ 6\sum_{p=1}^{n}\sin^5\frac{p\pi}{2n+1}-5\sum_{p=1}^{n}\sin^3\frac{p\pi}{2n+1}\\ \qquad=\frac{6}{16}\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{5p\pi}{2n+1}-\frac{10}{16}\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{3p\pi}{2n+1}.\end{cases}$$

Deasemenea se găsesc egalitățile:

$$(6)\quad\begin{cases}\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{10p\pi}{2n+1}=\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{5p\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n+1}\\ \sum_{p=1}^{n}\sin\frac{6p\pi}{2n+1}=\sum_{p=1}^{n}\sin\frac{3p\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1}.\end{cases}$$

Din relațiile (5) și (6) rezultă numaidecât (4), astfel că egalitățile de mai sus ne permit să ne dăm mai bine seamă de existența identității (4).

G. I. D.

PROBLEMA 2443. *Să se simplifice fracţia*

$$\frac{(x+y)^{18}-(x+y)^{13}(x^5+y^5)-(x+y)^5(x^{13}+y^{13})+x^{18}y^{18}(x^{-18}+y^{-18})+x^{13}y^5+x^5y^{13}}{(x+y)^{18}-(x+y)^{11}(x^7+y^7)-(x+y)^7(x^{11}+y^{11})+x^{18}y^{18}(x^{-18}+y^{-18})+x^{11}y^7+x^7y^{11}}$$

V. BĂDULESCU.

Numărătorul fracţiei date se mai poate scrie succesiv

$$\begin{aligned}M &= (x+y)^{13}[(x+y)^5-x^5-y^5]-(x+y)^5(x^{13}+y^{13})+x^{13}(x^5+y^5)+y^{13}(x^5+y^5)\\ &= (x+y)^{13}[(x+y)^5-x^5-y^5]-(x+y)^5(x^{13}+y^{13})+(x^5+y^5)(x^{13}+y^{13})\\ &= (x+y)^{13}[(x+y)^5-x^5-y^5]-(x^{13}+y^{13})[(x+y)^5-x^5-y^5]\\ &= [(x+y)^5-x^5-y^5][(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}]\end{aligned}$$

analog găsim că şi numitorul se poate scrie

$$N = [(x+y)^7-x^7-y^7][(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}]$$

deci

$$\frac{M}{N} = \frac{[(x+y)^5-x^5-y^5][(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}]}{[(x+y)^7-x^7-y^7][(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}]}.$$

Observăm că parantezele mari se anulează pentru $x=0, y=0$ sau $x=-y$, deci fiecare conţine ca factor produsul $xy(x+y)$; simplificând cu acest produs, de două ori rămâne

$$\frac{M}{N} = \frac{13}{11}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{(x^2+xy+y^2)}{(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)}$$

$$\frac{(x^{10}+5x^9y+17x^8y^2+38x^7y^3+61x^6y^4+71x^5y^5+61x^4y^6+38x^3y^7+17x^2y^8+5xy^9+y^{10})}{(x^8+4x^7y+11x^6y^2+19x^5y^3+23x^4y^4+19x^3y^5+11x^2y^6+4xy^7+y^8)}.$$

Pentru a găsi factori comuni numărătorului şi numitorului, vom aplica principiul că „dacă o expresie divide alte două, atunci divide şi suma sau diferenţa lor". Observăm mai întâiu că

$$x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4 = (x^2+xy+y^2)^2$$

astfel că prin simplificare rămâne un singur factor (x^2+xy+y^2)

la numitor. Observăm acum că numărătorul se divide exact cu acest factor, astfel că făcând simplificarea ne rămâne

$$\frac{M}{N} = \frac{65}{77} \cdot \frac{x^8+4x^7y+12x^6y^2+22x^5y^3+27x^4y^4+22x^3y^5+12x^2y^6+4xy^7+y^8}{x^8+4x^7y+11x^6y^2+19x^5y^3+23x^4y^4+19x^3y^5+11x^2y^6+4xy^7+y^8}.$$

Să aplicăm acum principiul de mai sus: diferența între numărător și numitor se mai poate scrie

$$D = x^2y^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)$$

găsim că ambii termeni se divid cu (x^2+xy+y^2). Simplificând, găsim

$$\frac{M}{N} = \frac{65}{77} \cdot \frac{x^6+3x^5y+8x^4y^2+11x^3y^3+8x^2y^4+3xy^5+y^6}{x^6+3x^5y+7x^4y^2+9x^3y^3+7x^2y^4+3xy^5+y^6}$$

care este rezultatul final.

Notă. A găsit acest rezultat D-l V. Vasu. D. M. Margulius a trecut pe lângă acest rezultat, căci folosind niște identități greșite sau greșit reproduse din „Leçons d'Algèbre élém." par C. Bourlet a scos rezultatul

$$\frac{65}{77}$$

care nu este exact, ceeace se poate vedea dela început, căci dacă fracția ar avea o valoare independentă de x și y, această valoare s'ar putea obține făcând $x = y$, căci ambii termeni sunt omogeni și de acelaș grad în x și y; făcând această operație găsim cu totul altă valoare.

O simplificare notabilă a operațiilor am fi obținut făcând $y = tx$.

O generalizare a acestui exercițiu s'ar obține înlocuind exponenții 13, 5, 11, 7 prin m, n, p, r astfel ca $m+n = p+r$. Ar fi interesant de găsit în acest caz cari sunt fracțiile independente de x și y. O altă problemă interesantă ar fi de văzut dacă expresiile

$$(x+y)^m - x^m - y^m \qquad (x+y)^n - x^n - y^n \qquad m > n$$

sunt divizibile una prin alta sau în orice caz, în ce condițiuni admit un divizor comun de grad cât mai apropiat celui al expresiei a doua.

Cele două expresiuni, la cari am ajuns prin simplificare se pot scrie respectiv

$$E_1 = (x^2+xy+y^2)^3 + 2x^2y^2(x+y)^2$$
$$E_2 = (x^2+xy+y^2)^3 + x^2y^2(x+y)^2.$$

M. G.

*PROBLEMA 3694. *Par un point* K *intérieur à un parallélogramme* ABCD *on trace les paralèles aux côtés qui rencontrent* AB *et* CD *en* E *et* G, DA *et* BC *en* H *et* F. *Montrer que:*

1°. *Les droites* (AK, DF, BG) *concourent en un point* φ_1; (BK, AG, CH) *en* φ_2; (CK, BH, DE) *en* φ_3; (DK, CE, AF) *en* φ_4; (EF, HG, AC) *en* φ_5; (GF, HE, BD) *en* φ_6.

2°. *Les points* φ_1 , φ_3 , φ_5 *sont collinéaires. Il en est de même de* φ_2 , φ_4 , φ_6.

3°. *Lieu de* φ_1 *lorsque* ABCD *est un parallélogramme variable autour des points* E, C, H *supposés fixés* [a]).

V. THÉBAULT.

Să arătăm în primul rând că dreptele (AK, DF, BG) se întâlnesc în acelaş punct φ_1.

Fie pentru aceasta φ'_1 punctul unde DF întâlneşte pe AK şi tot astfel φ''_1 punctul unde BG întâlneşte pe AK. Considerând triunghiurile AEK şi AHK tăiate respectiv de transversalele Bφ''_1G şi Dφ'_1F, avem după teorema lui MENELAUS, (ţinând seamă de sensul segmentelor) relaţiunile:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{\varphi''_1A}}{\overline{\varphi''_1K}} \cdot \frac{\overline{GK}}{\overline{GE}} = +1 \ (1); \quad \frac{\overline{DH}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{\varphi'_1A}}{\overline{\varphi'_1K}} \cdot \frac{\overline{FK}}{\overline{FH}} = +1 \ (2),$$

din care rezultă, în virtutea egalităţii laturilor opuse în paralelograme

$$\frac{\overline{\varphi'_1K}}{\overline{\varphi'_1A}} = \frac{\overline{DH} \cdot \overline{FK}}{\overline{DA} \cdot \overline{FH}} = \frac{\overline{GK} \cdot \overline{BE}}{\overline{GE} \cdot \overline{BA}} = \frac{\overline{\varphi''_1K}}{\overline{\varphi''_1A}} \cdot \qquad (3)$$

Punctele φ'_1 şi φ''_1 împărţind segmentul $\overline{AK}$ în acelaş raport, se confundă în acelaş punct φ_1, pentru care avem după relaţiunile (3), următoarea importantă relaţiune:

$$\frac{\overline{\varphi_1K}}{\overline{\varphi_1A}} = \frac{\overline{KG} \cdot \overline{KF}}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}} = \frac{S_C}{S}, \qquad (4)$$

însemnând cu S_C aria paralelogramului cu diagonala $\overline{CK}$, iar cu S aria paralelogramului dat ABCD.

---

[a]) Pentru a uşura redijarea soluţiunii s'au schimbat notaţiunile G, F, H, E din enunţul primitiv în E, F, G, H.

Făcând permutări circulare asupra grupelor de litere (A, B, C, D) şi (E, F, G, H), simultan, în demonstraţiunea de mai sus obţinem succesiv relaţiunile care arată că grupele de drepte (BK, AG, CH), (CK, BH, DE) şi (DK, CE, AF) sunt concurente respectiv în punctele φ_2, φ_3, φ_4 pentru care avem:

$$\frac{\overline{\varphi_2 K}}{\overline{\varphi_2 B}} = \frac{S_D}{S}; \quad \frac{\overline{\varphi_3 K}}{\overline{\varphi_3 C}} = \frac{S_A}{S}; \quad \frac{\overline{\varphi_4 K}}{\overline{\varphi_4 D}} = \frac{S_B}{S}, \tag{5}$$

în care S_A, S_B, S_D înseamnă ariile paralelogramelor având respectiv diagonalele AK, BK, DK.

2°. Considerând acum triunghiurile ACB, ACD, ACK tăiate respectiv de transversalele EFφ'_5, HGφ''_5, $\varphi_1\varphi_3\varphi'''_5$, avem relaţiunile:

$$\frac{\overline{\varphi'_5 C}}{\overline{\varphi'_5 A}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = +1; \quad \frac{\overline{\varphi''_5 C}}{\overline{\varphi''_5 A}} \cdot \frac{\overline{GD}}{\overline{GC}} \cdot \frac{\overline{HA}}{\overline{HD}} = +1$$

$$\frac{\overline{\varphi'''_5 C}}{\overline{\varphi'''_5 A}} \cdot \frac{\overline{\varphi_1 A}}{\overline{\varphi_1 K}} \cdot \frac{\overline{\varphi_3 K}}{\overline{\varphi_3 C}} = +1 \tag{6}$$

din care deducem următoarele:

$$\frac{\overline{\varphi'_5 A}}{\overline{\varphi'_5 C}} = \frac{\overline{FB} \cdot \overline{EA}}{\overline{FC} \cdot \overline{EB}} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{AE}}{\overline{CF} \cdot \overline{CG}} = \frac{S_A}{S_C}; \tag{7}$$

$$\frac{\overline{\varphi''_5 A}}{\overline{\varphi''_5 C}} = \frac{\overline{GD} \cdot \overline{HA}}{\overline{GC} \cdot \overline{HD}} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AH}}{\overline{CG} \cdot \overline{CF}} = \frac{S_A}{S_C}; \tag{8}$$

$$\frac{\overline{\varphi'''_5 A}}{\overline{\varphi'''_5 C}} = \frac{\overline{\varphi_1 A} \cdot \overline{\varphi_3 K}}{\overline{\varphi_1 K} \cdot \overline{\varphi_3 C}} = \frac{S}{S_C} \cdot \frac{S_A}{S} = \frac{S_A}{S_C}, \tag{9}$$

deci cele trei puncte φ'_5, φ''_5, φ'''_5 împart segmentul $\overline{AC}$ în acelaş raport, deci se confundă în acelaş punct φ_5, astfel ca:

$$\frac{\overline{\varphi_5 A}}{\overline{\varphi_5 C}} = \frac{S_A}{S_C}. \tag{10}$$

Aşa dar, dreptele AC, EF, HG sunt concurente în acelaş punct φ_5, care aparţine dreptei $\varphi_1\varphi_3$.

Făcând permutările circulare menţionate asupra grupelor de litere de o parte şi asupra indicilor de altă parte, obţinem relaţiunile care arată că dreptele (BD, EH, FG) trec prin acelaş punct φ_6, care aparţine dreptei $\varphi_2\varphi_4$ şi pentru care avem:

$$\frac{\overline{\varphi_6 B}}{\overline{\varphi_6 D}} = \frac{S_B}{S_D}. \tag{11}$$

Observare. Cum a observat şi cei doi rezolvitori ai problemii, pentru a preciza locul punctului φ_1, este necesar să precizăm cum variază paralelogramul în jurul punctelor fixe E, C, H. Vom presupune anume că paralelogramul variază în jurul punctelor fixe păstrându-şi *unghiurile constante.* Fie O şi I mijloacele segmentelor $\overline{EC}$ şi $\overline{HC}$, respectiv. Vom lua ca axă a absciselor dreapta OI şi o perpendiculară ca Oy, ca axă a ordonatelor. Fie $I(a, o)$, $C(m, n)$. Avem imediat pentru E, simetricul lui C în raport cu origina, $E(-m, -n)$. Dreptele BG şi DF, care determină pe φ_1, sunt identice respectiv cu OG şi ID. Să scriem ecuaţiunile punctelor G şi D, pentru o poziţiune oarecare a paralelogramului ABCD. Fie λ coeficientul unghiular al dreptelor paralele EG şi HD, iar μ acela al dreptei CD. Cu aceste notaţiuni avem ecuaţiunile:

$$y + n = \lambda (x + m) \text{ (EG)};$$

$$y + n = \lambda (x + m - 2a) \text{ (HD) şi } y - n = \mu (x - m) \text{ } (\overline{CGD}).$$

Când însă, presupunem că cele două direcţiuni HD şi CD fac între ele un unghiu constant, avem între parametrii λ şi μ, relaţiunea:

$$\frac{\lambda - \mu}{1 + \lambda\mu} = \frac{1}{\beta}$$

β fiind o *constantă finită.*

Dreapta OG, trecând prin intersecţiunea dreptelor CG şi EC este dreapta fascicolului

$$[y + n - \lambda (x + m)] + k [y - n - \mu (x - m)] = 0,$$

care trece prin origină, adică

$$\text{(OG) } (n - m\mu) [y + n - \lambda (x + m)] + (n - \lambda m) [y - n - \mu (x - m)] = 0.$$

Asemenea, dreapta ID trecând prin intersecţiunea dreptelor $\overline{CD}$ şi $\overline{HD}$, este dreapta fascicolului:

$$[y + n - \lambda (x + m - 2a)] + k' [y - n - \mu (x - m) [= 0$$

care trece prin punctul $I(a, o)$, adică

$$[n - \mu(m - a)] [y + n - \lambda (x + m - 2a)] + [n - \lambda (m - a)] [y - n - \mu (x - m) = 0 \text{ (ID)}$$

Aşa dar, ecuaţiunile punctului φ_1, sunt:

$$(\varphi_1) \begin{cases} +2ny - (\lambda + \mu)(nx + my) + 2\lambda\mu mx = 0 \\ +2ny - (\lambda + \mu)[nx + (m - a)y - an] + 2\lambda\mu (m - a)(x - a) = 0 \end{cases}$$

Eliminând între ecuaţiunile (φ_1) şi relaţiunea (12) pe λ şi μ obţinem ecuaţiunea locului lui φ_1.

II. Dacă paralelogramul este variabil în jurul punctelor fixe E, C, H direcţiunile laturilor sale rămânând simetrice în raport cu dreapta OI, tot timpul, avem că $\lambda + \mu = 0$, iar ecuaţiunea locului se obţine eliminând pe $2\lambda\mu$ între ecuaţiunile (φ_1), anume:

$$y (x + m - a) = 0,$$

adică locul e compus din două drepte, *axa* OI şi perpendiculara la mijlocul lui $\overline{EH}$.

III. Dacă punem condiţiunea ca paralelogramul din enunţ să fie *un dreptunghiu variabil în jurul punctelor fixe* E, C, H, *locul punctului* φ_1 *este cercul celor nouă puncte ale triunghiului fix* ECH. Având $\lambda\mu + 1 = 0$ şi introducând în ecuaţiile lui φ_1 şi în urmă eliminând pe $\lambda + \mu$ între ecuaţiunile rezultate obţinem :

$$n(x^2 + y^2) - anx + (n^2 + m^2 - am)y = 0 \quad (\varphi_1).$$

Se vede că locul este un cerc, apoi că acest cerc trece prin punctele O (*o, o*) , I (*a, o*) , M (*a — m, — n*) mijloacele laturilor triunghiului fix ECH, ceeace justifică enunţarea de mai sus.

In acest caz din urmă, putem găsi locul cu ajutorul geometriei elementare. In primul rând, observăm că în două poziţiuni particulare φ_1 coincide odată cu punctul O şi a doua oară cu punctul I. Dreapta OI este fixă, iar cercul de diametru CH determină pe OI punctul D, pentru care poziţiune a dreptunghiului φ_1 coincide cu O. In acelaş fel se determină poziţiunea pentru care φ_1 coincide cu I. Acum considerând o poziţiune oarecare a lui φ_1, observăm pe de o parte că laturile unghiului $\sphericalangle O\varphi_1 I$ trec prin două puncte fixe. De altă parte, *dacă printr'un punct din planul unui dreptunghiu ducem paralele cu laturile lui, unghiul a două diagonale adiacente din două dreptunghiuri, astfel formate, este egal cu unghiul celorlalte două diagonale.*

Aplicând această proprietate în cazul nostru, unghiul $O\varphi_1 I$ ($B\varphi_1 D$) este egal cu $\sphericalangle$ ECH sau cu suplimentul lui, deci vârful unghiului constant $O\varphi_1 I$ descrie un cerc care trece şi prin mijlocul M al lui $\overline{EH}$, deoarece $\sphericalangle$ OMI = $\sphericalangle$ ECH.

Aşa dar, *locul lui* φ_1, fiind cercul care trece prin mijloacele triunghiului ECH, *este cercul celor nouă puncte al acestui triungiu fix.*

Observare. Condiţiunea restrictivă, ca punctul K *să fie interior paralelogramului* ABCD, *nu este necesară, proprietăţile având loc şi pentru cazul când* K *este exterior paralelogramului.* Studiind cazurile de figură distincte ce se pot prezenta, observăm că proprietăţile (1°) din enunţ sunt diversele forme ale uneia dintre ele, anume că diagonala AC şi dreptele EF şi HG, ce se obţin unind punctele de aceiaş parte a diagonalei AC, puncte determinate pe laturile paralelogramului de două paralele respectiv la direcţiile acestor laturi. Această proprietate este un exemplu interesant de generalizare. Se observă într'adevăr că dacă K este luat chiar punctul de întâlnire al diagonalelor, dreptele EF şi HG sunt paralele cu AC ; asemenea EH şi FG sunt paralele cu BD ; dreptele AK, BG, DF sunt concurente fiind medianele triunghiului BCD, etc. Dacă mai general luăm punctul K pe diagonala AC într'un punct oarecare, dreptele EH şi FG sunt paralele cu diagonala BD; grupele

dreptelor (CK, BG, DF) și (AC, EF, HG) sunt concurente, după proprietatea (Caz particular al teoremii lui Ceva) următoare: *In orice trapez dreapta, care unește punctul de intâlnire al diagonalelor cu acel al laturilor neparalele, trece prin mijloacele celor două baze.* Se observă apoi că proprietățile subzistă chiar dacă punctul K nu este pe una din diagonalele paralelogramului.

Au dat foarte bune soluțiuni D-nii: Eugen I. Dumitrescu (Buzău) și Ion C. Vasiliu (Șc. Pol. București).

D-l E. Dumitrescu a observat că proprietățile subzistă și pentru K exterior paralelogramului.

O. N. Ț.

PROBLEMA 3929. *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2-1}=\frac{\pi}{4}.$$

Ioan V. Măties.

Ținând seama de identitatea

$$\operatorname{arc\,tg}a+\operatorname{arc\,tg}b=\operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{1-ab}$$

ecuația problemei se poate scrie sub forma:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-1}}{1-\frac{1}{x(x^2-1)}}=\frac{\pi}{4}$$

sau scriind că tangentele arcelor egale, din cele două părți, sunt egale

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2-1)-1}=1$$

sau

$$x^3-x^2-2x=0$$

ecuația ce admite rădăcinile

$$x_1=0\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=2.$$

Au rezolvat problema D-ra: ELEONORA ANTONIU şi D-nii: N. N. ALDEA, AUREL EM. BĂDESCU, IOAN C. BOIAN, MARIUS M. CIOC, CONSTANTINESCU-BUZĂU, ION N. CRAIU, IOAN CURCHI, VLADIMIR I. CRIVĂŢ, IULIU DEAC, ROMEO N. DUMITRAŞCU, PETRE I. GHIŞOIU, AUREL I. GROSSU, VICTOR I. IONESCU, HARALAMB IONESCU-BISS, CONST. GH. LUPESCU, FAŢE MĂRGĂRIT, MARIUS MARGULIUS, EMILIAN MEREUŢĂ, NIC. N. MIHĂILEANU, MIRCEA D. MOTOC, MIRCEA LEONTE A. NEGREA, I. PAREPEANU, IOAN G. POPA, CORNELIU N. POPESCU, I. C. SAVIN, S-LT. AURELIAN I. STAN, MIHAIL VELEA şi NICOLAE N. VELICESCU.

---

*PROBLEMA 4014. *Porţiunile din înălţimi cuprinse între ortocentru şi laturi fiind* h'_a, h'_b, h'_c, *celelalte notaţiuni fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare, să se arate că avem:*

$$S = \sqrt{\frac{R}{2}(h'_a h_b h_c + h'_b h_c h_a + h'_c h_a h_b)}.$$

NIC. DONCIU.

Soluţiune dată de D-nii: S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU, GEORGE ST. ROŞCA, NIC. VELICESCU.

H fiind punctul de întâlnire al înălţimilor (ortocentrul) triunghiului ABC, avem

$$(1) \qquad S = \text{supr. } AHB + \text{supr. } BHC + \text{supr. } CHA$$
$$= \tfrac{1}{2}(ah'_a + bh'_b + ch'_c).$$

De altă parte, avem relaţiunile

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c = \frac{abc}{2R}, \qquad (2)$$

din care deducem:

$$a = \frac{2S}{h_a}, \; b = \frac{2S}{h_b}, \; c = \frac{2S}{h_c}; \qquad (3)$$

aşa că relaţiunea (1) devine:

$$S = \frac{S}{h_a h_b h_c} \Sigma h'_a h_b h_c. \qquad (4)$$

Insă tot din (2) mai deducem:

$$h_a h_b h_c = \left(\frac{abc}{2R}\right)^2 \frac{1}{2R} = \frac{2S^2}{R} \qquad (5)$$

şi ca urmare relaţiunea (4) devine:

$$S^2 = \frac{R}{2} \Sigma h'_a h_b h_c$$

care este relaţiunea cerută.

Alte soluţiuni au fost date de D-nii: MIRCEA LEONTE A. NEGREA, NICOLAE N. MIHĂILEANU, S.-LT. CONST. D. IONESCU-ŢIU, N. N. ALDEA, I. C. PARAPEANU, HARALAMB P. IONESCU-BISS, S.-LT. THEODOR N. PANAITE, S.-LT. AURELIAN I. STAN (Cluj), ŞTEFAN E. OLTEANU (Blaj), MARIUS MARGULIUS, VLADIMIR CRIVĂŢ, IOAN D. CÂRSTOIU, I. V. COJOCARU, CONSTANTIN D. RUSU, NICOLAE D. ZANE.

Observare. D-l M. POPESCU-STĂNEŞTI s'a mulţumit să verifice că relaţiunea este adevărată.

O. N. Ţ.

---

*PROBLEMA 4027. *Să se rezolve sistemul*

$$(x+y)^7 - (x^7 + y^7) = 75 \cdot 810$$

$$x^2 + xy + y^2 = 19.$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţiune dată de D-nii: IULIU DEAC, IOAN CURCHI (Chişinău), HARALAMB P. IONESCU-BISS, N. N. MIHĂILEANU, ŞTEFAN I. OLTEANU, I. COJOCARU, N. N. ALDEA, ION C. ŞOVA-GRIGORENI, IOAN C. SAVIN, ROMEO N. DUMITRAŞCU, GEORGE ST. ROŞCA, M. POPESCU-STĂNEŞTI, N. PATRAULEA, PETRE M. VARLAM, MARIUS MARGULIUS, CONST. D. RUSSU (Constanţa), MIRCEA-LEONTE A. NEGREA.

Insemnând prima parte a primei ecuaţiuni cu E şi aplicând formula binomului avem succesiv:

$$\begin{aligned} E &= 7xy[x^5+y^5+3xy(x^3+y^3)+5x^2y^2(x+y)] \\ &= 7xy(x+y)[x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4] \\ &= 7xy(x+y)[(x^2+y^2)^2+x^2y^2+2xy(x^2+y^2)] \\ &= 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2. \end{aligned}$$

Sistemul dat devine:

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2 = 10\cdot 830 \\ x^2+y^2+xy = 19 \end{array}\right.$$

şi este echivalent cu următorul:

$$(3)\quad \left|\begin{array}{ll} x+y=u & u^2-v=19 \\ xy=v & u.v(u^2-v)^2=10\cdot 830, \end{array}\right.$$

echivalent la rândul său cu sistemul:

$$(4)\quad |\ x+y=u\,,\ xy=v\,,\ u^2-v=t\,,\ uv=z\,,\ t=19\,,\ t^2z=10\cdot 830.$$

Ultimile două ecuaţiuni ale sistemului (4) dau imediat $t=19$, $z=30$, aşa că sistemul (4) devine:

$$(5)\quad |\ x+y=u\,,\ xy=v\,,\ u^2-v=19\,,\ uv=30.$$

sau încă

$$(6)\quad |\ x+y=u\,,\ xy=v\,,\ v=u^2-19\,,\ u^3-19u-30=0.$$

Ultima ecuaţiune a sistemului (6) are trei rădăcini întregi:

$u_1=-2, u_2=-3, u_3=+5$, deci $v_1=-15, v_2=-10, v_3=+6$.

Aşa dar sistemul dat se desface în următoarele trei sisteme:

$$(7)\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-15 \end{cases};\quad (8)\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-10 \end{cases}\text{ şi }(9)\begin{cases} x+y=+5 \\ xy=+6 \end{cases}$$

care dau cele şase sisteme de soluţiuni:

$$(7')\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}\quad (7'')\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases};\quad (8')\begin{cases} x=+2 \\ y=-5 \end{cases};$$

$$(8'')\begin{cases} x=-5 \\ y=+2 \end{cases};\quad (9')\begin{cases} x=+3 \\ x=+2 \end{cases};\quad (9'')\begin{cases} x=+2 \\ y=+3 \end{cases}$$

rezolvând pentru fiecare sistem de ecuaţiuni, în parte ecuaţiunea:

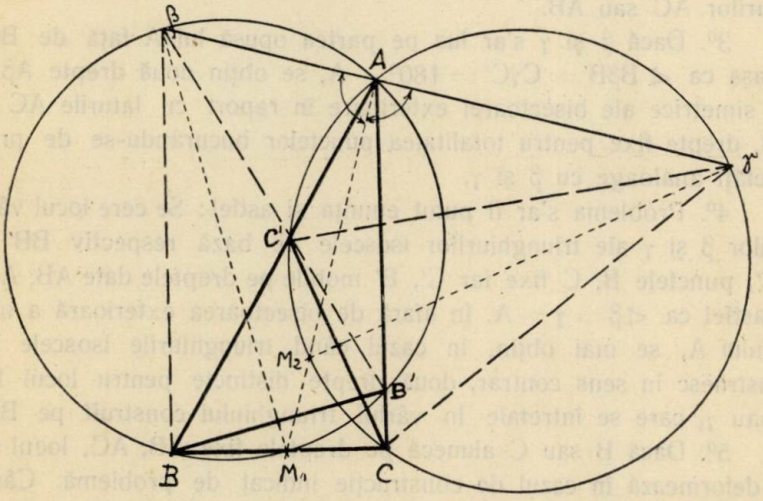
$$S^2-u_iS+v_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4115. *Se consideră triunghiul* ABC *şi punctele* B′ *pe* AC, C′ *pe* AB *între* A *şi* C, A *şi* B. *Pe* BB′ *şi* CC′ *ca baze se construesc triunghiurile isoscele* BβB′ (Bβ = B′β), CγC′ (Cγ = C′γ), *care au unghiurile din* β *şi* γ *egale cu* A, BβB′ = CγC′ = BAC, *astfel că vârfurile* β *şi* γ *să fie de aceeaşi parte ca şi* A *în raport cu* BC. *Să se arate că punctele* β, A *şi* γ *sunt în linie dreaptă, care este bisectoarea exterioară a unghiului* A.

N. ABRAMESCU.

Soluţie dată de D-rele: DORINA FABIUS, MARGARETA LEBER, şi de D-nii: AUREL BĂDESCU, SORIN EFSTATE, N. MIHĂILEANU, SUB-LT. TH. PANAITE, N. PATRAULEA, G. ROŞCA, CHIRIAC TRIFAN, I. SAGER.



Unghiurile BβB′ = BAB′ = ∢ A fiind egale, patrulaterul BβAB′ este inscriptibil, deci ∢ βAB = βB′B = $90^0 - \frac{1}{2}$BβB′ = $90^0 - \frac{1}{2}$A. Deci dreapta βA este perpendiculară pe bisectoarea interioară a unghiului BAC = ∢ A. De asemenea, ∢ CγC′ = CAC′ = A, patrulaterul CγAC′ este inscriptibil, deci γAB′ = γC′C = $90^0 - \frac{1}{2}$A, de unde rezultă că γA este perpendiculară pe bisectoarea interioară a unghiului BAC = ∢ A.

Dreptele βA şi γA fiind perpendiculare pe bisectoarea interioară a unghiului A, urmează că sunt în prelungire, punctele β, A, γ sunt colineare pe bisectoarea exterioară a unghiului A.

Observare făcută de D-l G. Roşca. Cercurile BAB' şi CAC' taie bisectoarea interioară a unghiului A respectiv în M_1 şi M_2 mijloacele arcelor BB' şi CC' din aceste cercuri şi deci βM_1, γM_2 sunt diametre ale acestor cercuri; de unde rezultă că unghiurile $\beta AM_1 = \gamma AM_2 = 90^0$, adică dreapta $\beta A\gamma$ perpendiculară pe bisectoarea interioară a unghiului A.

Observări făcute de D-l N. Mihăileanu:

1°. Proprietatea problemei este independentă de poziţia punctelor B', C'; deci, pentru poziţii particulare, putem enunţa: Triunghiurile isoscele construite pe AB şi AC în exterior şi pe BC în interior ca baze, cu valoarea comună a unghiului dela vârf, au vârfurile opuse laturilor colineare cu A.

2°. Proprietatea se menţine când B' şi C' sunt pe prelungirea laturilor AC sau AB.

3°. Dacă β şi γ s'ar lua pe partea opusă lui A faţă de BC, şi aşa ca $\sphericalangle B\beta B' = C\gamma C' = 180^0 - A$, se obţin două drepte $A\beta$ şi $A\gamma$ simetrice ale bisectoarei exterioare în raport cu laturile AC şi AB, drepte fixe pentru totalitatea punctelor bucurându-se de proprietăţi analoage cu β şi γ.

4°. Problema s'ar fi putut enunţa şi astfel: Se cere locul vârfurilor β şi γ ale triunghiurilor isoscele de bază respectiv BB' şi CC', punctele B, C fixe iar C', B' mobile pe dreptele date AB, AC, şi astfel ca $\sphericalangle\beta = \gamma = A$. In afară de bisectoarea exterioară a unghiului A, se mai obţin, în cazul când triunghiurile isoscele se construesc în sens contrar, două drepte distincte pentru locul lui β sau γ, care se întretaie în vârful triunghiului construit pe BC.

5°. Dacă B sau C alunecă pe dreptele fixe AB, AC, locul nu se deformează în cazul de construcţie indicat de problemă. Când triunghiurile se construesc în sens contrar cu A, dreptele, locurile lui β şi γ, se transformă în drepte paralele.

In adevăr, fie β şi β_1, de parte opusă cu A, în triunghiurile isoscele construite $B\beta B'$, $B\beta_1 C$, astfel ca $\sphericalangle B\beta B' = B\beta_1 C = A$. Din asemănarea lor rezultă $B\beta : BB' = B\beta_1 : BC$. Dar $\sphericalangle B'BC = \beta B\beta_1$, deci triunghiurile $BB'C$ şi $\beta B\beta_1$ sunt asemenea, de unde rezultă $\sphericalangle \beta\beta_1 B = C = \text{const.}$ Locul punctelor β este dreapta ce face cu $B\beta_1$ fixă un unghi constant. Apoi, $\sphericalangle (BC, \beta\beta_1) = 90^0 + \frac{1}{2}A - C$ şi $\sphericalangle (\beta\beta_1, AC) = 90^0 - \frac{1}{2}A$, deci direcţia dreptei $\beta\beta_1$ depinde numai de mărimea lui A. Când $\sphericalangle A = 60^0$, atunci $\beta\beta_1$ este paralelă cu AB.

PROBLEMA 4138. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\text{arc tg}\frac{a}{x} + \text{arc sin}\,(x-a) = \frac{\Pi}{4}\,.$$

Pentru ce valori ale lui **a** *avem rădăcini reale?*

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţie dată de D-nii: N. N. ALDEA (St. mat. Buc.); B. B. ALEXANDRESCU (St. mat.); A. EM. BĂDESCU (S.-lt.); G. V. GHIUŢĂ; C. IVĂNESCU (Bac. Bârlad); M. MARGULIUS; M. L. A. NEGREA (St. mat.); PAREPEANU C. I. (Şc. milit. geniu); I. I. PETRESCU; G. ŞT. ROŞCA (Craiova); SAVIN C. I. (S.-lt.) şi P. M. VARLAM (cl. 7 S. P. U. Bucureşti).

Insemnând cu:

$$A = \text{arc tg}\frac{a}{x} \quad ; \quad B = \text{arc sin}\,(x-a)$$

ecuaţia dată se scrie:

$$A + B = \frac{\pi}{4}$$

şi aplicând tangenta ambilor membrii avem:

$$\text{tg}\,(A+B) = \frac{\text{tg}A + \text{tg}B}{1 - \text{tg}A\,\text{tg}B} = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

şi de aci rezultă:

$$\text{tg}B = \frac{1 - \text{tg}A}{1 + \text{tg}A}\,.$$

Dar:

$$\text{tg}A = \frac{a}{x} \quad \text{şi} \quad \text{tg}B = \pm\frac{\text{sin}B}{\sqrt{1 - \text{sin}^2 B}} = \pm\frac{x-a}{\sqrt{1-(x-a)^2}}\,.$$

Prin înlocuirea acestor valori în egalitatea de mai sus obţinem:

$$\frac{x-a}{x+a} = \pm\frac{x-a}{\sqrt{1-(x-a)^2}}$$

care ne dă soluţia:

$$x = a$$

iar ecuația ce mai rămâne:

$$x + a = \pm\sqrt{1 - (x - a)^2}$$

ridicată la patrat, mai dă soluțiunea:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - a^2}.$$

Pentru ca x să aibă valori reale trebuie ca:

$$\frac{1}{2} - a^2 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad a^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

adică:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant a \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

CPT. GH. N.

---

*EXERCIȚII

4. Se cere maximul sumei

$$S = \sum_{i=0}^{p} \frac{p!\,m!}{(p-i)!\,(m-i)!} \cdot \frac{1}{(i!)^2}$$

știind că: $m + p = k$ (const).

M. MARGULIUS.

R. Avem

$$S = \sum_{i=0}^{p} \frac{p!}{i!\,(p-i)!} \cdot \frac{m!}{i!\,(m-i)!} = \sum_{i=0}^{p} C_p^i\, C_m^{m-i} = C_{m+p}^m = C_k^m$$

și conform formulei binomului lui NEWTON, C_k^m va fi cel mai mare când $m = \frac{1}{2}k$ sau $\frac{1}{2}(k+1)$ după cum k este cu soț sau fără soț.

5. Dacă în triunghiul ABC, M și N sunt două puncte pe AB și AC, iar P și Q respectiv punctele unde mediana și bisectoarea vârfului A intersectează pe MN și BC, atunci există relația

$$\frac{PM}{PN} \cdot \frac{AN}{AM} \cdot \frac{QB}{QC} = 1.$$

SUB.-LT. I. C. SAVIN.

R. După o teoremă demonstrată în G. M., Vol. 37, pag. 17, dacă însemnăm cu R mijlocul lui BC avem

$$\frac{PM}{PN} : \frac{AM}{AN} = \frac{RB}{RC} : \frac{AB}{AC} = 1 : \frac{AB}{AC} = 1 : \frac{QB}{QC}$$

deoarece : RB = RC şi AQ este bisectoare. Făcând împărţirile se găseşte tocmai relaţia din enunţ.

6. Se dau o sferă şi un plan. Dintr'un punct P din plan, se duce un con tangent la sferă.

Când P variază în plan, care e locul centrului cercului de control?

S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

R. Planul cercului de control e planul polar al punctului P faţă de sferă. Când P descrie planul dat, planul său polar trece necontenit prin polul acestuia fie Q. Dacă O e centrul sferei iar C centrul cercului de contact, triunghiul OCQ e dreptunghic în C care va descrie sfera de diametru OQ.

7. Ecuaţia

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = 0$$

are cel mult o rădăcină reală.

P. S.

R.

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)' = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)' = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Ecuaţia $1 - (n+1)x^n + nx^{n+1} = 0$ are rădăcina dublă pozitivă 1, care se simplifică cu factorul dela numitor. În privinţa rădăcinilor negative, se observă că transformata în $-x$ admite numai permanenţe dacă n e impar. Deci în acest caz $f(x) = 0$ nu are nici o rădăcină reală. Dacă n e par, ecuaţia considerată are o singură variaţie, deci $f(x) = 0$ are o singură rădăcină, în acest caz.

8. Ce relaţii există între laturile unui triunghiu pentru ca

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C} = \frac{abc}{\cos A + \cos B + \cos C}.$$

M. I. POPESCU-STĂNEŞTI.

R. Se stabileşte uşor că e cazul triunghiului echilateral.

9. Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia

$$\frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = \cot A + \cot B + \cot C.$$

CEZAR IVĂNESCU.

R. Avem :

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \text{ etc... deci}$$

$$a\sin A + b\sin B + c\sin C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = \frac{2S}{R}(\cot A + \cot B + \cot C)$$

de oarece :

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc\sin A} = 2R\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$$

şi :

$$abc = 4RS.$$

Numitorul se scrie

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R\sin A\sin B\sin C = \frac{2S}{R}.$$

Prin împărţire se găseşte relaţia din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

*3491 [1]). Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate câte odată, să se formeze trei numere de trei cifre, aşa ca unul din aceste numere să egaleze suma celorlalte două şi să fie un patrat perfect.

V. THÉBAULT.

4181. La 1879, pentru a puteà populariza iluminatul electric EDISON a fixat preţul de vânzare al unui bec electric la 40 cenţi, independent de costul de fabricaţie. In primul an costul de fabricaţie al unui bec a fost de 1 dollar şi 10 cenţi. In al doilea an costul de fabricaţie al becului a scăzut la 70 cenţi, dar producţia a crescut, aşa că EDISON a pierdut de 2 ori mai multe parale ca în primul an. In al treilea an, preţul de fabricaţie a scăzut la 50 cenţi ; producţia crescând şi mai mult, EDISON a pierdut cu 50% mai mult decât pierduse la un loc în primii 2 ani. In al patrulea an însă, a scăzut preţul de fabricaţie la 37 cenţi şi a reuşit într'un an să-şi scoată toată paguba celor trei ani precedenţi.

Se întreabă câte becuri a fabricat EDISON anual, în cei patru ani ?

ION S. ANTONIU.

1) Problema 3491 fiind identică cu 4099 se înlocueşte cu prezenta.

*4182. Se dă un cerc, diametrul AOA', coarda BB' perpendiculară pe AA', şi punctul P exterior cercului. Dreptele PB, PB' mai taie cercul în punctele C şi C'. Se cunosc: raza r a cercului, distanţa d dela centrul O la coarda BB', distanţa p dela centrul O la proiecţiunea P' a lui P pe dreapta AOA' P', şi depărtarea PP' a lui P de această dreaptă. Se cere să se exprime în funcţiune de r, d, p, $p' = PP'$, distanţa CC'.

I. Ionescu.

*4183. In triunghiul ABC, fie H ortocentrul. A', B', C' picioarele înălţimilor, iar M_a, M_b, M_c mijloacele segmentelor $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$. Dreptele $M_a B'$, $M_a C'$ întâlnesc, a doua oară, cercurile CA'B', BA'C' respectiv în A_c, A_b. La fel obţinem punctele B_a, B_c; C_b, C_a. Să se arate că dreptele $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ trec prin acelaşi punct.

Cezar Coşniţă.

4184. Diagonalele unui pentagon convex oarecare determină, prin intersecţia lor, un nou pentagon. Să se demonstreze relaţia:

$$\Delta^2 \lambda^2 = \alpha\omega,$$

în care: Δ înseamnă produsul diagonalelor pentagonului mare, λ produsul laturilor pentagonului mic, α (respectiv ω) produsul distanţelor dintre fiecare vârf al pentagonului mare şi cele două vârfuri mai apropiate (resp. mai depărtate) ale pentagonului mic, aflate pe cele două diagonale, care pornesc din fiecare vârf al pentagonului mare.

Gh. Zapan.

4185. Un triunghiu are baza fixă şi unghiul opus constant. Să se găsească locul geometric al ortopolurilor bisectoarelor acestui triunghiu faţă de el însuşi.

Col. Gh. Buicliu.

4186. Fie C un cerc dat de centru O. Să se determine un cerc concentric cercului C, și interior lui, astfel ca pentru orice punct A luat în interiorul lui să avem

$$\frac{AO}{AB} < \alpha < 1,$$

oricare ar fi punctul B exterior cercului C.

D. V. Ionescu.

*4187. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{xy}{xz+yz} = \frac{C}{b} \; ; \; \frac{yz}{xy+xz} = \frac{a}{c} \; ; \; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a + b + c.$$

I. Dumitriu-Dàdo.

4188. Să se găsească forma trigonometrică a condițiunei de existență a triunghiului de laturi inverse triunghiului dat de laturi $a > b > c$.

Căpitan Gh. Niculescu.

4189. Ecuația:

$$x^3 + 3x - a = 0,$$

are cel mult o rădăcină de modul subunitar, or care ar fi a.

P. Sergescu.

4190. Să se studieze funcțiunea:

$$y = 2(x+2) - 3\log\frac{x-1}{x+1}$$

și din studiul acestei funcțiuni să se deducă dubla inegalitate

$$\frac{1}{3e^2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} \leqslant e^x \leqslant 3e^2\sqrt{3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}$$

x fiind presupus în afara intervalului $(-1, +1)$.

Gh. Th. Gheorghiu.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII“

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (3770, 940, 4088, 89, 90, 115, 29, 38, 46); *Bădescu E. A.* (P); *Cârstoiu D. I.* (4174); *Florescu B. I.* (A, N, P); *Ionescu-Biss Har.* (4120, 57); *Ivănescu Cezar* (4091, 97, 108, 79, E, N, P); *Lenco I.* (4166, 79); *Mănescu Mircea* (4032, 128, 34); *Margulius M.* (4029, 79, 115, 38, 45, 53, 57, 71, E); *Mătieş V. I.* (N, P); *Mihăileanu N. N.* (3784, 4164, N, P); *Petrescu I. I.* (4029, 138, 78); *Sager N. I.* (4131, 33, 46, 79); *Savin C. I. Subloc.* (4091, 120).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1932

BIBLIOTHECA CENTRA

SUMARUL

1. Sur trois figures semblables . . . . . *V. Thébault*
2. Congresul internațional al matematicienilor. *Rodolphe Racliș*
3. Vasile Conta . . . . . *Petre Sergescu*
4. Premiul „Vasile Conta".
5. Note matematice: 8 — 14.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 223.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1355, 2991, 3379, 3747, 3855, 3940, 4032, 4052, 4090.
10. Exerciții: 10 — 11.
11. Probleme propuse: 4191 — 4200.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1932

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul 1932 se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 765, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 61, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 21, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 62, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 72, 77, 80, 81, 82, 84, 86, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 200.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

SUR TROIS FIGURES SEMBLABLES

1. Théorème. *Soient* n *points* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *et leurs homologues* $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots, A'_n$, *de deux figures directement semblables* F, F'. *Si l'on joint un point quelconque* O *de leur plan aux points* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, *et que l'on trace les vecteurs* $A_1\alpha_1, A_2\alpha_2, \ldots, A_n\alpha_n$, *équipollents à* $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_n$, *la figure* $\varphi \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *est directement semblable à* F *et* F'.

Les vecteurs $O\alpha_1, O\alpha_2, \ldots, O\alpha_n$, sont visiblement équipollents aux vecteurs $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_n$. Soit S le centre de similitude des deux figures F, F'. Le triangle SAA_1, par exemple, est d'espèce constante ; donc, si l'on construit le parallélogramme $SA_1A'_1\alpha'_1$, le triangle $SA'_1\alpha'_1$ sera également d'espèce constante, et les points A'_1, α'_1, se correspondent dans deux figures semblables F' et φ'.

Si l'on fait subir à la figure $(S, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$ une translation suivant SO, de façon que le point S coïncide avec O, tous les points de la figure φ' coïncident avec ceux de la figure φ qui est, par suite, semblable à F'.

Ainsi se trouve généralisé un théorème de M. D. POMPEIU [1]), théorème qui, comme nous l'avons déjà indiqué ici, est implicitement contenu dans une proposition de J. NEUBERG. [2])

2. Théorème. *Soient* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, *les points qui divisent dans un même rapport* k *les segments* $A_1A'_1, A_2A'_2, \ldots, A_nA'_n$, *unissant des points homologues de deux figures directement semblables* F, F'. *La figure* $\Phi \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *est directement semblable à* F *et* F'.

Soit S le centre de similitude des figures F et F'. Le triangle SAA_1, par exemple, étant d'espèce constante, il en est de même du triangle SA_1a_1, pour lequel $A_1a_1 : a_1A'_1 = k$, est les points A_1, a_1, se correspondent dans deux figures semblables F et Φ. Ainsi se trouve généralisé un théorème dû à VAN AUBEL que vient de rappeler M. N. BOTEA [3]).

1) *Gazeta Matematica*, XXXVII, p. 442.
2) *Mathesis*, 1889 — 264.
3) *Gazeta Matematica*, XXXVII, p. 443.

3. A propos de ce théorème de VAN AUBEL, M. W. H. ECHOLS a publié récemment la question suivante qui en est une application immédiate :

Aux sommets d'un triangle équilatéral ABC *on construit trois autres triangles équilatéraux* ALM, BNO, CPQ, *de positions quelconques mais de même sens de circulation. Les milieux de chacun des trois segments* (AP, CM, LQ), (BL, OA, MN), (CN, BQ, OP), (LO, MP, QN), *sont les sommets d'un triangle équilatéral* [1]).

M. J. R. MUSSELMANN, résolvant la question par le calcul, a trouvé 55 triangles équilatéraux déterminés par la figure envisagée [2]).

Le théorème peut être généralisé ainsi :

Aux sommets d'un triangle quelconque ABC *on construit trois autres triangles* ALM, BNO, CPQ, *semblables à* ABC *et de même sens de circulation. Les points qui divisent chacun des trois segments* (AP, CM, LQ), (BL, OA, MN), (CN, BQ, OP), . . . , *dans un même rapport, sont les sommets d'un triangle semblable au triangle* ABC.

Il suffit, pour le prouver, d'appliquer le théorème de VAN AUBEL, ou bien de projeter sur un plan, non parallèle au sien, la figure envisagée par M. W. H. ECHOLS.

N. B. Enfin, on peut remplacer le triangle ABC par un polygone convexe $A_1A_2 \ldots A_n$ aux sommets duquel sont disposés des polygones qui lui sont semblables et de même sens de circulation.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

1) *The American Mathematical Monthly*, 1932, p. 46.
2) *The American Mathematical Monthly*, 1932, p. 290.

CONGRESUL INTERNAȚIONAL AL MATEMATICIENILOR

Congresele internaționale ale Matematicienilor, au început la Zürich în 1896 și au continuat la Paris în 1900, la Heidelberg în 1904, la Roma în 1908, la Cambridge în 1912, la Strasbourg în 1920, la Toronto în 1924, la Bologna în 1928 și la Zürich în 1932.

Pentru a doua oară, Congresul a avut loc la Zürich, în Elveția, patria grupului ilustru al celor 9 *Bernoulli,* patria lui LEONHARD EULER, acest *„Princeps Mathematicorum Helveticorum"*, geniu de o abundență rară, pe care și-l dispută, timp de 50 ani, în plin secol XVIII, Academiile regală și imperială, din Berlin a lui Frederic cel Mare și din Petersburg a Caterinei II.

Comitetul de organizare al Congresului, având în frunte pe D-l RUDOLF FUETER, Profesor la Universitatea Cantonală Zürich și pe D-l MICHEL PLANCHEREL, Rectorul Școalei Politechnice Federale din Zürich, a trimis încă din primăvară 6000 invitații tuturor Matematicienilor, din toate țările; efectiv au participat la Congres 600 Matematicieni din 41 țări. In ședința de deschidere, D-l SALVATORE PINCHERLE, fostul Președinte al Congresului dela Bologna, propune la președinția actualului Congres pe D-l FUETER, care este primit cu aclamații; apoi se formează biroul, având ca Vice-președinte pe D-l PLANCHEREL.

Dintre participanții la primul Congres, de acum 36 ani, sunt prezenți fostul Președinte GEISER, D-nii HILBERT, PINCHERLE, BOREL, DE LA VALLÉE POUSSIN; dintre participanții la al doilea Congres, de acum 32 ani, sunt prezenți D-nii HADAMARD, ȚIȚEICA, VOLTERRA.

Primul gând al Congresiștilor se îndreaptă către bătrânul și ilustrul Maestru EMILE PICARD, căruia i se trimete o telegramă omagială, precum acum 36 ani, la primul Congres, s'a expediat o telegramă de omagiu bătrânului și ilustrului geometru CHARLES HERMITE.

Au fost în total 21 Conferințe generale și 254 Conferințe de secțiuni, dintre cari 26 Conferințe la secția de Algebră și Teoria numerelor; 91 Conferințe la secția de Analiză; 43 Conferințe la secția de Geometrie; 17 Conferințe la secția de Calculul probabilităților, Asigurări, Statistică; 9 Conferințe la secția de Astronomie, Matematici technice; 46 Conferințe la secția de Fizică Matematică; 16 Conferințe la secția de Filosofie, Istorie; 5 Conferințe la secția de Pedagogie și 1 raport al Comisiei Internaționale a Invățământului Matematic asupra preparării teoretice și practice a profesorilor de Matematici din Invățământul secundar.

Dintre Conferințele generale voiu semnala Conferința tânărului și deja celebru Profesor dela Facultatea de Științe din Paris, GASTON JULIA *„Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes"*, o expunere luminoasă a teoriei funcțiilor, începând cu WEIRSTRASS și CAUCHY, continuând cu teoremele lui PICARD *„tels les deux caps d'un continent inconnu découverts par quelques hardis navigateurs et qui font pressentir un monde mystérieux, monde si vaste et si riche, que cinquante années d'explorations n'en ont pas encore épuisé les secrets"*, și terminând cu cercetările recente datorite D-lor JULIA, NEVANLINNA. VALIRON, MILLOUX, AHLFORS.

Printre Conferințele de secțiuni voiu semnala nu mai puțin de 4 Conferințe, consacrate celebrei funcții zeta a lui RIEMANN.

Din discuțiile urmate, se degajează impresia că problema la ordinea zilei este, după formularea D-lui HADAMARD, *„le monde mystérieux des fonctions de deux variables complexes"*.

Care a fost contribuția românească la Congres? D-l ȚIȚEICA, este o cunoștință veche a Congreselor internaționale; D-sa a luat parte la Congresul dela Paris în 1900, la Congresul dela Roma în 1908, la Congresul dela Cambridge în 1912 și la Congresul dela Toronto în 1924. D-sa a fost ales Președinte al secției de Geometrie la Congresul dela Toronto în 1924 și Președinte al secției de Geometrie la Congresul dela Zürich în 1932. D-sa a făcut o Conferință *„Sur les courbes quadratiques"*.

D-l SERGESCU, a făcut o Conferință întitulată *„Quelques points de la théorie des équations algébriques"*.

D-l RACLIȘ a făcut două Conferințe *„Le terme reste de la serie de* TAYLOR *généralisée"* și *„Trois théorèmes sur la série de* TAYLOR".

D-l MIRON NICOLESCU a făcut o Conferință întitulată *„Extension du théorème de* LIOUVILLE-PICARD *aux intégrales de l'équation de* FOURIER".

Congresul dela Zürich abia sfârșit, gândul Matematicienilor se îndreaptă către viitorul Congres care va avea loc la Oslo în 1936.

Termin, sperând că Matematicienii Români vor participa la viitorul Congres în număr mai mare și cu contribuții valoroase, rezultat al unui efort continuu de patru ani, încredințați fiind, cum spune D-l GASTON JULIA, că *„les fruits dépasseront la promesse des fleurs"*.

Zürich, Septembrie 1932. RODOLPHE RACLIȘ.

VASILE CONTA

S'au împlinit anul acesta, la 21 Aprilie, cincizeci de ani dela moartea marelui filosof român VASILE CONTA.

Născut în 1846, V. CONTA face parte din generaţia eroică a întemeetorilor vieţei ştiinţifice moderne în România. Trimis în 1869 să studieze la Institutul Superior de Comerţ din Anvers, el studiază în acelaş timp şi pentru doctoratul în drept, pe care-l obţine în 1872 la Bruxelles. Aceste două şcoli îl familiarizează cu metoda ştiinţifică apuseană şi cu normele de expunere a oricărei opere de gândire. Dar materia propriu zisă a operelor sale viitoare, filosofia, CONTA nu o învăţa în şcoală, ci ea e rodul muncei sale uriaşe în afară de îndatoririle universitare. Structura sufletească a lui CONTA l-a împins spre meditaţia filosofică, întărită şi din cauza izolărei în care trăia, ca urmare a boalei de piept de care suferea. Intors în ţară, CONTA e numit profesor de drept civil la Universitatea din Iaşi în 1873. In 1879 e ales deputat de Iaşi, făcând o scurtă apariţie, în 1880, ca Ministru al Instrucţiunei Publice. Numit Consilier la Inalta Curte de Casaţie, CONTA se stinge în mod tragic la 21 Aprilie 1882, în vârstă *de abia 36 de ani,* răpus de boală şi lăsând în urma lui o operă care stă şi azi la bazele filosofiei româneşti.

Moştenirea scrisă a lui CONTA cuprinde trei părţi distincte: poezii, lucrări politice (discursuri, etc.) şi opera filosofică. Unele discursuri ale lui au avut un imens răsunet şi sunt citate şi azi. Ceeace ne interesează pe noi aci e filosofia lui. Ea prezintă un sistem închegat, expus în cărţile: *Teoria Fatalismului, Teoria Ondulaţiei Universale, Originea Speciilor, Incercări de Metafizică, Bazele Metafizicei şi Intâile principii care alcătuesc lumea.*

Prin ele, CONTA se dovedeşte un gânditor cu mult superior mediului în care a trăit. Pe atunci, noi eram la începutul evoluţiei noastre intelectuale moderne şi nu înţelegeam înălţimea cugetărei primului nostru filosof. De aci a şi urmat în el un sentiment de izolare faţă de lumea din afară. De sigur că dac'ar fi trăit în Apus, numele său ar fi intrat în circulaţia europeană, iar sistemul său şi-ar fi găsit loc în Istoriile filosofiei. Aşa cum s'a întâmplat, el formează piatra de temelie a mişcărei filosofico-ştiinţifice la noi; viaţa lui s'a sacrificat în lupta de precursor într'o societate înapoiată faţă de gândirea lui. Legenda Meşterului Manole se aplică şi Istoriei

gândirei româneşti: sacrificiul generaţiei eroice de precursori din veacul trecut, cari şi-au închis forţele în lupta pentru înaintarea societăţei, în loc de a-şi căuta glorie ştiinţifică în străinătate, acest sacrificiu a atras după sine măreaţa aşezare ştiinţifică de azi a Şcoalei Româneşti.

Voiu încerca să schiţez în câteva cuvinte ideile fundamentale ale filosofiei lui CONTA. Ea e influenţată de materialismul filosofic al timpului şi de pozitivismul lui A. CONTA. După CONTA, explicaţia întregului univers e mecanică. Totul se compune din relaţii dela cauză la efect, fie în fenomenele fizice, fie în cele sufleteşti. Noi nu cunoaştem încă toate aceste relaţii cauzale, şi de aceea multe lucruri ni se par datorite hazardului. De fapt, nu există hazard. Totul e o înlănţuire, care se poate închega în formule matematice. Filosofia lui CONTA este deci deterministă, ceeace e o notă comună materialismului filosofic. Acolo unde intervine originalitatea gânditorului român, este în precizarea acestui determinism; prin *legea ondulaţiei universale*. Lucrarea despre Ondulaţia Universală este cea mai de valoare contribuţie a lui CONTA la filosofie. Toate fenomenele evoluiază conform unei legi generale: mişcarea se face pe o «curbă suitoare», atinge un maxim şi apoi descreşte pe o «curbă scoborâtoare». E deci o mişcaie ondulatorie. Iată cum explică, intuitiv, CONTA această ondulaţie universală: «In decursul transformărei organice se observă că un organ, o funcţie, în sfârşit un caracter dat, se desvoltă şi predomineză câtva timp; pentru a da loc apoi la o scădere treptată a acestui caracter şi la desvoltarea pe nesimţite a unui altuia, care va predomina în alt timp în paguba celui dintâi». In acest fel de expunere intuitivă, regăsim puternica pregătire ştiinţifică a filosofului, ceeace ne îndreptăţeşte să revendicăm şi pentru matematicieni pe acest cap genial.

Conform legei ondulaţiei universale, ar urma că şi ştiinţa omenească ar trebui să atingă odată un punct culminant şi apoi să regreseze. Spiritul de metafizician al lui CONTA, care are nevoe de o credinţă într'un absolut, nu l-a lăsat să tragă această concluzie descurajatoare. Manifestările ştiinţei pot prezenta ondulaţii într'un loc determinat, la un popor dat, etc. Dar omenirea în general, se găseşte pe panta suitoare a undei, în ceeace priveşte ştiinţa şi, când făclia luminei cade dintr'o mână obosită, se găsesc alte zeci de mâni vânjoase s'o prindă şi s'o ridice mai sus. Eternul refren Vitae lampadae tradite...

Gazeta Matematică a ţinut ca o pioasă datorie să pomenească pe marele precursor VASILE CONTA, cu ocazia cincuantenarului morţei sale. Inrudirea matematicei cu sistemul de gândire filosofică a lui CONTA, ne îndreptăţeşte la aceasta. Şi mai este încă o legătură. Sora marelui filosoî, D-na ANA CONTA KERNBACH a instituit un premiu la *Gazeta Matematică,* în amintirea ilustrului său frate. Premiul e destinat lucrărilor de filosofia matematice. In timpul vieţei D-nei CONTA KERNBACH, dânsa a dat o contribuţie viageră anuală pentru alimentarea fondului VASILE CONTA. Azi, acest fond este mânuit de «Societatea Gazeta Matematică» şi va ţine vie în mintea corespondenţilor noştri admirabila figură ştiinţifică a primului filosof român.

PETRE SERGESCU.

PREMIUL „VASILE CONTA"

In conformitate cu prevederile din Regulamentul fondului „VASILE CONTA", în numărul de faţă urma să se publice raportul Comisiunii asupra lucrărilor prezentate pentru premiere din venitul acestui fond.

Societatea neprimind nici o lucrare până la 1 Iulie 1932, potrivit dispoziţiunilor regulamentului fondului, se va aştepta până la 1 Iulie 1933 prezentarea unei asemenea lucrări, care se va premia cu totalitatea venitului fondului cumulat până la data acordării.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

8. *Generalizarea problemei 4149.*

Din prima soluţie a problemei, se vede următoarea simplă generalizare :

«Modulul produsului a m numere, al căror modul e mai mare ca m, e superior modulului sumei produselor lor câte $m - 1$».

Căci având prin ipoteză:

$$|a|>m,\ |b|>m,\ |c|>m,\ \ldots\ |p|>m,\ |q|>m.$$

sau:

$$\left|\frac{1}{a}\right|<\frac{1}{m},\ \left|\frac{1}{b}\right|<\frac{1}{m},\ \left|\frac{1}{c}\right|<\frac{1}{m},\ \ldots\ \left|\frac{1}{p}\right|<\frac{1}{m},\ \left|\frac{1}{q}\right|<\frac{1}{m}.$$

putem pune:

$$\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|<\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=1$$

sau:

$$\left|\frac{\Sigma\, abc\ldots p}{abc\ldots pq}\right|<1.$$

Deci:

$$|abc\ldots pq|>|\Sigma\, abc\ldots p|$$

c. c. e. d. d.

MĂNESCU MIRCEA
Elev cl. VI L. M. Emin. Buc.

9. *Asupra Notei 10 din „G. M." vol. XXXVII, p. 92.*

In «Revista Matematică» din Timişoara, vol. IX (1930) p. 128, pe lângă observaţiile făcute ulterior de D-l I. B. F. în nota citată am considerat şi relaţia mai generală:

$$\varphi_{\alpha+\beta}(a^{\alpha})=1 \quad \text{(a prim)}.$$

Am spus că pentru $\beta=1$ singurele soluţii sunt:

$$\varphi_3(2^3)=1,\quad \varphi_4(3^3)=1.$$

Demonstraţia se face uşor prin metoda indicată de D-l FLORESCU în nota citată.

Pentru $\beta\neq 1$ dar dat avem foarte probabil o infinitate de soluţii. Ar fi interesant de demonstrat în mod riguros acest lucru. Semnalez încă următoarea proprietate relativă la funcţia $I(x)$; a fiind prim absolut $I(a)$ poate lua orice valoare întreagă şi pozitivă. Demonstraţia pare a prezenta oarecare dificultăţi.

T. P.

10. *O nouă demonstrațiune a proprietății:*

„Înălțimile unui triunghiu sunt bisectoarele triunghiului său „ortic".

Fie ABC triunghiul considerat, H ortocentrul său, A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor sale, B_2 intersecțiunea dreptelor A_1C_1, AC. In patrulaterul complect BA_1HC_1AC diagonalele BH și A_1C_1 determină pe a treia diagonală CA o diviziune armonică, deci fascicolul (A_1, CB_1AB_2) este un fascicol armonic. *Razele* A_1A și A_1C *ale acestui fascicol fiind perpendiculare una pe alta, ele sunt bisectoarele unghiurilor formate de celelalte două.* (Géom. plane par E. Rouché et Ch. de Comberousse, pag. 240).

C. N. Drâmbă-Putna.

11. *Alte triunghiuri* $(\Delta)_0$.

Am arătat anterior că triunghiurile având laturile în progresie geometrică sunt niște triunghiuri $(\Delta)_0$. Despre aceste triunghiuri adaug:

1°. *Triunghiurile geometric progresive nu se pot construi decât dacă avem:*

$$q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

unde q este rația.

2°. *Triunghiurile* Δ_0 *rezultate rămân tr. geometric progresive.* Alte triunghiuri ce luăm acum în considerare sunt acelea având laturile în progresie aritmetică. Rezultatele ce dăm asupra lor sunt:

3°. *Triunghiurile având laturile în progresie aritmetică nu se pot construi decât dacă avem:*

$$n > 3a$$

unde **n** *este cea mai mare latură iar* **a** *rația.*

4°. *Toate triunghiurile cu laturile în progresie aritmetică la cari avem:*

$$n > 2a + a\sqrt{2}$$

sunt triunghiuri $(\Delta)_0$.

Există deci un interval:

$$3a < n < 2a + a\sqrt{2}$$

pentru care aceste triunghiuri pot exista fără a fi însă și tr. $(\Delta)_0$.

Triunghiurile Δ_0 rezultate pierd calitatea tr. $(\Delta)_0$. Triunghiurile Δ_0 şi $(\Delta)_0$ nu sunt asemenea. Pentru $a = 1$, avem cazul particular al triunghiurilor cari au drept laturi numere consecutive.

Aceste rezultate simple, mai ales acelea relative la posibilitatea de construcţie ale triunghiurilor de cari ne ocupăm, le-am arătat cu credinţa că e bine să ne dăm seama de ele.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

*12. *Asupra problemei 4136.*

In *Gazeta Matematică,* Anul XXXVII, pag. 360, D-l I. IONESCU a propus rezolvarea sistemului:

$$x + (y/z) = y + (z/x) = z + (x/y) = 2,$$

şi găsirea directă a sumei rădăcinilor. La pag. 436, s'a dat soluţia găsindu-se:

$$z^4 - 8z^3 + 14z^2 - 7 = 0 \quad \text{şi} \quad x + y + z = 5 \pm 2.$$

Dacă se consideră sistemul mai general:

$$x + (y/z) = y + (z/x) = z + (x/y) = 2m,$$

atunci se ajunge la ecuaţia:

$$z^4 - 4m(m+1)z^3 + 2(8m^3 - 1)z^2 - 4m(m-1)(4m^2 + 2m + 1)z + (1 - 8m^3) = 0$$

şi se găseşte că suma rădăcinilor nu poate fi decât $(4m^2 + 2m + 1)$ sau $(6m - 3)$. In cazul particular $m = 1$ se obţine problema 4136.

I. V. MĂTIEŞ.

Problema se poate generaliza înlocuind pe 2 cu orice număr a. Se găseşte ecuaţia de mai sus în care înlocuim $2m$ cu a şi anume:

$$z^4 - a(a+2)z^3 + 2(a^3 - 1)z^2 + a(a-2)(a^2 + a)z - (a^3 - 1) = 0.$$

E uşor de observat că $x = y = z = (a - 1)$ este o soluţie a problemei, aşa că ecuaţia de mai sus se divide cu $[z - (a - 1)]$. Făcând împărţirea găsim ecuaţia de gradul III:

$$z^3 - (a^2 + a + 1)z^2 + (a^3 - 1)z + (a^2 + a + 1) = 0.$$

Are această ecuaţie totdeauna toate rădăcinile reale? Acest studiu face obiectul problemei propuse sub No. 4198 din acest Număr al *Gazetei Matematice.*

I. I.

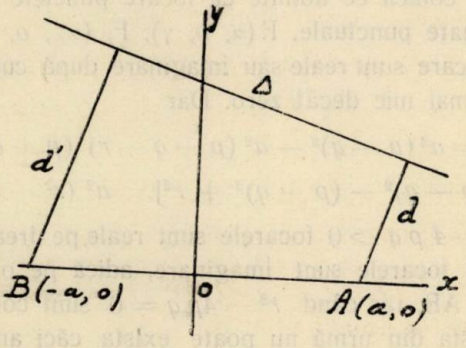
13. *O aplicație a coordonatelor tangențiale.*

Fiind date două puncte A *și* B, *să însemnăm cu* d *și* d' *distanțele lor la o dreaptă* Δ.

Să se găsească înfășurătoarea dreptelor Δ, *pentru care avem relația*

$$pd^2 + qd'^2 + rd'd + k = 0,\ p,\ q,\ r \text{ și } k \text{ fiind date.}$$

Fie $ux + vy + wz = 0$ ecuația dreptei în coordonate omogene, și $(a,\ o)$, $(-a,\ o)$ coordonatele punctelor A și B raportate la AB ca axă O X și la perpendiculara pe mijlocul ei ca axă *oy*.



Exprimând condiția dată, avem

$$p\frac{(au+w)^2}{u^2+v^2} + q\frac{(-au+w)^2}{u^2+v^2} + r\frac{(w^2-a^2u^2)}{u^2+v^2} + k = 0,$$

sau

$$u^2a^2(p+q-r) + 2uwa(p-q) + w^2(p+q+r) + k(u^2+v^2) = 0.$$

Însă în coordonatele tangențiale $(u,\ v,\ w)$, această ecuație reprezintă o conică. Ecuația tangențială a unei conice fiind

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0,$$

se știe că cea punctuală este

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

care în cazul nostru devine

$$\begin{vmatrix} a^2(p+q-r) & o & o & x \\ o & o & o & y \\ a(p-q) & o & (p+q+r) & z \\ x & y & z & o \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația tangențială a acestei conice fiind de forma

$$Au^2 + 2Buw + Cw^2 + k(u^2 + v^2) = 0,$$

unde

$$A = a^2(p + q - r), \qquad B = a(p - q), \qquad C = (p + q + r),$$

putem descompune prima parte $Au^2 + 2Buw\,Cw^2$ în produs de doi factori de forma $(au + \beta.0 + \gamma w)$ $(\alpha_1 u + \beta_1 0 + \gamma_1 w)$.

Ecuația devine

$$(\alpha u + \gamma w)(\alpha_1 u + \gamma_1 w) + k(u^2 + v^2) = 0$$

și reprezintă o conică ce admite ca focare punctele de pe dreapta AB de coordonate punctuale, F (α, o, γ), F, (α_1, o, γ_1).

Aceste focare sunt reale sau imaginare după cum $B^2 - Ac$ este mai mare sau mai mic decât zero. Dar

$$B^2 - Ac = a^2(p - q)^2 - a^2(p + q - r)(p + q + r) =$$

$$a^2[(p - q)^2 - (p + q)^2 + r^2] = a^2(r^2 - 4pq)$$

Deci când $r^2 - 4pq > 0$ focarele sunt reale pe dreapta AB. Când $r^2 - 4pq < 0$, focarele sunt imaginare, adică pe o dreaptă perpendiculară pe AB, iar când $r^2 - 4pq = 0$ sunt confundate.

Dar aceasta din urmă nu poate exista căci am avea $d = d'$ și dreptele ar fi paralele și înfășurătoarea lor punctul de la infinit.

In cazul când $p = -q$ și $r = 0$, înfășurătoarea este

$$k(u^2 + v^2) + 2ap\,uw = 0,$$

care este o parabolă, căci termenul cu w^2, lipsește. Când $p = q = 0$, focarele sunt chiar în punctele A și B.

ABRAMESCU MARIANA.

14. *Generalizarea problemei 4110.*

In Nota dela pagina 397, Vol. XXXVII, dela finele soluției problemei 4110 am dat extinderea proprietății enunțată în problemă și asupra hiperbolei și parabolei, raportate la axele de simetrie. Iată soluția pentru cazul general al unei conice oarecare

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bey + Cy^2 + Dx + 2Ey + F = 0$$

raportată la un sistem de axe oarecare. Fie

$$(1) \qquad xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0$$

polara punctului $M(x_0, y_0)$ față de conică. Distanța Δ_M dela M la (1) este dată de

$$\Delta_M = \frac{x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0}}{\pm R} = \frac{f(x_0, y_0)}{\pm R}$$

în care

$$R = \sqrt{(f'_{x_0})^2 + (f'_{y_0})^2}$$

iar distanța Δ_0 dela origină la (1) este

$$\Delta_0 = \frac{z_0 f'_{z_0}}{\pm R} = \frac{Dx_0 + Ey_0 + F}{\pm R}.$$

De unde se deduce imediat

$$\frac{\Delta_\mu}{\Delta_0} = \frac{f(x_0, y_0)}{Dx_0 + Ey_0 + F}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Tomul XLVI. No. 8. Anul 1932. Octombre. Gembloux. Asupra unor sextice ale lui HALPHEN, de L. GODEAUX. Asupra funcțiunilor lui RIEMANN asociate soluțiilor ecuațiilor integrodiferențiale lineare, de H. L. GERMAY. Asupra unei demonstrațiuni și unei generalizări a teoremei ortopolulului, de R. GOORMAGHTIGH. Identități între funcțiunile circulare și iperbolice, de R. DEAUX. Exerciții de geometrie infinitezimală, de D-ra BERTHE UMÉ. Dreptele lui SIMSON și ortopolul, de AD. M. Asupra punctelor lui FEUERBACH, de V. THÉBAULT. Asupra fascicolelor conjugate, de J. DIEUDONNÉ.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIV. Fascic. II. August 1932. Buenos Aires. Asupra metoadei de sumare exponențială, de J C. VIGNAUX.

Idem. Tomul CXIV. Fascicula III Septemvrie 1932. Buenos Aires.

Boletin Matematico. Anul V, No. 7. Septemvrie 1932. Buenos Aires. Un moment critic și decisiv, de B. I. BAIDAFF.

Boletin Matematico Elemental. Anul III, No. 7. Septemvrie 1932. Buenos Aires.

Journal de Mathematiques Elementaires, publié par H. VUIBERT. Anul 57. No. 1. Octomvrie 1932. Paris.

Idem. publié par H. VUIBERT. Anul 57. No. 2. Octomvrie 1932. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XII. No. 8. Octomvrie 1932. Timişoara. Asupra triunghiurilor de laturi inverse, de Căp. Gh. Niculescu.

V. Thébault. *Sur la géométrie du tétraèdre :* I. Sphères remarquable du tétraèdre. II. Sphères de Tücker et de Taylor. Gembloux 1931. (Supliment la *Mathesis).*

N. Ciorănescu. *Sur la définition fonctionelle des polynomes et quelques «formules à deux et à trois noveaux».* (Extras din *Buletinul matematic al Societăţii române de ştiinţe).* Bucureşti 1932.

N. Ciorănescu. *Sur les conditions linéaires dans l'intégration des équations différentielles ordinaires.* (Extras din *Mathematische Zeitschrift).* Berlin 1932.

N. Ciorănescu. *La détermination d'une fonction harmonique par des conditions initiales globales.* (Extras din *Rendiconti della Reale Accademia nazionale dei Lincei).* Roma 1932.

N. Ciorănescu. *Quelques équations fonctionelles caractérisant la fonction linéaire.* (Extras din *Buletin de la Section scientifique de l'Academie roumaine).* Bucureşti 1932.

N. Ciorănescu. *Nouveaux problèmes sur les équations aux dérivees partielles du second ordre et du type hyperbolique.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris).* Iunie 1932. Paris.

N. Ciorănescu. *Quelques propriétés des fonctions polyharmoniques en corrélation avec certaines proprietés des polynomes.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris).* Iunie 1932. Paris.

N. Botea. *Sur la généralisation d'un théorème* de Lord Kelvin. Cluj 1932. (Extras din *«Mathematica»,* Vol. VI).

Eugène Blanc. *Problèmes et Compléments de mécanique,* à l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales et des élèves de mathématiques spéciales. Paris. Gauthier-Villars et C-ie. 1931.

R. Wavre. *Figures planétaires et géodésie.* (Fascicola XVIII din *«Cahiers scientifiques»* publicate sub Direcţiunea D-lui G. Julia. 1932. Gauthiers-Villars et C-ie. Quai des Grands Augustins 55. Paris.

Nicolae N. Ganea. *Calculul betonului armat.* Vol. I. Calculul static al construcţiunilor din beton armat, cu 48 tabele, numeroase exemple şi 154 figuri. Bucureşti. Imprimeria Regiei autonome C. F. R. 1932.

Nicolae N. Ganea. *Calculul betonului armat.* Vol. II. Reguli constructive şi calculul secţiunilor, cu 66 tabele de calcul, 55 exemple şi 65 figuri. Bucureşti. Imprimeria Regiei autonome C. F. R. 1932.

CERERI

223. Există cărţi de matematici române tipărite pentru uzul Românilor din America ?

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de ştiinţe, Secţia matematică a reînceput şedinţele sale. In seara de 17 Octomvrie a vorbit D-l G. Ţiţeica despre reprezentarea conformă şi D-l D. Barbilian despre problema generală a Geometriei descriptive.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1355. *Să se găsească o funcţiune* $\varphi(x)$ *continuă de variabila* x, *care să satisfacă relaţia:*

$$(1) \qquad \int_0^x [(x-s)^2 + x^3]\,\varphi(s)\,ds = x^5.$$

T. Lalescu.

Soluţie dată de D-l Prof. D. Georgescu (Piteşti).

Punem $z = \int_0^x \frac{(x-s)^2}{2!}\,\varphi(s)\,ds$ şi ţinem seamă de formula cunoscută:

$$\int_0^x \frac{(x-s)^2}{2!}\,\varphi(s)\,ds = \int_0^x \varphi(s)\,ds^3.$$

Astfel vom avea:

$$z = \int_0^x \varphi(s)\,ds^3\,;\quad \frac{dz}{dx} = \int_0^x \varphi(s)\,ds^2\,;\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \int_0^x \varphi(s)\,ds.$$

Ţinând seamă de aceste relaţiuni ecuaţia dată devine:

$$(2) \qquad x^3\frac{d^2z}{dx^2} + 2z = x^5.$$

Ca să găsim pe z, introducem în această ecuaţie seria nedeterminată:

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

şi

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2.a_2 + 3.2a_3\,x + \ldots + n.(n-1).a_n\,x^{n-2} + \ldots$$

Obţinem astfel următoarele relaţiuni, între coeficienţii seriei:

$a_0 = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $2a_3 + 2a_2 = 0$; $2a_4 + 3 \cdot 2a_3 = 0$

$2a_5 + 4.3\ a_4 = 1$; $2a_6 + 5.4a_5 = 0$; $\ldots 2a_n + (n-1)(n-2)a_{n-1} = 0$.

Relaţiuni care ne dau:

$$a_3 = 0\ ;\ a_4 = 0\ ;\ a_5 = \frac{1}{2}\ ;\ a_6 = -\frac{5 \cdot 4}{2^2}\ ;\ a_7 = \frac{6.5.5.4}{2^3} \ldots$$

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)(n-2)(n-3) \ldots 6.5.5.4}{2^{n-4}}$$

şi prin urmare vom avea:

$$z = \frac{1}{2}x^5 - \frac{5.4}{2^2}x^6 + \frac{6.5.5.4}{2^3}x^7 - \ldots (-1)^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)(n-2) \ldots 5.5.4}{2^{n-4}} x^n.$$

Cum $\varphi(x) = \dfrac{d^3z}{dx^3}$ rezultă că funcţiunea căutată va fi:

$$\varphi(x) = \frac{5.4.3}{2}x^2 - \frac{5.4.6.5.4}{2^2}x^3 + \frac{6.5.5.4.7.6.5}{2^3}x^4 \ldots$$

$$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)(n-2) \ldots 6.5.5.4.n.(n-1)(n-2)}{2^{n-4}} x^{n-3} \ldots$$

funcţiune care verifică *ecuaţia integrală* dată.

Notă. Această problemă se mai poate rezolva pe alte două căi diferite Să considerăm ecuaţia (2) fără membrul al doilea, pe care o putem scrie

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2x^{-3}z = 0$$

substituţia $x = 2t^{-1}$ o reduce la ecuaţia clasică a lui BESSEL

$$t\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} = z$$

a cărei integrală generală se obţine cu ajutorul funcţiunei $y(\gamma, x)$ a lui BESSEL. Metoda variaţiei de constantă ne dă apoi integrala generală a ecuaţiei (2) cu membrul al doilea. Această metodă are avantajul că ne dă indicaţiuni precise asupra naturei funcţiunilor transcendente ce intră în expresiunea integralei generale.

O a doua metodă, care azi e clasică, rezultă din observaţia că ecuaţia (1) este o *ecuaţie integrală tip* VOLTERRA de speţa întâia, de tipul general

$$\int_0^x k(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad k(x, x) \neq 0.$$

Se derivează ambii membrii în raport cu x, se împarte cu $k(x, x)$ şi se obţine o ecuaţie integrală VOLTERRA de speţa a doua, care se integrează prin metoda aproximaţiunilor succesive.

Nu pot şti ce problemă a condus pe răposatul profesor LALESCU la această ecuaţie integrală; am căutat să calculez câţiva sâmburi iterati din expresia soluţiei şi am obţinut funcţiuni foarte puţin simetrice şi fără posibilitate de a întrevedea o legătură între ele, lucru ce ar fi putut permite o condensare a acesteia sub o formă accesibilă discuţiei.

Astfel că din acest punct de vedere prima soluţie ce am dat îmi pare mai potrivită, deşi aceia a D-lui D. GEORGESCU este cea mai elementară.

M. G.

PROBLEMA 2991. *Care sunt orele când bisectoarea unghiului format de acele unui ceasornic (orarul şi minutarul) are direcţia 12 — 6?*

A. MICLESCU.

Considerăm ora 12, când minutarul şi orarul sunt suprapuse. Cadranul având 60 diviziuni egale, să notăm cu x numărul diviziunilor pe care le parcurge minutarul până când direcţia 12 — 6 este bisectoarea unghiului format de cele două ace.

Deoarece minutarul a parcurs x diviziuni, drumul parcurs de orar este $\frac{x}{12}$. Evident, vom avea:

$$x + \frac{x}{12} = 60 \quad \therefore \quad x = \frac{12 \times 60}{13} = 55'23'' \frac{1}{13}.$$

Aşa dar avem ca primă soluţie a problemei ora $0^0 55'23'' \frac{1}{13}$.

Considerând acum ora 1, x având însemnarea de mai sus, se înţelege uşor că ecuaţia necesară soluţiei de-a doua este:

$$x + \frac{x}{12} = 55 \quad \therefore \quad x = \frac{12 \times 55}{13} = 50'46'' \frac{2}{13}.$$

Ora $1^0 50'46'' \frac{2}{13}$ este a doua soluţie a problemei.

Numaidecât se deduce că ecuaţia, care cuprinde toate soluţiile problemei, este:

$$x + \frac{x}{12} = 60 - 5k$$

$$x = \frac{12(60 - 5k)}{13} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 12)$$

iar orele corespunzătoare problemei sunt date de formula:

$$k^0 + \left[\frac{12(60 - 5k)}{13}\right]' \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 12).$$

Printr'un calcul simplu, observând că numerele x formează o progresie aritmetică descrescătoare cu raţia $\frac{60}{13} = 4'36'' \frac{12}{13}$, găsim soluţiile :

$$0^0 55'23'' \frac{1}{13},\ 1^0 50'46'' \frac{2}{13},\ 2^0 46'9'' \frac{3}{13},\ 3^0 41'32'' \frac{4}{13},\ 4^0 36'55'' \frac{5}{13},$$

$$5^0 32'18'' \frac{6}{13},\ 6^0 27'41'' \frac{7}{13},\ 7^0 23'4'' \frac{8}{13},\ 8^0 18'27'' \frac{9}{13},\ 9^0 13'50'' \frac{10}{13},$$

$$10^0 9'36'' \frac{11}{13},\ 11^0 4'36'' \frac{12}{13},\ 12^0.$$

Au rezolvat problema D-nii : M. Adam, Tr. Angelescu, Ablov V. Antoniu, C. Berdan, Kirilă I. Bocancea, Ioan C. Boian, N. G. Botea, Eugeniu Grabovski, Dima St. Iliescu, Paul I. Ionescu, Al. Mladenovici, M. Pătroianu, Marin Dem. Popescu, Const. C. Popovici, Dan P. Popovici, Faibiş Rabinovici, Dili Schileru, G. Stroescu, Al. Tauber, Ion C. Vasiliu şi Marius Margulius.

Observare. Unii corespondenţi au considerat şi cazul când direcţia 12 — 6 este bisectoarea exterioară a unghiului format de cele două ace ale ceasornicului. Cazul se tratează fără nici o greutate şi constitue un bun exerciţiu pentru corespondenţii cari nu s'au gândit la el.

Generalizare dată de D-l Bernard M. Zuckermann:

AB *fiind un diametru al cadranului, să se afle care sunt orele când dreapta* AB *împarte unghiul, format de cele două ace, într'un raport* k.

Să notăm cu MN direcţia 12 — 6 şi cu HOH' unghiul celor două ace. Considerăm punctele în ordinea M, A, H, N, B, H' (sens retrograd).

Fie

$$a = \overset{\frown}{MA},\ x = \overset{\frown}{AH},\ \frac{AH'}{AH} = k.$$

Avem :

$$\overset{\frown}{MH} = a + x,\ \overset{\frown}{MH'} = kx - a.$$

$$\overset{\frown}{MNH'} = 360^0 - \overset{\frown}{MH'} = 360^0 - (kx - a),$$

această relație având loc pentru $a+x<30^0$. Dacă $30^0<a+x<60^0$, este clar că avem:

$$\widehat{MNH'}=360^0+360^0-(kx-a).$$

Prin urmare în general:

$$\widehat{MNH'}=360^0n+360^0-(kx-a)$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 11).$$

Ținând seamă că minutarul parcurge un drum de 12 ori mai mare decât orarul, avem ecuația:

$$12(a+x)=360^0n+360^0-(kx-a)$$
$$x=\frac{360^0(n+1)-11a}{k+12},$$
$$x+a=\frac{360\ (n+1)+a(k+1)}{k+12}.$$

Deoarece 30^0 de pe cadran corespund unei ore, urmează că orele — soluții ale problemei — sunt date de formula:

$$\frac{360(n+1)-a(k+1)}{30(k+12)}\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 11).$$

Făcând $k=1$, $a=0$ se obțin soluțiile problemei din enunț.

G. I. D.

PROBLEMA 3379. *Fie*

$$P_m=a^m+a^{m-1}b+\ldots+ab^{m-1}+b^m.$$

1°. *Să se demonstreze că*

$$\frac{P_{2n+1}}{a+b}-\frac{n+1}{2n+1}P_{2n}>0$$
$$\frac{P_{2n}}{(a+b)^2}-\frac{2n+1}{4n}\frac{P_{2n-1}}{a+b}>0,$$

oricare ar fi a *și* b.

2°. *Să se deducă inegalitățile:*

$$\frac{P_{2n}}{2n+1}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}$$
$$\frac{P_{2n+1}}{(n+1)(a+b)}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}$$

D. V. Ionescu.

1°. Fie

$$\Delta_m = \frac{P_{m+1}}{a+b} - \frac{m+2}{2(m+1)} P_m$$

adică

$$\Delta_m = \frac{(2m+2)P_{m+1} - (m+2)(a+b)P_m}{2(m+1)(a+b)} .$$

S'a demonstrat în problema 3343 că:

$$(2n+2)P_{n+1} - (m+2)(a+b)P_m = (a-b)^2[P_{m-1} + P_1 P_{m-2} + \ldots + P_{m-1}]$$

aşa că:

$$\Delta_m = \frac{(a-b)^2}{2(m+1)} \frac{P_{m-1} + P_1 P_{m-2} + \ldots + P_{m-1}}{a+b} .$$

Observare asupra semnului lui P_m. Putem scrie

$$P_m = \frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a-b} .$$

Să presupunem $m = 2n$. Atunci

$$P_{2n} = \frac{a^{2n+1} - b^{2n+1}}{a-b} = a^{2n} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}}{1 - \frac{b}{a}} .$$

Primul factor este pozitiv, al doilea este deasemenea pozitiv oricare ar fi a şi b, deci P_{2n} este totdeauna pozitiv.

Să presupunem $m = 2n + 1$. Atunci

$$P_{2n+1} = \frac{a^{2n+2} - b^{2n+2}}{a-b} = (a+b)\, a^{2n} \frac{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} .$$

Din această formă se vede că semnul lui P_{2n+1} este întotdeauna semnul lui $a + b$.

Să revenim acum la Δ_m. Dacă $m = 2n$, atunci

$$\Delta_{2n} = \frac{(a-b)^2}{2(2n+1)} \frac{P_{2n-1} + P_1 P_{2n-2} + \ldots + P_{2n-1}}{a+b} .$$

Numărătorul fracţiei a doua are semnul lui $a + b$, şi deci

$$\Delta_{2n} > 0,$$

adică ;

$$(1) \qquad \frac{P_{2n+1}}{a+b} - \frac{(n+1)}{2n+1} P_{2n} > 0.$$

Dacă $m = 2n + 1$, atunci

$$\Delta_{2n+1} = \frac{(a-b)^2}{4(n+1)} \cdot \frac{P_{2n} + P_1 P_{2n-1} + \ldots + P_{2n}}{a+b}.$$

Numărătorul fracției a doua este pozitiv oricare ar fi a și b. Deci semnul lui Δ_{2n+1} este semnul lui $(a + b)$. Rezultă că

$$\frac{\Delta_{2n+1}}{a+b} > 0,$$

adică:

$$\frac{P_{2(n+1)}}{(a+b)^2} - \frac{2n+3}{4(n+1)} \cdot \frac{P_{2n+1}}{a+b} > 0$$

sau schimbând pe $n + 1$ în n, avem

$$(2) \qquad \frac{P_{2n}}{(a+b)^2} - \frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{P_{2n-1}}{a+b} > 0,$$

ceeace trebuia demonstrat.

2^0. Din inegalitățile (1) și (2) deducem că:

$$\frac{P_{2n+2}}{(a+b)^2} > \frac{2n+3}{4(n+1)} \cdot \frac{P_{2n+1}}{a+b} > \frac{2n+3}{4(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2n+1} P_{2n}$$

adică

$$\frac{P_{2n+2}}{(a+b)^2} > \frac{2n+3}{4(2n+1)} P_{2n}.$$

In această formulă să facem pe rând $n = 0, 1, 2, \ldots$ Deducem

$$\frac{P_2}{(a+b)^2} > \frac{3}{4}$$

$$\frac{P_4}{(a+b)^2} > \frac{5}{4.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{P_{2n}}{(a+b)^2} > \frac{2n+1}{4(2n-1)} P_{2n-2}.$$

Inmulțind toate aceste inegalități, deducem că:

$$P_{2n} > \frac{2n+1}{4n} (a+b)^{2n}.$$

Sau

$$P_{2n} > (2n+1)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}.$$

Deasemenea din inegalitățile (1) și (2) scoatem

$$\frac{P_{2n+1}}{(a+b)^3} > \frac{n+1}{2n+1}\,\frac{P_{2n}}{(a+b)^2} > \frac{n+1}{2n+1}\,\frac{2n+1}{4n}\,\frac{P_{2n-1}}{a+b},$$

adică

$$\frac{P_{2n+1}}{(a+b)^3} > \frac{n+1}{4n}\,\frac{P_{2n-1}}{a+b}.$$

In această formulă să facem $n = 1, 2, \ldots$

Vom avea:

$$\frac{P_3}{(a+b)^3} > \frac{2}{4}$$

$$\frac{P_5}{(a+b)^3} > \frac{3}{4.2}\,\frac{P_3}{a+b}$$

. . . . . .

$$\frac{P_{2n+1}}{(a+b)^3} > \frac{n+1}{4n}\cdot\frac{P_{2n-1}}{a+b}.$$

Inmulțind toate aceste inegalități deducem

$$P_{2n+1} > \frac{n+1}{4^n}(a+b)^{2n+1}.$$

Inegalitățile dela No. 2, sunt deci demonstrate.

D. V. I.

Notă. Soluție diferită în ce privește partea întâia a problemei de D-l I. C. Vasiliu, Elev Inginer.

---

*PROBLEMA 3747. *Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:*

$$(1)\quad \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = a(x^2+y^2)(x^2+z^2) \\ 2y^2 + z^2 + x^2 = b(y^2+z^2)(y^2+x^2) \\ 2z^2 + x^2 + y^2 = c(z^2+x^2)(z^2+y^2). \end{cases}$$

Să se generalizeze.

Gh. I. Balaban.

Observăm că, înlăturând sistemul de soluțiuni banale $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, $z^2 = 0$, rezolvarea sistemului dat se poate reduce la rezolvarea unui sistem liniar, folosind transformările

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{w}\ ,\ x^2 + z^2 = \frac{1}{v}\ ,\ y^2 + z^2 = \frac{1}{u}\ .$$

Avem în primul rând sistemul

$$(3) \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{v} = a\frac{1}{wv}\ ,\ \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{b}{uw}\ ,\ \frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{c}{uv}\ ,$$

care devine imediat

$$(4) \qquad v + w = a\ ,\ w + u = b\ ,\ u + v = c.$$

Punând acum $a + b + c = 2p$, avem, adunând ecuațiunile sistemului (4), ecuațiunea rezolvantă

$$(5) \qquad u + v + w = p,$$

deci:

$$(6) \qquad u = p - a\ ,\ v = p - b\ ,\ w = p - c.$$

Introducând aceste valori în sistemul (2) și procedând întocmai ca pentru sistemul (4), obținem sistemul echivalent cu cel dat, pentru soluțiuni diferite de zero, anume

$$(7) \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} - \dfrac{1}{p-a}\right] \\ y^2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{p-c} + \dfrac{1}{p-a} - \dfrac{1}{p-b}\right] \\ z^2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} - \dfrac{1}{p-c}\right] \end{cases}$$

Insemnând cu x', x'', y', y'', z', z'' rădăcinile ecuațiunilor sistemului (7), vom avea toate sistemele de soluțiuni ale sistemului de ecuațiuni (7), formând toate combinările de trei din cele șase valori x', x'', y', y'', z', z'' astfel însă ca într'un sistem de soluțiuni să nu intre de două ori aceiași literă. Vom avea astfel: (x', y', z'); (x', y', z''); etc.

Pentru a generaliza sistemul dat (1) observăm în primul rând că ecuațiunile sistemului se deduc una din alta prin permutări circu-

lare, apoi că în membrul al doilea ecuațiunile au un produs de doi factori, conținând fiecare factor o necunoscută mai puțin și că membrul întâi este suma celor doi factori din membrul al doilea.

In fine, numărul necunoscutelor este impar.

După aceste observări, *putem scrie sistemul generalizat sub forma concentrată următoare:*

$$(8)\quad \begin{aligned} &2x_k^2 + 2x_{k+1}^2 + \ldots + 2x_n^2 + 2x_1^2 + \ldots + 2x_{k-3}^2 + x_{k-2}^2 + x_{k-1}^2 = \\ &a_k(x_{k-1}^2 + x_k^2 + \ldots + x_n^2 + x_1^2 + \ldots + x_{k-3}^2)(x_k^2 + \ldots + x_n^2 + x_1^2 + \ldots + x_{k-2}^2) \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n \qquad (n = 2p+1),$$

convenind ca

$$x_{n+i} \equiv x_i \quad \text{și} \quad x_{-i} \equiv x_{n-i}\ ,\ x_0 \equiv x_n\ .$$

Făcând transformările:

$$(9)\quad x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 + x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 = \frac{1}{u_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

rezolvarea sistemului (8) se reduce la a sistemului următor:

$$(10)\quad \begin{aligned} &u_1 + u_2 = a_3,\ u_2 + u_3 = a_4, \ldots, \\ &u_{n-1} + u_n = a_1,\ u_n + u_1 = a_2 \quad (n = 2p+1). \end{aligned}$$

Notând $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2S$, obținem, adunând ecuațiunile sistemului (10), rezolvanta:

$$(11)\qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S.$$

Pentru a obține valoarea necunoscutei u_k de exemplu, vom scădea din S suma celorlalte $2p$ necunoscute și cum știm suma a câte două, două, notațiunile întrebuințate ne conduc la valoarea

$$u_k = S - (u_{k-2} + u_{k-1}) - (u_{k+1} + u_{k+2}) - \ldots - (u_{k-4} + u_{k-3})$$

urmărind ecuațiunile sistemului circular, deci avem:

$$(12)\quad u_k = S - a_k - a_{k+3} - a_{k+5} - \ldots - a_{k+n-2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

(în care dacă $k + \lambda \equiv r \pmod n$, constanta $a_{k+\lambda}$ reprezintă pe a_r), numărul constantelor care se scad fiind $\frac{n-1}{2}$. De exemplu, dacă $n = 9$ avem:

$$(13)\quad u_5 = S - a_5 - a_8 - a_1 - a_3;\ u_6 = S - a_6 - a_9 - a_2 - a_4, \text{ etc.}$$

Sistemul (10) fiind rezolvat, vom rezolva sistemul (9) observând că dacă punem :

$$(14) \qquad \sum_{1}^{n} \frac{1}{u_\mu} = (n-1)\,T$$

avem imediat rezolvanta

$$(15) \qquad \sum_{1}^{n} x_\mu^2 = T,$$

deci

$$(16) \qquad x_\mu^2 = T - \frac{1}{u_\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Punând în general

$$x'_\mu = +\sqrt{T - \frac{1}{u_\mu}} \quad \text{şi} \quad x''_\mu = -\sqrt{T - \frac{1}{u_\mu}},$$

vom obţine toate sistemele de soluţiuni (nu nule) combinând în toate modurile posibile valorile $x'_1, x''_1, x'_1, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n$ câte n şi astfel ca într'o combinare să nu fie de două ori acelaş indice.

Evident că rezolvarea sistemului, obţinut din precedentul înlocuind pe x_k^2 prin x_k^m, nu diferă de precedenta decât în ce priveşte numărul sistemelor de soluţiuni.

O altă generalizare a sistemului dat se poate obţine legând numărul factorilor din membrul al doilea de numărul necunoscutelor şi de procedeul de rezolvare a sistemului dat.

Dacă facem sumele de $(n-1)$ termeni cu n necunoscute $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ care conţin toate de exemplu pe x_1^2, ele sunt în număr de $(n-1)$ şi se deduc una din alta prin permutări circulare făcute asupra celorlalte necunoscute. Partea a doua a ecuaţiunii fiind un produs de ordinul $(n-1)$, pentru ca rezolvarea sistemului să se reducă la a unuia de gradul întâi, trebue ca partea întâia a ecuaţiunii să fie suma produselor de câte $(n-2)$ factori din cei $(n-1)$ cari sunt în partea a doua a ecuaţiunii.

Aşa dar, un alt sistem care generalizează sistemul dat, este următorul :

$$(17) \qquad \Sigma(\Pi_{n-2,k}) = a_k \,.\, \Pi_{n-1,k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n).$$

în care, dacă însemnăm cu

$$(18) \qquad S = \sum_{1}^{n} x_\mu^2 \quad \text{şi} \quad S_i = S - x_i^2$$

notaţiunile din sistemul (17) au semnificările următoare :

$$(19)\quad \left|\begin{array}{l} \Pi_{n-1,k} = \Pi(S_i) \qquad i = 1, 2, \ldots k-1, k+1, \ldots n \\ \Pi_{n-2,k} = \Pi_{n-1,k} \times \sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{S_i}\right) \quad (i \neq k). \end{array}\right.$$

Pentru rezolvarea sistemului (17), observăm că, lăsând la o parte soluțiunile toate nule, notațiunile de mai sus conduc la sistemul echivalent următor:

$$(20)\quad \sum_{i}\left(\frac{1}{S_i}\right) = a_k \quad \left|\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots n \\ k = 1, 2, 3, \ldots, n. \end{array}\right.$$

Punând acum, ca în cazul sistemului particular propus $\frac{1}{S_i} = u_i$ avem sistemul

$$(21)\quad \begin{array}{l} \Sigma u_i = a_k \qquad | \; k = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, k-1, k = 1, \ldots n \end{array}$$

care la rândul său este echivalent cu următorul

$$(22)\quad \left|\begin{array}{l} T = \sum_{1}^{n} u_i \\ T - u_k = a_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n), \end{array}\right.$$

deci, dacă punem $\sum_{1}^{n} a_k = (n-1)\,R$, avem în primul rând $T = R$, apoi imediat

$$(23)\quad u_k = R - a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cunoscând valoarea necunoscutelor u_k, avem după notațiunile de mai sus:

$$(24)\quad S_i = \frac{1}{R - a_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sau încă:

$$(25)\quad S - x_i^2 = \frac{1}{R - a_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

din care deducem adunând ecuațiunile sistemului

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R - a_i}$$

deci

$$(26)\quad x_k^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R - a_i} - \frac{1}{R - a_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Insemnând acum cu x'_k şi x''_k cele două valori date de fiecare ecuaţiune, în parte, din (26), vom forma toate sistemele de soluţiuni făcând combinări de câte n valori din $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n$ astfel ca în nici un sistem să n'avem doi indici egali. Sistemul pe care îl obţinem când înlocuim x_k^2 prin x_k^m se rezolvă în acelaşi fel.

Observare. Acest al doilea mod de generalizare permite încă şi alte generalizări luând în partea întâi a ecuaţiunilor sistemului numai doi, patru, etc. termeni în loc de $(n-1)$.

O a treia generalizare a sistemului dat se obţine, păstrând numărul necunoscutelor dar introducând coeficienţi care particularizaţi să dea sistemul dat, şi anume.

$$(27)\quad \begin{cases} (m_1 + n_1)x^2 + m_1 y^2 + n_1 z^2 = a_1 (x^2 + y^2)(x^2 + z^2) \\ m_2 x^2 + (m_2 + n_2) y^2 + n_2 z^2 = a_2 (y^2 + z^2)(y^2 + x^2) \\ m_3 x^2 + n_3 y^2 + (m_3 + n_3) z^2 = a_3 (z^2 + x^2)(z^2 + y^2) \end{cases}$$

care revine la sistemul echivalent:

$$(28)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{u_3} & m_1 u_2 + n_1 u_3 = a_1 \\ y^2 + z^2 = \dfrac{1}{u_1} & m_2 u_2 + n_2 u_3 = a_2 \\ z^2 + x^2 = \dfrac{1}{u_2} & m_3 u_1 + n_3 u_2 = a_3. \end{cases}$$

Sistemul (27) poate la rândul său să fie generalizat ca şi sistemul dat.

Observare. I. Al doilea mod de generalizare a fost dat (pentru cazul când puterea m a necunoscutelor x_k este egală cu $n-1$) de D-l Cezar Coşniţă.

Asemenea el a fost dat pentru patru variabile şi puterea $m = 2$ de D-l Corneliu I. Drăgan.

II. Generalizarea sistemului propus de D-l Gh. Balaban a fost propusă de redacţiunea G. M.

Au rezolvat sistemul propus D-nii: Cezar Coşniţă, Corneliu I. Drăgan, Ioan C. Savin, Dumitru Scarlat, C. D. Ionescu-Ţiu, Petre I. Ghişoiu, Emilian I. Mihalcea, Vladimir I. Crivăţ, Mircea I. Grossu, Ioan C. Boian, Nicolae Donciu (Anul 1930), Nicolaie N. Mihăileanu (Aprilie 1931). O. N. Ţ.

*PROBLEMA 3855. *Fie un triunghiu* ABC *dat şi* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălţimilor sale. Fie* A_2 *şi* A_3 *proiecţiunile lui* A_1 *pe* AB *şi* AC; B_2 *şi* B_3 *proiecţiunile lui* B_1 *pe* BA *şi* BC; C_2 *şi* C_3 *proiecţiunile lui* C_1 *pe* CB *şi* CA. *Se consideră intersecţiunile* M, N, P, Q, R, S *respectiv ale perechilor de drepte* (CA_2, A_1A_3), (BA_3, A_1A_2), (CB_2, B_1B_3), (AB_3, B_1B_2), (AC_2, C_1C_3), (BC_3, C_1C_2). *Să se arate că triunghiul* $A_4B_4C_4$, *format de dreptele* MN, PQ, RS, *este asemenea cu triunghiul dat* ABC.

TH. GH. COCEA.

Patrulaterul $AA_2A_1A_3$, având două unghiuri opuse drepte, este inscriptibil şi avem în consecinţă:

$$\sphericalangle AA_2A_3 = \sphericalangle AA_1A_3 = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle A_1AA_3 = \sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle ACB, \quad (1)$$

deci, dreapta A_2A_3 fiind antiparalelă laturei BC în triunghiul BAC, *patrulaterul* BA_2A_3C *este de asemenea inscriptibil.* Deducem de aci, că:

$$\sphericalangle A_2A_3B = \sphericalangle A_2CB\ ;\ \sphericalangle BA_2C = \sphericalangle BA_3C, \quad (2)$$

şi

$$\sphericalangle BA_3A_1 = \sphericalangle BA_3C - \tfrac{1}{2}\pi = \sphericalangle BA_2C - \tfrac{1}{2}\pi = \sphericalangle A_1A_2C, \quad (3)$$

sau încă:

$$\sphericalangle MA_3N = \sphericalangle A_1A_3B = \sphericalangle A_1A_2C = \sphericalangle MA_2N, \quad (4)$$

adică, *patrulaterul* A_2A_3MN *este şi el inscriptibil.*

Rezultă deci, că

$$\sphericalangle NMA_2 = \sphericalangle NA_3A_2 = \sphericalangle BA_3A_2. \quad (5)$$

Şi comparând (5) cu (2), avem:

$$\sphericalangle NMA_2 = \sphericalangle BCA_2. \quad (6)$$

Aşa dar, *dreptele* MN *şi* CB, *făcând cu secanta* CM *unghiuri corespondente egale, sunt paralele.* In mod analog PQ şi AC; RS şi AB sunt perechi de drepte paralele.

Triunghiul $A_4B_4C_4$ având laturile paralele cu laturile triunghiului ABC, este asemenea (omotetic) cu triunghiul ABC.

— Au rezolvat problema D-nii: S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU, CEZAR COŞNIŢĂ (Bârlad), N. ALDEA (Bucureşti), P. I. GHIŞOIU (Bucureşti), AUREL EM. BĂDESCU, NICOLAE ANTONESCU, MIRCEA I. GROSSU, N. N. MIHĂILEANU (Constanţa).

Observare. Problema conține proprietatea esențială că dreapta MN este paralelă cu BC. Această proprietate este un caz particular, al următoarei proprietăți, foarte generală, după cunoștința noastră neenunțată până astăzi: *Se consideră în triunghiul* BAC *dreapta* DE *antiparalelă la latura* BC *și se descrie pe* DE *un cerc de rază arbitrară, care taie pe* BC *în punctele* A_b *și* A_c *(notând cu* A_b *punctul de lângă vârful* B *și cu* A_c *cel de lângă vârful* C*). Fie* M, N *și* M', N' *respectiv punctele determinate de perechile de drepte* (BE, DA_c), (CD, EA_b) *și* (BE, DA_b), (CD, EA_c).

Dreptele MN *și* M'N' *sunt paralele cu* BC.

1°. Dreapta DE fiind antiparalelă la BC în triunghiul BAC, urmează că patrulaterul BDEC este inscriptibil. Folosind proprietatea că unghiurile, înscrise în același segment de cerc, sunt egale, aplicată în cercurile DEA_c A_b și DECB avem următoarele relațiuni:

$$\sphericalangle MEN = \sphericalangle BEA_b = |\sphericalangle DEA_b - \sphericalangle DEB| = |\sphericalangle DA_c A_b - \sphericalangle DCB|;$$

dar

$$\sphericalangle DA_c A_b \text{ este exterior triunghiului } DA_c C,$$

deci:

$$\sphericalangle MEN = |\sphericalangle A_c CD + \sphericalangle CDA_c - \sphericalangle DCB| = \sphericalangle CDA_c \equiv \sphericalangle NDM,$$

din care rezultă că *patrulaterul* DMNE *este inscriptibil.*

Ca urmare, avem:

$$\sphericalangle MNE = \sphericalangle MED = \sphericalangle BED = \sphericalangle DCB,$$

deci *că, dreptele* MN *și* BC *sunt paralele.*

2°. In același fel, observăm că avem:

$$\sphericalangle M'EN' = \sphericalangle BEA_c = \sphericalangle BEA_b + \sphericalangle A_b EA_c \equiv \sphericalangle MEN + \sphericalangle A_b EA_c =$$

$$= \sphericalangle MDN + \sphericalangle A_b DA_c \equiv \sphericalangle A_c DC + \sphericalangle A_b DA_c = \sphericalangle A_b DC \equiv \overset{\frown}{M'DN'},$$

adică patrulaterul DM'N'E *este inscriptibil,* proprietate din care rezultă că:

$$\sphericalangle M'N'D = \sphericalangle M'ED = \sphericalangle BED = \overset{\frown}{BCD},$$

deci, că *dreptele* M'N' *și* BC *sunt paralele.*

I. Proprietatea este adevărată pentru toate pozițiunile posibile ale antiparalelei DE în unghiul BAC, față cu vârful A și latura BC. Amănuntele demonstrației suferă mici modificări, fără a schimba însă cele două părți esențiale: a) *patrulaterele* MNED *și* M'N'ED *sunt inscriptibile și* b). Dreptele (MN, BC) fac cu aceeași secantă unghiuri corespondente egale.

II. *Dacă* B' *și* C' *sunt punctele unde cercul* DEA_c A_b *taie a doua oară pe* BE *și* CD *respectiv, dreapta* B'C' *este paralelă cu* BC. Avem:

$$\sphericalangle C'B'E = \sphericalangle C'DE \equiv \sphericalangle CDE = \sphericalangle CBE.$$

III. Trapezul MM'N'N este inscriptibil numai dacă triunghiul BAC este isoscel ($\overline{AB} = \overline{AC}$).

IV. Proprietatea demonstrată poate fi enunţată pentru două cercuri secante după cum urmează:

Două cercuri secante O_1 *şi* O_2 *se taie în* A *şi* B. *O secantă comună* ECDF *taie pe* O_1 *în* C *şi* D, *iar pe* O_2 *în* E *şi* F. *Fie* M *şi* N *punctele determinate de perechile de drepte* (AD, BE) *şi* (AF, BC). *Dreapta* MN *este paralelă cu secanta* $\overline{ECDF}$. *Asemenea dreapta* M'N' *determinată de punctele* (AC, BE) *şi* (BD, AF) *este paralelă cu secanta* ECDF.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3940. *Să se găsiască curba* Γ *ştiind că dacă* α, β, γ *sunt respectiv lungimele razei vectoare, a subtangentei şi a subnormalei într'un punct* M, *avem*

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

Gh. Th. Gheorghiu.

Dacă ρ şi θ sunt coordonatele polare ale punctului M se cunosc relaţiile:

$$\alpha = \rho\ ,\ \beta = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}\ ,\ \gamma = \frac{d\rho}{d\theta}\ .$$

Ecuaţia diferenţială a curbei Γ este deci

$$\frac{2}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho^2 d\theta} + \frac{d\theta}{d\rho}$$

care se scrie succesiv

$$2\rho \cdot d\rho \cdot d\theta = d\rho^2 + \rho^2 \cdot d\theta^2$$

$$(d\rho - \rho d\theta)^2 = 0$$

$$d\rho - \rho d\theta = 0$$

$$d\rho = \rho d\theta$$

care integrată ne conduce la ecuaţia:

$$\rho = C \cdot e^{\theta}.$$

Curba Γ este deci o spirală logaritmică.

Au rezolvat problema D-ra ELEONORA ANTONIU şi D-nii: CEZAR COŞNIŢĂ, IOAN N. CRAIU, IULIU DEAC, ADRIAN C. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU, HARALAMB P. IONESCU-BISS, I. MURĂROIU, MIRCEA LEONTE A. NEGREA, AL. A. ROŞU şi MIHAIL VELEA.

D-l N. N. ALDEA a generalizat problema arătând că două spirale logaritmice satisfac relaţiei

$$\frac{2p}{\alpha} = \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma}.$$

PROBLEMA 4032. *Să se găsească un număr de trei cifre astfel că dacă ar fi considerat ca reprezentând un număr scris în baza 15, ar fi tocmai dublul lui.*

N. C.

Soluţie dată de D-l GEORGE ŞT. ROŞCA.

Un număr de trei cifre este de forma abc.

Valoarea lui în sistemul zecimal este:

$$100a + 10b + c.$$

Considerându-l ca reprezentând un număr în baza 15, valoarea sa în sistemul zecimal este:

$$225a + 15b + c.$$

Deoarece, conform enunţului, ultima valoare este îndoitul primei, urmează:

$$225a + 15b + c = 200a + 20b + 2c$$

$$\text{sau} \quad 25a = 5b + c.$$

Rămâne să găsim numerele de câte o singură cifră a, b şi c care satisfac acestei relaţii. Se vede că $a \leqslant 2$.

1°. Pentru $a = 1$, b nu poate lua decât valorile 4 şi 5, în care cazuri c ia respectiv valorile 5 şi 0.

2°. Pentru $a = 2$, singura valoare acceptabilă pentru b este 9 şi pentru c, 5.

In rezumat, avem următoarele trei soluţii:

1) $a = 1$; $b = 4$ $c = 5$ *numărul* = *145*

2) $a = 1$ $b = 5$ $c = 0$ *numărul* = *150*

3) $a = 2$ $b = 9$ $c = 5$ *numărul* = *295*.

Soluţii bune, analoage cu precedenta, dela D-nii : N. N. ALDEA (Stud. Buc.); AUR. EM. BĂDESCU; VICTOR I. IONESCU (Buc.); MIRCEA MĂNESCU (Lic. M. Eminescu Buc.); I. PARAPEANU; N. PATRAULEA (Lic. Mil. N. Filip.); AL. D. STOICA (Lic. Voev. Mihai); NIC. D. ZANE (Lic. Sf. Iosif) şi MARIUS MARGULIUS (Lic. Sp. Haret).

PROBLEMA 4052. *Se cere patratul* dmszu *aşa ca* mdsuz *să fie alt patrat, iar* m + u *şi* s + z *să fie numere prime consecutive.*

D. V. ŞERBAN.

Numărul *zu* poate fi una din grupele şirului

(1) 00 ; 16 ; 44 ; 61 ; 69 ; 96

din acele terminaţiuni de patrate, care răsturnate rămân tot terminaţiuni de 2 cifre ale patratelor perfecte.

Numerele prime

(2) $m + u$ şi $s + z$

pot fi 2 numere consecutive ale şirului

(3) 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17.

Dau lui *zu,* pe rând valorile şirului (1), ceeace determină pe z şi pe u; egalând apoi numerele (2) cu 2 numere consecutive ale şirului (3) se va determina m şi s. După aceia cu valorile găsite se vor forma numere *dmszu,* în care va trebui determinat d aşa ca aceste numere precum şi *mdsuz* să fie patrate perfecte. Determinarea cifrei d va forma ultima parte a soluţiei.

I. $zu = 00 \quad \therefore \quad z = 0$ şi $u = 0$

care duse în (2) arată că m şi s sunt 2 cifre consecutive ale acelui şir aşa ca ms să fie terminaţie de patrat, ceeace nu poate avea loc decât pentru

$$m = 2 \quad , \quad s = 1$$

aşa că numerele căutate ar fi de forma

$d\,2100$ cu $2d\,100$.

II. $zu = 16 \quad \therefore \quad z = 1$ şi $u = 6$

$m + 6$	7	11
$s + 1$	5	7

$\therefore$

m	1	5
s	4	6

$\therefore$ $1^0 \ldots d1416$ cu $1d416$

$2^0 \ldots d5616$ cu $5d661$

III. $zu = 44 \quad \therefore \quad z = 4$ şi $u = 4$.

Fără a mai pune în evidenţă valorile pe care le pot avea $m + u$ şi $s + z$ dau de aici încolo numai tabelele valorilor care rezultă pentru m şi s.

m	1	3	7	9
s	3	1 ; 7	3 ; 9	7

$\therefore$ $3^0 \ldots d1344$ cu $1d344$

$4^0 \ldots d3144$ cu $3d144$

$5^0 \ldots d3744$ cu $3d744$

$6^0 \ldots d7344$ cu $7d344$

$7^0 \ldots d7944$ cu $7d944$

$8^0 \ldots d9744$ cu $9d744$

IV. $zu = 61 \quad \therefore \quad z = 6$ şi $u = 1$.

Acesta este cazul II, în care se schimbă u cu z, deci din cauza simetriei rezultatele vor fi aceleaşi de la II schimbând şi pe m cu s, adică

$d4161$ cu $4d116$

$d6561$ cu $6d516$.

V. $zu = 69 \quad \therefore \quad z = 6$ şi $u = 9$.

m	2	4	8
s	1 ; 7	5	7

$\therefore$ $9^0 \ldots d2169$ cu $2d196$

$10^0 \ldots d2769$ cu $2d796$

$11^0 \ldots d4569$ cu $4d596$

$12^0 \ldots d8769$ cu $8d769$.

VI. $zu = 96 \quad \therefore \quad z = 9$ şi $u = 6$.

Se deduce din precedentul schimbând pe m cu s şi pe z cu u.

$13^0 \ldots d1296$ cu $1d269$

$14^0 \ldots d7296$ cu $7d269$

$15^0 \ldots d5496$ cu $5d469$

$16^0 \ldots d7896$ cu $7d869$.

Determinarea lui d. La cazul I trebuie ca $d21$ să fie pătrat, ceeace are loc pentru $d = 1$. Dar cum 211 nu este pătrat, cazul I nu dă soluție.

Pentru celelalte cazuri, voiu utiliza diferite criterii de recunoașterea patratelor perfecte pentru a reduce numărul ridicărilor la patrat sau al extragerilor de rădăcini. Intre aceste criterii vor fi și acelea stabilite de D-l I. V. MĂTIEȘ în *Gazeta Matematică* Vol. XXXVII, pag. 368, în articolul întitulat: **Asupra ultimelor *p* cifre ale patratelor perfecte.**

Cea mai mică și cea mai mare valoare a lui *dmszu* găsit în tabelele precedente, pot fi 11269 și 99744. Dacă notez cu N^2, patratul căutat, am deci

$$11269 < N^2 < 99744 \quad \therefore \quad 106 < N < 316. \qquad (4)$$

Cu acestea, reluăm pe rând pe fiecare din numerile găsite, în ordinea în care sunt înscrise în tabelele precedente:

1^0. $\quad d1416 = d.10000 + 1416 = 8(1750\,d + 177)$

nu poate fi patrat perfect având ca divizor pe 2 la o putere nepereche.

2^0. Pentru același motiv

$$d5616 = 8(1750\,d + 37).$$

3^0. $\sqrt{d1344}$, conform criteriilor dela pag. 368, Vol. XXXVII, poate fi de forma $500n \pm 188$. Dar ținând seamă de (4) nu se poate lua decât 312 din numerele de această formă. Deci

$$N^2 = d1344 = 312^2 = 9 \times 104^2 = 3^2 \times 8^2 \times 13^2.$$

Ca N^2 să se dividă cu 9 trebuie ca

$$d + 1 + 3 + 4 = 9\mathcal{M} \quad \therefore \quad d = 6.$$

Dar

$$61344 = 9 \times 6816 \neq \text{Mult. } 104$$

nu e soluție.

4^0. Ca la 1^0 căci

$$d3144 = 8(1750\,d + 393).$$

5^0. $\sqrt{d3744}$ poate fi de forma $500n \pm 88$. Cele mai mici numere de această formă sunt 88 și 412, ambele în afara limitelor date de (4).

6°. $\sqrt{d\,7344}$ ca la 3° poate fi 312. Pentru divizibilitatea prin 9 trebuie să avem

$$d + 7 + 3 + 4 + 4 = \mathcal{M}.9 \quad \therefore \quad d = 9$$

$$\therefore \quad 97344 = 3^2 \cdot 8^2 \cdot 13^2 = 312^2.$$

Să examinăm dacă şi 79344 este patrat. Avem

$$79344 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 19 \cdot 29 \neq k^2.$$

Deci 6° nu-i soluţie.

7°. Ca la 1° căci avem

$$d\,7944 = 8\,(1750\,d + 993).$$

8°. $\sqrt{d\,9744}$ poate fi ca la 5° sau 88 sau 412, deci nu satisface neegalităţile (4).

9°. $\sqrt{d\,2169}$ poate fi de forma $250\,n \pm 13$.

Putem avea:

$$d\,2169 = 237^2 = 9 \times 79^2 \quad \text{sau} \quad d\,2169 = 263^2.$$

Pentru primul trebuie să avem

$$d + 2 + 1 + 6 + 9 = \mathcal{M}.9 \quad \therefore \quad d = 9.$$

Dar

$$92169 \neq \text{Mult. } 79$$

nu dă soluţie. Pentru al doilea ridicând pe 263^2 găsim

$$263^2 = 69169 \neq d\,2169.$$

10°. $\sqrt{d\,2769}$ fiind de forma $250\,n \pm 113$ poate fi 137.

Dar

$$137^2 = 18769 \neq d\,2769.$$

11°. $\sqrt{d\,4569}$ fiind de forma $250\,n \pm 87$ poate fi 163.

Dar

$$163^2 = 26569 \neq d\,4569.$$

12°. $\sqrt{d\,8769}$ ca 10° poate fi 137.

Avem:

$$137^2 = 18769 \quad \therefore \quad d = 1.$$

Să examinăm pe 81796. Avem prin descompunere în factor.

$$81796 = 2^2 \times 11^2 \times 13^2 = 286^2.$$

Deci numerele **18769** şi **81796** sunt soluţii.

13°. $\sqrt{d\,1296}$ este de forma $500n \pm 36$. Cea mai mică valoare 464 nu răspunde la (4).

14°. Idem ca la 13°.

15°. $\sqrt{d\,5496}$ fiind de forma $500n \pm 136$ poate avea valoarea 364 care nu dă soluţie.

16°. $\sqrt{d\,7896}$ fiind de forma $500n \pm 164$ poate avea valoarea 336 care nu răspunde la (4).

Se vede că problema are o singură soluţie.

Nu am examinat cazul $d = 0$, care de altfel nu dă soluţie pentrucă numărul $0mszu$ nu este de 5 cifre decât formal.

După cum se vede în soluţia acestei probleme migăloase nu s'au făcut decât 4 ridicări la patrat şi nici o extragere de rădăcină,

COL. GH. BUICLIU.

Notă. 1°. Soluţia exactă şi cea mai complectă a fost dată de D-l P. N. POPESCU. D-sa nu a arătat însă cum a determinat pe *d*.

2°. D-l N. D. ZANE a găsit soluţie exactă făcând numeroase extrageri de rădăcini.

3°. Atât D-l P. N. POPESCU cât şi D-l N. D. ZANE nu au plecat dela determinarea lui *zu* cu ajutorul şirului (1) ci dela determinarea lui *m, s, u, z* cu ajutorul egalităţilor între numerele (2) şi 2 numere consecutive ale şirului (3). Prin aceasta au înmulţit numărul numerelor *dmszu* de încercat.

4°. Nu menţionez pe ceilalţi rezolvitori, ale căror nume au fost publicate pe copertele numerelor anterioare, pentrucă dânşii au dat soluţia exactă fără să arate cum a găsit-o.

Unul din ei a enunţat următorul adevăr nemai pomenit: *«ambele patrate fiind de 5 cifre se vor găsi numai între numerele de 5 cifre»*. Cine mai poate contrazice acest adevăr ?

GH. B.

PROBLEMA 4090. *Tangenta într'un punct* M *al unei curbe* (C) *şi perpendiculara în* M *pe* OM *taie axele de coordonate în patru puncte conciclice. Se cere să se găsească curba* (C).

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţie dată de D-l N. N. ALDEA (Student, Bucureşti).

Fie AB tangenta în M (x, y) la (C) şi CD perpendiculara pe OM.

Se stabilesc imediat ecuaţiile

$$(AB) \qquad Y - y = y'(X - x)$$

$$(CD) \qquad (Y - y)y + (X - x)X = 0$$

din care se deduc coordonatele punctelor A, B, C şi D:

$$A(0, y - xy'); B\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right); C\left(0, \frac{x^2 + y^2}{y}\right); D\left(\frac{x^2 + y^2}{x}, 0\right).$$

Pentru ca aceste puncte să fie conciclice e necesar şi suficient ca

$$(1) \qquad \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}.$$

Avem

$$\overline{MA}^2 = x^2(1 + y'^2) \quad ; \quad \overline{MB}^2 = \frac{y^2}{y'^2}(1 + y'^2)$$

$$\overline{MC}^2 = x^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \quad ; \quad \overline{MD}^2 = y^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

care introduse în (1) dau

$$\frac{xy}{y'}(1 + y'^2) = \pm (x^2 + y^2)$$

$$\therefore \quad xy\,y'^2 \mp (x^2 + y^2) + xy = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm (x^2 + y^2) \pm (x^2 - y^2)}{2xy}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{y} \qquad \therefore \quad y^2 \pm x^2 = a^2 \qquad (2)$$

şi

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x} \qquad \therefore \quad y = Cx. \qquad (3)$$

Curbele (2) reprezintă cercuri şi hiperbole echilatere iar (3) drepte trecând prin origină.

Notă. 1°. D-nii I. N. Sager şi Ad. C. Gheorghiu au găsit numai hiperbolele echilatere.

2°. D-l S-lt. I. C. Savin a găsit numai dreptele.

3°. D-l C. Coşniţă a găsit dreptele şi hiperbolele echilatere.

Gh. B.

*EXERCIŢII

10. Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos A & ar_a \\ 1 & \cos B & br_b \\ 1 & \cos C & cr_c \end{vmatrix} = 0.$$

CEZAR IVĂNESCU.

R. Ţinem seamă de formulele cunoscute:

$ar_a = 2Rp \sin A \operatorname{tg} \frac{1}{2}A = 4Rp \sin^2 \frac{1}{2}A$ şi $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2}A$

care ne spune că scăzând coloana a doua din prima, determinantul rezultat va avea două coloane proporţionale.

11. Proiecţiile centrului unei hiperbole echilatere, conjugată în raport cu un triunghiu, pe laturile acestui triunghiu, sunt trei puncte colineare.

I. D. CÂRSTOIU.

R. Deoarece acest centru se află pe cercul circumscris triunghiului. (A se vedea de ex.: Ex. de Geom. Anal. par P. AUBERT et G. PAPELIER. T. I. p. 240).

PROBLEME PROPUSE

*4191. Să se găsească un patrat de opt cifre aşa ca numărul format de cele patru cifre din mijloc şi rădăcina să fie două numere consecutive.

V. THÉBAULT.

*4192. Să se determine cel mai mic număr întreg N şi numărul întreg corespunzător n astfel ca:

a) Întregii conţinuţi în fracţiile:

$$\frac{N}{n} \quad \frac{N+1}{n+1} \quad \frac{N+2}{n+2} \quad \frac{N+3}{n+3} \quad \frac{N+4}{n+4} \quad \frac{N+5}{n+5}$$

să fie numere consecutive.

b) Aceiaşi chestiune pentru fracţiile dela (N/n) până la $(N+10)/(n+10)$.

c) Generalizare.

IOAN B. FLORESCU.

4193. Se ştie că produsul a patru numere consecutive mărit cu unitatea este un pătrat perfect. Considerând produsul primelor p numere consecutive, se întreabă:

1°. Câte pătrate perfecte distincte putem obţine până la p — luând în toate modurile posibile produsul a patru numere consecutive inferioare lui p şi formând pătratele perfecte respective.

2°. Până la cel mai mare pătrat perfect din cele formate ca la (1°), câte pătrate perfecte mai există — din acelea ce nu răspund legii enunţate.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

4194. Perpendicularele în B şi C pe laturile BA şi CA ale triunghiului ABC se întâlnesc în P_a. Se obţin la fel punctele P_b , P_c. Fie A′ , B′ , C′ proecţiile punctelor P_a , P_b , P_c respectiv pe laturile BC , CA , AB. Să se demonstreze că dreptele AA′ , BB′ , CC′ concură într'un punct I al cărui loc se cere, când unghiul A este constant şi latura BC fixă.

COL. GH. BUICLIU.

*4195. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor triunghiului ABC; A′, A″ picioarele perpendicularelor AA′, AA″ respectiv pe $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1C_1}$; B′, B″ picioarele perpendicularelor BB′, BB″ respectiv pe B_1C_1, B_1A_1; C′, C″ picioarele perpendicularelor CC′, CC″ respectiv pe C_1A_1, C_1B_1 şi în fine A_2, B_2, C_2 mijloacele laturilor B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1.

Dacă $A_3 \equiv (A_1A_2, A'A'')$, $B_3 \equiv (B_1B_2, B'B'')$, $C_3 \equiv (C_1C_2, C'C'')$, dreptele AA_3, BB_3, CC_3 sunt concurente.

TH. GH. COCEA.

*4196. Fie D piciorul bisectoarei (interioară sau exterioară) a unghiului A în triunghiul ABC. Se proiectează A în A_1 pe BC, apoi B în B_1 pe AD şi D în D_1 pe AC.

Să se arate că A_1, B_1, C_1 sunt în linie dreaptă.

S.-LT. A. I. STAN.

*4197. Fiind date expresiunile:

$$A = 5(x+y)^{18} + 11x^2y^2(x+y)^{14} - 5(x+y)^{11}(x^7+y^7) - 11x^2y^2(x+y)^9(x^5y^5) - 5(x+y)^7(x^{11}+y^{11}) - 11x^2y^2(x+y)^7(x^7+y^7) + 11x^2y^2(x+y)^2(x^7+y^7)(x^5+y^5) + 5(x^{11}+y^{11})(x^7+y^7).$$

$$B = (x+y)^{18} \quad (x+y)^{13}(x^5+y^5) - (x+y)^5(x^{13}+y^{13}) + x^{18} + y^{18} + x^{13}y^5 + x^5y^{13},$$

să se găsească relația între A și B.

M. GHERMĂNESCU.

4198. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației:

$$z^3 - (a^2+a+1)z^2 + (a^3-1)z + (a^2+a+1) = 0,$$

când a variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. IONESCU.

4199. Fie I cercul înscris în triunghiul ABC. Se notează cu r_1 raza cercului tangent laturilor unghiului A și cercului I, deasemenea r_2 și r_3 înseamnă razele celorlalte două cercuri analoage. Să se arate cum pot fi construite aceste cercuri și apoi să se stabilească relația:

$$\frac{r_1}{\operatorname{tg}\frac{\pi-A}{4}\cot\frac{\pi+A}{4}} = \frac{r_2}{\operatorname{tg}\frac{\pi-B}{4}\cot\frac{\pi+B}{4}} = \frac{r_3}{\operatorname{tg}\frac{\pi-C}{4}\cot\frac{\pi+B}{4}}.$$

G. I. DUMITRESCU.

*4200. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât o secundă de arc unghiurile unui triunghiu, știind că mediana ce pleacă din un vârf și bisectoarea ce pleacă din alt vârf, taie laturile corespunzătoare sub unghiuri egale cu ale vârfurilor respective.

N. C.

ERATĂ. 1) La Problema 4053 (G. M. Vol. XXXVII, pag. 39), primul rând se va înlocui cu următorul:

Să se determine câte numere prime cu n sunt în șirul:

2) La Problema 4103 (G. M. Vol. XXXVII, pag. 239), fracțiile din enunț sunt:

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n+1}}, \quad \frac{u_{2n}+1}{u_{2n+1}}, \quad \frac{u_{2n}-1}{u_{2n-1}}, \quad \frac{u_{2n}+1}{u_{2n-1}}.$$

3) La problema 4190 să se înlocuiască dubla inegalitate prin

$$e^x \geq 3e^2\sqrt{3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} \qquad (x \geq 1).$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Acikgheozian N. (4094); *Aldea N. N.* (3908, 4094, 113, 22, 33, 45, 66, 71, 79); *Artaki-Acik N.* (3839, 4099, 140, 42, 71); *Cârstoiu D. I.* (4036, P); *Chiriţă* (4178), E); *Coşniţă C.* (4009, 90, 124, 75, 76, N); *Ionescu-Biss P. H.* (2682, 4178, 79, 87, 90, N); *Ivănescu C.* (4173); *Léber M.* (4178); *Mănescu M.* (4124); *Margulius M.* (3755, 984, 4063, 113, 22, 34, 42, 43, 61, 73, 79, 87, 88, C, N, P); *Măţieş V. I.* (P); *Mihăileanu N. N.* (3906), 4185, E, N); *Pârvu A.* (P); *Petrescu I. I.* (3984, 4153, 83); *Preda C. M.* (4124); *Predoescu M.* (P); *Roşca St. Gh.* (4145); *Russu E.* (E, P); *Sager N. I.* (4143, 60, 78, 87); *Savin C. I.* (4178, 79); *Trufinescu* (4171); *Varlam M. P.* (4057, 91); *Zane D. N.* (3908, 4140).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1932

SUMARUL

1. Noui lecţii făcute de savanţi străini la Universitatea din Cluj . . . . . *George Călugăreanu*
2. Premiul „Inginer Al. Roşu".
3. Regulamentul fondului „V. Cristescu".
4. Premiul „Inginer H. Capriel".
5. Note matematice: 15 — 20.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 224.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3937, 3972, 4036, 4094, 4139, 4144, 4171.
11. Exerciţii: 12 — 18.
12. Probleme propuse: 3335, 4201 — 4210.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul 1932 se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică“* („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 21, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 54, 55, 56, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 72, 77, 80, 81, 82, 84, 86, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 200, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică“* („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

NOUI LECȚII FĂCUTE DE SAVANȚI STRĂINI LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

Reușita celui de al doilea Congres al matematicienilor români, din Mai 1932, deja relevată în ziare cași în periodicele matematice românești, nu se oprește la cele 5 zile de comunicări, conferințe și discuții libere împărtășite de cei 140 de participanți; săptămâna matematică dela Turnu-Severin-Băile Herculane s'a continuat printr'o săptămână matematică la Cluj și această a doua săptămână e cât se poate de interesantă pentrucă și de data aceasta (cași în Mai 1929, după primul Congres al matematicienilor români, la Cluj) elita invitaților străini ne-a oferit, într'un număr restrâns de lecții făcute la Universitatea din Cluj, câteva aspecte noui din câmpul atât de vast al Analizei matematice moderne.

Dăm mai jos o scurtă indicație asupra acestor frumoase lecții în care ni s'au prezentat, de către specialiști cunoscuți, chestiuni cari în majoritatea lor aparțin teoriei funcțiunilor analitice.

* * *

D-l Waclaw Sierpinski, profesor la Univ. din Varșovia, era deja cunoscut Universității clujene din 1929 când ne-a ținut câteva lecții de o formă desăvârșită, asupra numerelor transfinite. Ne-a făcut, de data aceasta, două lecții introductive asupra teoriei ansamblurilor analitice, scopul acestor lecții fiind o definiție cât mai ușor accesibilă a acestor ansambluri, urmată de scurte indicații asupra proprietăților lor. Noțiunea de ansamblu analitic, datorită lui Souslin (elev al cunoscutului matematician rus Lusin) s'a impus ca o generalizare a noțiunei de ansamblu măsurabil B (în sensul lui Borel). Ansamblurile analitice se definesc în așa fel încât ele se bucură de proprietăți remarcabile: sunt măsurabile L (în sensul lui Lebesgue); un ansamblu analitic transformat cu ajutorul unei funcții continue oarecare, dă alt ansamblu care e și el analitic. O definiție geometrică interesantă a ansamblurilor analitice se dă cu ajutorul unei construcții numită *ciurul lui* Lusin (crible de Lusin): se consideră în planul *xoy* un sistem infinit de segmente rectilinii paralele cu *ox*; se taie cu paralela la *oy* trecând prin punctul $x = a$; se consideră ansamblul punctelor *a* pentru care această paralelă la *oy* taie sistemul de segmente într'o infinitate de puncte ce nu formează un ansamblu bine ordonat (bien ordonné). Se obține astfel un ansamblu analitic, și orice ansamblu analitic se poate construi astfel.

Ansamblurile analitice au aplicaţii interesante la teoria funcţiilor de o variabilă reală : fie $f(x)$ o funcţie continuă de x; valorile lui x pentru care există o derivată $f'(x)$ unică şi finită formează un ansamblu analitic; deasemenea valorile lui x pentru care o funcţie oarecare de o variabilă reală e continuă, formează un ansamblu analitic şi orice ansamblu analitic se poate obţine astfel.

* * *

D-l Arnaud Denjoy, profesor de Analiză matematică la Sorbona, a expus în trei comunicări, rezultate originale în legătură cu trei subiecte diferite : O proprietate statistică a minimului funcţiilor întregi de ordin finit, în care autorul arată că nu se poate da în general o limitare inferioară $\neq o$ a minimului $m(r)$ al unei funcţii întregi, dar se poate da o limitare statistică a acestuia în sensul că o anumită integrală dela r la ∞ luată asupra unei expresii în care intră funcţia întreagă, poate fi limitată inferior. In a doua comunicare, D-l Denjoy a expus nişte exemple de funcţii analitice de z, continue în tot planul şi singulare dealungul unui arc de curbă. Se demonstrează cu ajutorul teoremei lui Painlevé că în acest caz arcul de curbă trebue să aibă o lungime infinită între două puncte oarecare ale sale, căci în caz contrar teorema lui Painlevé cere ca funcţia să fie holomorfă pe acel arc. Intre alte exemple, D-l Denjoy formează asemenea funcţii servindu-se de integrale luate dealungul curbei singulare, prin analogie cu exemplele formate de D-l Pompeiu, care oferă funcţii analitice singulare într'o regiune de arie > 0.

A treia comunicare, începând cu observaţia că proprietatea unui ansamblu de a fi măsurabil nu se păstrează printr'o transformare continuă oarecare, conţine un exemplu de funcţie continuă care transformă un ansamblu de măsură 1 într'altul de măsură 0, exemplu format cu ajutorul şirurilor de numere ale lui Farrel.

* * *

D-l Serge Mandelbrojt, Profesor la Univ. din Clermont-Ferrand, a făcut trei comunicări în legătură cu propriile D-sale cercetări asupra funcţiilor quasi-analitice, punându-le în legătură cu seriile lui Dirichlet.

* * *

D-l Paul Montel, profesor de teoria funcţiilor la Sorbona, a făcut şase lecţii asupra funcţiilor univalente. Se ştie că se numeşte funcţie univalentă într'un domeniu (D) o funcţie de variabilă com-

plexă care nu ia niciodată de mai multe ori aceiaş valoare in (D). Studiul acesta se referă deci la domeniul de holomorfie al unei funcţii analitice, şi nu la vecinătatea punctelor singulare despre care până mai acum câţiva ani teoria funcţiilor se ocupa aproape exclusiv; după amuzanta expresie a D-lui MONTEL, ne ocupăm în acest caz şi de regiunile unde o funcţie analitică e sănătoasă, nu numai de regiunile unde ea e bolnavă. După definiţia precisă a univalenţei, precum şi a multivalenţei de ordin p oarecare, ilustrată cu exemple, urmează studiul unor operaţii aplicate la funcţiile univalente. Astfel se arată că condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie să fie p-valentă e ca să fie limită a unui şir uniform convergent de funcţii p-valente în domeniul considerat. Urmează indicaţii asupra funcţiilor univalente care reprezintă un cerc pe un domeniu steliform (étoilé) sau pe un domeniu convex, şi condiţiile corespunzătoare pentru funcţiune.

Se arată că dacă o funcţie e univalentă într'un cerc există un cerc concentric interior în care funcţia se bucură de proprietatea de steliformitate (étoilement) şi altul în care ea se bucură de proprietatea de convexitate. Vine apoi rândul funcţiilor univalente în cercul de rază 1, proprietăţile coeficienţilor lui TAYLOR corespunzători acestor funcţii şi teorema lui J. DIEUDONNÉ, iar în urmă inegalităţile numite «Verzerrungssatz» şi «Drehungssatz». In tot acest studiu D-l MONTEL pune în evidenţă rolul important jucat în continuu de o funcţie elementară care se pare că ar fi situată, din toate punctele de vedere, la limita dintre univalenţă şi multivalenţă: e funcţia $\frac{z}{(1-z)^2}$. In adevăr toate limitele superioare, găsite valalabile pentru mai multe cantităţi ce caracterizează o funcţie univalentă în cercul de rază 1, îşi ating efectiv limita pentru cazul acestei funcţii elementare. D-l MONTEL dă apoi o desvoltare amănunţită unor proprietăţi noui ale polinoamelor univalente, indicând rezultate sugestive şi demne de a fi reluate.

* * *

D-l B. HOSTINSKI, profesor la Univ. din Brno (Cehoslovacia) a făcut o lecţie asupra integrării substituţiilor lineare; este o interesantă extindere a noţiunei de integrală, pe care VOLTERRA a introdus-o în legătură cu problema integrării ecuaţiilor diferenţiale lineare.

GEORGE CĂLUGĂREANU
Universitatea din Cluj.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“

D-l AL. AL. ROȘU licențiat în Matematici, fiul regretatului inginer AL. ROȘU († 17 Apr. 1917) fost membru al Societății «Gazeta Matematică», a donat în memoria tatălui său, suma de 500 lei *Gazetei Matematice,* pentru a se acorda un premiu autorului celui mai bun articol de geometrie elementară, publicat în volumul XXXVII, al *Gazetei Matematice,* de elevi de liceu, studenți ai Facultăților de Științe, elevi ai Școalelor Politechnice sau ai Școalelor Militare. In caz când nu se va fi publicat nici un articol, care să poată fi premiat, premiul urmează a fi acordat corespondentului cu cea mai bogată activitate de geometrie, avută în paginele volumului XXXVII.

Subsemnații, membrii ai comisiunei, însărcinată cu acordarea premiului «INGINER AL. ROȘU», cercetând volumul XXXVII al *Gazetei Matematice,* nu am găsit nici un articol de geometrie, al cărui autor să fie elev de liceu, de școală militară, de școală politechnică sau student de facultate.

Cercetând notele și problemele de geometrie, ne-am oprit atenția asupra lucrărilor D-lui ADRIAN C. GHEORGHIU, student în Matematici al Facultății de Științe din București. D-sa se află în fruntea tuturor corespondenților Gazetei, prin următoarele lucrări de geometrie publicate în volumul XXXVII:

1°. *Nota 15.* O definiție a cercurilor directoare p. 135.

2°. *Nota 36.* Asupra problemei 2809 generalizată p. 374, continuare la nota 53 din vol. XXXVI p. 458. Asupra problemei 2809.

3°. Soluțiile problemelor 2656 p. 218 și 3704 p. 307.

4°. Soluția problemei 4040 p. 234.

5°. Soluția problemei 3994 p. 463.

Propunem deci ca premiul «INGINER AL. ROȘU» să fie acordat D-lui ADRIAN C. GHEORGHIU.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“:
N. BOTEA, COLONEL GH. BUICLIU,
COLONEL GH. LITEANU.

Acest raport s'a citit și aprobat în Ședința din 30 Nov. 1932.

Notă. In ultimul timp s'au mai primit dela D-l A. A. Roșu 500 de lei, pentru a se acorda premiul „ING. AL. ROȘU“ și în anul XXXVIII în aceleași condițiuni, ca premiul acordat.

REGULAMENTUL FONDULUI „V. CRISTESCU“

Art. 1. — Societatea «Gazeta Matematică» primind donațiunea D-lor GHEORGHE, MIRON și ALEXANDRU NICULESCU, pentru a cinsti memoria iuginerului V. CRISTESCU, membru fondator al *Gazetei Matematice* în jurul căreia a animat și activat intens neîntrerupt peste 33 ani, constitue un fond denumit fondul «V. CRISTESCU», din al cărui venit să se acorde un premiu indivizibil anual, autorului celui mai bun articol referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, dintre cele publicate în *Gazeta Matematică* în ultimul volum apărut; autorul articolului va fi elev de liceu, de școală militară, de politechnică sau student de facultate.

Art. 2. — Fondul se poate mări atât de donatori cât și de alte persoane. Toate sumele atribuite fondului se transformă în rente de Stat sau Efecte garantate de Stat.

Art. 3. — In cazul când într'unul sau mai mulți ani dearândul nu s'au publicat articole putând fi premiate, premiul se cumulează până la acordarea lui.

Art. 4. — A doua adunare generală anuală alege o comisie compusă din 2 membri și un delegat, care prezintă primei adunări generale a anului următor raportul indicând autorul ce se propune spre premiare.

Art. 5. — Raportul comisiei se publică în No. 10 al *Gazetei Matematice* care apare în luna nașterii Ing. V. CRISTESCU.

Art. 6. — In cazul când Societatea nu s'ar mai putea obliga cu realizarea dorinței donatorilor, atunci fondul realizat până în acel moment va fi trecut în proprietatea liceului Național din Iași care a avut pe V. CRISTESCU ca elev, iar dacă acesta n'ar mai exista, liceului celui mai vechi din Iași, în funcțiune. In acest caz, premiul se va acorda anual elevului celui mai bun la matematici al liceului.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL“

In conformitate cu prevederile din Regulamentul fondului «INGINER H. CAPRIEL» urma să se publice în numărul de față rezultatul premiului pe anul 1932.

Societatea neprimind nici o lucrare până la 1 Mai 1932, Adunarea Generală dela 24 August 1932 a hotărît schimbarea subiectului lucrării, care se va anunța în «*Gazeta Matematică*» anul XXXVIII, numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările se vor trimite pe adresa D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei No. 23 București 4, până la 1 Mai 1934.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

*15. *Sur des produits de quatre nombres entiers.*

1. **Théorème.** *Le produit de quatre nombres entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.*

Voici une demonstration simple de ce théorème [1]).

Le produit de quatre nombres entiers consécutifs,

$$P = x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x),$$

est de la forme $P = k^2 + 2k$, en posant $k = x^2 + 3x$.

Or, on a toujours

$$k^2 < P < (k+1)^2.$$

Le produit P, compris entre les carrés de deux entiers consécutifs, n'est donc jamais carré parfait.

Les racines entierès de P, à l'unité près, par defaut et par excès, sont

$$x^2 + 2x \qquad \text{et} \qquad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

N. B. En observant la forme de la dernière de ces racines on obtient cette autre propriété connue :

Le produit de quatre nombres entiers consécutifs augmenté, de l'unité est un carré dont le chiffre des unités est 1 *ou* 5. *Ce chiffre est* 1 *dans quatre cas sur* 5.

2. **Théorème.** *Le produit de quatre nombres entiers consécutifs de même parité n'est jamais carré parfait.*

Le produit

$$P = x(x+2)(x+4)(x+6) = (x^2+6x)^2 + 8(x^2+6x), \quad (1)$$

est de la forme $P = k^2 + 8k$, en posant $k = x^2 + 6x$.

Mais on a toujours

$$(k+3)^2 < P < (k+4)^2.$$

Le produit P, compris entre les carrés de deux entiers consécutifs n'est donc pas carré parfait.

Les deux racines entières, à l'unlte près, de P sont

$$x^2 + 6x + 3 \qquad \text{et} \qquad x^2 + 6x + 4,$$

x etant le plus petit des nombres considérés.

1) Pour une autre démonstrations de ce théorème, voir, par exemple, T. Hayashi, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1915, p. 150.

N. B. En ajoutant 16 unités aux deux membres de (1), on a

$$P + 16 = (x^2 + 6x + 4)^2;$$

d'où cette propriété également connue :

Si on ajoute le nombre 16 *au produit de quatre nombres entiers consécutifs de même parité, on obtient toujours un carré parfait. Lorsque les quatre nombres sont impairs, le dernier chiffre du carré est* 1 *ou* 5 *et lorsque les quatre nombres sont pairs, le dernier chiffre du carré est* 6 *ou* 0.

3. Proposons-nous de trouver quatre nombres consecutifs de même parité connaissant leur produit P.

x étant le plus petit des entiers cherchés, la racine carrée entière de P, à l'unité près par défaut, égale $x^2 + 6x + 3 = k$.

On a donc

$$(x + 2)(x + 4) = k + 5.$$

Mais la racine entière du produit de deux nombres qui diffèrent de deux unités égale le plus petit de ces nombres.

$x + 2$ est donc la racine entière de $k + 5$, et x se trouve déterminé.

Exemple. $P = 1666665$; $k = 1290$.

$x + 2$ est la racine entière de 1295, soit 35, et les nombres cherchés sont 33, 35, 37, 39.

V. Thébault.

*16. *Probleme investigative.* In ultimul număr din *The Mathematical Gazette,* D-l P. N. Andersen din Sidney atrage atenția profesorilor de matematici din cursurile superioare asupra unor probleme și exerciții de matematici mai proprii de a stârni interes pentru cercetări de cât cele ce se dau de obiceiu și cărora le dă calificativul de *investigative.* Tipul obișnuit de probleme este de a se da datele și a se cere anume rezultate, elevului nerămâindu-i de cât de a găsi calea de rezolvare, demonstrația, etc. El nu creează noutăți, ci caută drumuri. Problemele investigative urmărește noutăți. Autorul dă trei tipuri de asemenea probleme. In tipul A ar intra probleme ca aceasta :

„Bisectoarele unghiurilor B *și* C *ale unui patrulater se taie*

în G; *ele taie diagonalele în* F *şi* H, *şi latura* AB *în* M *şi* N. *De ce proprietăţi se bucură figura?*

Problema a fost pusă unei clase cu elevi, de etate medie de 16 ani. Cel mai slab a găsit 5 proprietăţi, cel mai tare 40 şi media a fost 13.

In tipul B se dau oarecare directive spre o anumită soluţie ce se are în vedere. Aşa e chestiunea :

„In triunghiul ABC *se duce bisectoara exterioară unghiului* BAC. *Dacă* AB $>$ AC *de ce parte a triunghiului taie bisectoara cercul circumscris?"*

In un timp dat, din 28 elevi 8 au răspuns şi demonstrat bine, 6 au găsit bine dar au demonstrat prost, 4 au dat rezultat eronat şi restul n'au făcut nimic.

In tipul C, sunt problemele la care nu se dă nimic; se cere elevilor să vie fiecare cu un exerciţiu nou făcut de ei. Elevii aduc exerciţii banale, dar ei sunt încurajaţi. Unii au adus exerciţii mai grele. Astfel e următorul :

„Fie patratul ABCD. *Pe latura* AB *se face la exterior triunghiul dreptunghic* ABE. *Pe* BE *se duce perpendiculara* CF. *Dreapta* AB *nu poate fi bisectoară unghiului* DAE".

Incă din 1911, în o comunicare pe care am făcut-o la *Societatea română de ştiinţe,* am arătat un mod de investigare pentru problemele de aritmetică. In legătură cu metoda dată atunci am propus în *Gazeta Matematică,* Anul XVI, pag. 278 următoarea problemă :

„Să se enunţe o problemă practică de aritmetică a cărei soluţiune să se facă prin rezolvarea unei ecuaţii complecte de gradul III".

Ideia unor astfel de probleme a părut stranie atunci căci problema avea enunţul unei probleme; ea ne vine astăzi pe altă cale din Australia !

I. Ionescu.

17. *Soluţiile în numere diferite, de o cifră, ale ecuaţiei :*

$$xx' + yy' = zz'.$$

Această chestiune a intervenit la unele probleme puse în *Gazeta Matematică,* la redijarea cărora am avut nevoie de toate soluţiile

pe care le reproduc aci şi care se pot găsi uşor pe o tablă a lui PITAGORA. Vom da soluţiile presupunând $x<x', y<y', z<z', x<y$.

$x=0$.	1.
$x'=$ Număr diferit de x, y, z, y', z'.	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5,
$y=1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4.$	3, 4, 5, 5, 6, 4, 5, 6, 2, 2, 3,
$y'=6, 8, 3, 4, 6, 9, 4, 6, 8, 6.$	6, 7, 6, 8, 9, 8, 9, 7, 7, 8, 9,
$z=2, 2, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 4, 3.$	4, 5, 4, 6, 7, 5, 6, 5, 3, 3, 4,
$z'=3, 4, 6, 8, 4, 6, 6, 9, 6, 8.$	5, 6, 8, 7, 8, 7, 8, 9, 6, 7, 8,

$x=1$.	2.
$x'=6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9.$	3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9,
$y=2, 2, 3, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 3, 3.$	4, 5, 3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3,
$y'=7, 9, 4, 4, 5, 5, 6, 9, 6, 5, 7.$	9, 6, 9, 6, 8, 8, 7, 6, 8, 4,
$z=4, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 3, 4, 5.$	6, 4, 5, 4, 6, 4, 5, 4, 6, 5
$z'=5, 8, 9, 5, 9, 6, 5, 7, 7, 6, 6.$	7, 9, 7, 7, 7, 9, 8, 8, 9, 6,

$x=2$.	3.
$x'=9$.	5.
$y=3$.	6.
$y'=8$.	8.
$z=6$.	7.
$z'=7$.	9.

I. IONESCU.

18. *Asupra problemei 4087.*

La pag. 354 «G. M.» (XXXVII s'au dat trei soluţii acestei probleme. In cele ce urmează voiu da o altă soluţiune distinctă.

Dacă S, S' şi S'' sunt ariile triunghiurilor ABC, A'B'C' şi $A_1B_1C_1$, avem, după o teoremă cunoscută:

$$S^2 = S'S''$$

căci triunghiurile A'B'C' (format de tangente) şi $A_1B_1C_1$ (ortic al tr. ABC) sunt asemenea şi în acelaşi timp unul circumscris iar altul

înscris triunghiului ABC. Inlocuind suprafețele cu valorile lor și ținând seamă că : $4RS = abc$ obținem :

$$S' = R^2 \operatorname{tgA} \operatorname{tgB} \operatorname{tgC}$$

relația cerută de problemă.

CEZAR IVĂNESCU.

19. *Soluțiile întregi ale ecuației* $\sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{n} a_{ik} x_i x_k = 0.$

In articolul publicat sub titlul de mai sus în „*Gazeta Matematică*", Anul XXXVII, pag. 202, problema nu este dusă mai departe de ceeace am stabilit asupra aceleași chestiuni în articolul: *Asupra rezolvării în numere întregi a unei ecuații omogene de gradul al doilea cu* n *necunoscute.* (Anul XXXVII, pag. 45).

De altfel nici procedeul de a deduce soluția nu diferă; astfel eu m'am servit de transformarea :

$$(1) \quad x_1 = tx'_1 + a_1 u \; ; \; x_2 = tx'_2 + a_2 u \; ; \; \ldots \; x_n = tx'_n + a_n u,$$

la care am ajuns după câteva considerațiuni logice.

In (1) $x_1 , x_2 . . . x_n$ sunt necunoscutele ; $x'_1 , x'_2 . . . x'_n$ soluția particulară ; $a_1 , a_2 . . . a_n$ parametri iar t și u două numere întregi.

Abstracție făcând de ultima egalitatea din (1), avem simbolic

$$(1') \qquad x_i = tx'_i + a_i u.$$

Impărțim cu x_n și notăm $\frac{x_i}{x_n} = X_i$, $\frac{t}{x_n} = 1$, $\frac{u}{x_n} = \rho$:

$$\therefore \quad (2) \qquad X_i = x'_i + a_i \rho,$$

relație care nu diferă decât foarte puțin în notație de transformarea (3) din articolul al cărui titlu îl poartă nota de față, transformarea luată empiric.

In exemplele dela pag. 205 cred că s'au strecurat unele greșeli, deoarece soluțiile date nu verifică întotdeauna ecuația. Astfel la ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + t^2$, dacă facem :

$$\alpha_1 = 3 \; , \; \alpha_2 = 2 \; , \; \gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = 1,$$

găsim :

$$x = 0 \; , \; y = 4 \; , \; z = 4 \; , \; u = 2 \; , \; v = 2 \; , \; t = 12.$$

Ori :

$$0^2 + 4^2 + 4^2 \neq 2^2 + 2^2 + 12^2.$$

IOAN B. FLORESCU.

20. *Asupra Problemei 2308 şi asupra Notei 3 din „G. M.“ Vol. XXI, p. 17.*

In articolul meu „Asupra descompunerii unui trinom cu coeficienţii raţionali“ din *Revista Matematică din Timişoara* vol. VII, p. 195, am semnalat insuficienţa rezultatelor lui TR. LALESCU.

In general pentru ca trinomul:

$$x^{m+n} + ax^n + b, \qquad a,\ b \text{ întregi}$$

să aibe un factor de gradul al doilea $x^2 + \beta x + \gamma$, β, γ întregi trebuie ca să avem:

$$a = (-1)^m \frac{\Delta_{m+n-1}}{\Delta_{n-1}} \quad , \quad b = (-1)^{m-n} \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{n-1}} \gamma^n$$

unde:

$$\Delta_0 = 1 \ , \ \Delta_1 = \beta \ , \ \Delta_k = \beta\Delta_{k-1} - \gamma\Delta_{k-2} \ , \ k = 2, 3, \ldots$$

Numerile β, γ fiind întregi condiţia cerută este ca a, b să fie întregi.

Pentru $n = 2$ am găsit că trebuie şi e deajuns ca $\gamma^{\frac{m+1}{2}}$ să se dividă prin β. Dacă $m = 3$ suntem în cazul studiat de LALESCU în nota citată şi deci γ^2 trebuie să se dividă prin β. Rezultatul obţinut de LALESCU este parţial deoarece se presupune că γ se divide prin β ceeace nu e necesar.

Pentru $n = 3$ am arătat în articolul meu că trebuie şi e deajuns ca β^{m+2} să se dividă prin $\beta^2 - \gamma$. Dacă $m = 2$ suntem în cazul problemei 2308. Enunţul acestei probleme este deci inexact şi soluţia din vol. XXXIII, p. 254 incompletă deoarece se presupune că β^2 se divide prin $\beta^2 - \gamma$ ceeace nu e necesar.

Să considerăm mai general polinomul:

$$(1) \qquad x^{m_0} + c_1 x^{m_1} + \ldots + c_{k-1} x^{m_k - 1} + c_k$$

$$c_1 \ , \ c_2 \ , \ \ldots \ c_k \quad \text{întregi}$$

$$m_0 > m_1 > \ldots > m_{k-1}.$$

Ne putem pune problema de a găsi coeficienţii c_i astfel ca acest polinom să aibe un factor de forma:

$$(2) \qquad x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$$

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ \ldots \ a_k \quad \text{întregi.}$$

Dacă scriem că polinomul (1) este egal cu produsul polinomului (2) printr'un polinom de gradul $m_0 - k$ obținem un sistem de m_0 ecuații lineare care determină în general în mod unic coeficienții c_i precum și coeficienții polinomului multiplicator în funcție de numerile a_i. Condiția cerută va fi deci ca valorile astfel calculate ale coeficienților c_i să fie întregi.

Aceste fiind spuse putem ușor calcula polinomul (1). Să notăm cu $x_1, x_2, \ldots x_k$ rădăcinile ecuației obținute egalând cu zero polinomul (2).

Să punem:

$$\Delta\begin{pmatrix} a_1 , a_2 , \ldots a_n \\ \rho_1 , \rho_2 , \ldots \rho_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{\rho_1} & a_1^{\rho_2} & \ldots & a_n^{\rho_n} \\ a_2^{\rho_1} & a_2^{\rho_2} & \ldots & a_n^{\rho_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{\rho_1} & a_n^{\rho_2} & \ldots & a_n^{\rho_n} \end{vmatrix}$$

așa că $\Delta\begin{pmatrix} a_1 , a_2 , \ldots a_n \\ 0 , 1 , \ldots n-1 \end{pmatrix}$ este determinantul lui VAN DER MONDE a cantităților $a_1\ a_2, \ldots a_n$. Dacă $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ sunt numere întregi și pozitive $\Delta\begin{pmatrix} a_1 , a_2 , \ldots a_n \\ \rho_1 , \rho_2 , \ldots \rho_n \end{pmatrix}$ se divide prin $\Delta\begin{pmatrix} a_1 , a_2 , \ldots a_n \\ 0 , 1 , \ldots n-1 \end{pmatrix}$.

Rezultă așa dar că dacă $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k$ sunt întregi pozitivi expresiunea:

$$(3) \qquad P\begin{pmatrix} x_1 , x_2 , \ldots x_k \\ \rho_1 , \rho_2 , \ldots \rho_k \end{pmatrix} = \frac{\Delta\begin{pmatrix} x_1 , x_2 , \ldots x_k \\ \rho_1 , \rho_2 , \ldots \rho_k \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} x_1 , x_2 , \ldots x_k \\ 0 , 1 , \ldots k-1 \end{pmatrix}}$$

e un polinom simetric de $x_1 , x_2 , \ldots x_k$ și prin urmare un ponom în raport cu coeficienții $a_1 , a_2 , \ldots a_k$. Bine înțeles expresiunea (3) are un sens bine determinat și când două sau mai multe din rădăcinile x_i devin egale.

Polinomul (1) va fi în general egal cu:

$$\frac{\Delta\begin{pmatrix} x_1 , x_2 , \ldots x_k , x \\ 0 , m_{k-1} , m_{k-2} , \ldots m_0 \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} x_1 , x_2 , \ldots x_k \\ 0 , m_{k-1} , \ldots m_1 \end{pmatrix}}$$

şi prin urmare:

$$c_i = (-1)^i \frac{\Delta\begin{pmatrix} x_1 , & x_2 , & \ldots & x_k \\ 0 , & m_{k-1} , & \ldots & m_0 \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} x_1 , & x_2 , & \ldots & x_k \\ 0 , & m_{k-1} , & \ldots & m_1 \end{pmatrix}} =$$

$$= (-1)^i \frac{P\begin{pmatrix} x_1 , & x_2 , & \ldots & x_k \\ 0 , & m_{k-1} , & \ldots & m_0 \end{pmatrix}}{P\begin{pmatrix} x_1 , & x_2 , & \ldots & x_k \\ 0 , & m_{k-1} , & \ldots & m_1 \end{pmatrix}}$$

$$i = 1, 2, \ldots k.$$

Coeficienţii c_i sunt deci exprimaţi raţional în raport cu a_i. Pentru calcularea expresiunei (3) se pot stabili diverse relaţiuni de recurenţă. Stabilirea lor nu prezintă nici o dificultate şi ar constitui un bun exerciţiu pentru corespondenţii Gazetei.

T. Popoviciu.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ŞTIINŢE

Secţia Matematici

Sesiunea Iunie 1932

ANUL PREPARATOR

MATEMATICI ELEMENTARE

Secţia Fizico-Chimice şi Chimie

I. O persoană are un capital de 1.050.000 lei şi cu o parte din el cumpără:

1°. O casă;

2°. O grădină care-l costă $^5/_8$ din preţul casei.

Restul capitalului îl pune jumătate la o bancă cu 5% şi jumătate la altă bancă cu 4%.

Dela amândouă băncile are un venit anual în total de lei 25.312,50.

Să se calculeze:

1°. Cât îl costă casa?

2°. Cât îl costă grădina?

3°. Ce sumă a pus la fiecare bancă?

II. Să se găsească valorile lui x cari verifică ecuaţia:

$$2(\sin x - 2\cos x) = 3\cos x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}.$$

III. Să se arate că expresiunea:

$$\frac{\sqrt{\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2-x+1}} + x}{2x+2}$$

se poate pune sub forma:

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3+1}}.$$

Secţia Matematici, Fizico-Matematici şi Fizica

I. Trei lucrători au primit ca plată pentru lucrul făcut 26.400 lei. Primul a lucrat 35 zile şi $^1/_2$; al doilea 32 zile şi $^1/_4$; al treilea 28 zile şi $^3/_5$. Care a fost plata unui lucrător pe zi? Ce sumă a primit fiecare lucrător?

II. Distanţa dela Bucureşti la Cluj e de 503 km. Trenul rapid No. 3 pleacă după amiază la $14^h\,30^m$ şi ajunge la Cluj noaptea la $0^h\,1^m$. Trenul rapid No. 4 pleacă în acelaş zi dela Cluj spre Bucureşti la $10^h\,35^m$ dimineaţa. Viteza acestor două trenuri e sensibil uniformă pe tot parcursul afară de între Câmpina şi Predeal, pe o distanţă de 48 km., unde rapidul No. 3 urcă cu o viteză cu $^1/_9$ mai mică, iar rapidul No. 4 se coboară cu o viteză cu $^1/_{10}$ mai mare decât viteza de pe tot restul parcursului. Ştiind că Predealul e la 144 km. dela Bucureşti se cere să se calculeze:

1°. Viteza trenurilor No. 3 şi No. 4 între Bucureşti şi Câmpina şi între Câmpina şi Predeal cu o aproximaţie de $^1/_2$ m.

2°. Când ajunge trenul No. 3 la Câmpina?

3°. Când ajunge trenul No. 4 la Câmpina?

4°. La ce distanţă de Cluj şi la ce oră se întâlnesc aceste două rapide?

ALGEBRĂ ELEMENTARĂ

Algebră

Se dă un semicerc cu raza r şi cu centrul în O. Se duce tangenta în A paralelă cu baza semicercului şi pe această tangentă se iau lungimile $AB = AE = x$. Din B şi E se duc tangentele BC şi ED la semicerc. Se cere:

1°. Aria trapezului BC DE în funcţie de x.

2°. Valorile lui x pentru care aria totală născută de trapezul ABCO printr'o rotaţie complectă în jurul lui AO este egală cu aria sferei de rază r.

3°. Ecuația care dă pe x în așa fel ca raportul între aria trapezului BCDE și aria patratului cu latura r să fie egală cu un număr m dat. Să se discute ecuația.

Trigonometrie

Într'un patrulater ABCD avem $\hat{B} = 2\hat{A}$; $\hat{C} = 4\hat{A}$; $\hat{D} = 5\hat{A}$, iar diagonala BD împarte unghiul $\hat{B}$ în două părți egale.

1°. Să se arate că patrulaterul e un trapez oblic.

2°. Să se arate că baza mare e de 3 ori cât baza mică.

3°. Știind că perimetrul e egal cu $\frac{10}{\sqrt{3}} + 2$, să se calculeze cu două zecimale exacte laturile AB, BC, CD, DA.

Mecanica

Un punct material greu M descrie fără frecare o dreaptă D care face unghiul α cu planul orizontal. El e legat cu un fir elastic de un punct fix A situat în planul vertical al dreptei. Știind că tensiunea firului AM este proporțională cu lungimea lui, să se determine :

1°. Poziția de echilibru a punctului M pe dreapta D.

2°. Unghiul β [tgβ], pe care îl face această dreaptă cu firul AM în poziția de echilibru.

3°. Reacțiunea dreptei asupra punctului.

Se va introduce distanța AO dela punctul A la dreapta D.

Aplicație numerică

$\alpha = 35^0$ AD = 0,5 m. Greutatea lui M 0,55 kgr. iar tensiunea firului $\frac{1}{2}$ MA.

GEOMETRIE ELEMENTARĂ

I. Fie C proecția unui punct M al unui cerc dat O pe un diametru AB al său. Se descrie cercul cu centrul în M și raza MC și să însemnăm cu D și E punctele de contact ale acestui cerc cu tangentele duse din A și B la acest cerc. Să se arate că dreptele AD și BE sunt paralele și că DE este tangentă la cercul O.

II. Se dă un cerc de centru O și un punct exterior A. Se duc prin punctul A secantele ABB′ și ACC′, care tae cercul O în B și B′, C și C′. Fie M punctul de intersecție al cercurilor ABC′ și ACB′. Să se arate, cu ajutorul inversiunei, că locul descris de punctul M este cercul descris pe AO ca diametru.

ANUL I

MATEMATICI CENERALE

Proba teoretică

1. Fiind dată familia de curbe

$$y = 2\,Cx^2 - (C^2 + 3)\,x + 1$$

se cere:

a) să se determine înfăşurătoarea acestor curbe

b) să se reprezinte grafic această înfăşurătoare.

c) să se calculeze curbura înfăşurătoare în punctele cu ordonată maximă sau minimă.

2. Să se găsească soluţiunea generală a ecuaţiei

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (y+2)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-1)\,z = (y+2)\,e^x + y^2 - 1$$

care variabila z este funcţiune de cele două variabile independente x şi y.

Proba practică

1°. Să se determine cu două zecimale exacte valoarea integralei definite

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x+\sqrt{x^2+2}}\,dx.$$

2. Să se găsească funcţiunea primitivă a expresiunii diferenţiale

$$\left(\frac{y}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} y - 2xy^2\right)dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} + \operatorname{tg} x - 2x^2 y\right)dy$$

în cazul când se va constata că este integrabilă.

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

Proba teoretică

I. Se dă:

$$S_1 = \frac{3a}{2},\quad S_2 = \frac{9a^2}{4},\quad S_3 = \frac{27a^3}{8} - \frac{9a}{2} - \frac{3b}{2} + 3$$

unde

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3,\quad S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\quad S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

1°. Să se formeze ecuaţiile având ca rădăcini pe x_1, x_2 şi x_3, la coeficienţii depinzând de parametri a şi b.

2°. Să se discute natura rădăcinilor acestor ecuaţii după poziţia în plan a punctului de coordonate a şi b.

3°. Să se deducă numărul de tangente ce se pot duce din diferite puncte ale planului la curba

$$y = x^3 - 3x + 2.$$

II. Să se demonstreze convergența seriei :

$$\sum \frac{n+1}{n^3 + 7n^2 + 12n}$$

și să se calculeze suma ei.

Proba practică

Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2 = 0 \\ y^2 + xy - y - 1 = 0 \end{cases}$$

calculându-se cu două zecimale exacte valorile corespunzătoare ale lui x și y, să se dea interpretarea geometrică a sistemului și să se explice numărul soluțiilor găsite, aplicând teorema lui BÉZOUT

GEOMETRIE ANALITICĂ

Proba teoretică

1°. Să se scrie ecuația generală a conicelor ce trec prin punctele A (1,0) B (— 2,0) C (0_1 — 1), P ($0_1 p$).

2°. Să se arate că locul geometric al centrelor acestor conice este o conică (Γ), care trece prin patru puncte ale căror coordonate se cer.

3°. Să se studieze natura conicelor (Γ) după diferitele poziții ale punctului P pe Oy.

4°. Să se determine conica (Γ) astfel ca să fie o iperbolă (I), cu o direcție asimptotică paralelă cu dreapta $y = \frac{\sqrt{3}}{2} x$. Să se găsească în acest caz asimptotele iperbolei (I), ecuația axelor, coordonatele focarelor, precum și ecuația redusă a acestei curbe.

Proba practică

Să se construiască curba :

$$x^3 + x^2 y + x - y = 0.$$

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Intersecția a două cilindre. Cadrul are dimensiunile orizontale și verticale de 270 mm. și 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală, la distanța de 180 mm. de sus în jos. Cilindrul C are ca bază în

planul orizontal cercul cu centrul O (60,88,0) de rază 22 mm., iar generatoarele fac în orizontal şi vertical cu linia de pământ unghiurile α şi β astfel ca $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{7}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{7}$. Cilindrul C_1 are ca bază în planul orizontal cercul cu centrul în O_1 (135,148,0) de rază 38 mm., iar generatoarele fac în orizontal şi vertical cu linia de pământ unghiurile α_1 şi β_1 astfel ca

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{9}{2}, \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{5}{2}.$$

ANUL II

ANALIZA MATEMATICĂ p. I

Proba teoretică

I. Se consideră suprafaţa S născută prin rotirea în jurul lui Oz a unui cerc de rază a, tangent în origină la Oz. Se cere :

1°. Elementul de arc pe suprafaţa S.

2°. Planul tangent într'un punct oarecare M.

3°. Liniile de curbură ale suprafeţei S.

4°. Liniile asimptotice.

(Timp de lucru 3 ore)

II. Se consideră funcţiunea :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2 - 1}{2} \operatorname{arc\,tg} x - x \operatorname{L} \sqrt{1 + x^2}.$$

1°. Să se dezvolte în serie după puterile lui x, presupunând $|x| < 1$. Să se arate că seria obţinută este convergentă pentru $x = \pm 1$.

2°. Să se calculeze $f(\frac{1}{2})$ cu 5 zecimale exacte.

III. Se consideră suprafaţa :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0$$

şi fie (C) intersecţia cu planul

$$lx + my + nz = 0.$$

Să se găsească punctul M pe curba (C) pentru care distanţa OM este maximă sau minimă.

IV. Se consideră ecuaţia :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0.$$

Să se arate că dacă se înlocuesc x, y, z cu variabilele u, v, w din ecuaţiile:

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=5$$

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1$$

ecuaţia devine

$$(v-w)f(w)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial u}+(w-u)f(v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial v}+(u-v)\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial w}=0.$$

Proba practică

Să se calculeze integrala:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^6x\,dx}{\operatorname{tg}^5x(1-3\cos^2x-4\cos^4x)}.$$

MECANICĂ RAŢIONALĂ p. I

Proba teoretică

O placă omogenă foarte subţire are forma unui triunghiu echilateral ABC de latură a. Această placă este grea şi se notează cu p greutatea ei. Vârful A al plăcii este legat cu un fir flexibil şi inextinsibil de lungime tot a de un punct fix O. Vârful B al plăcii este obligat să se mişte fără frecare pe o vergea subţire de lungime superioară lui $2a$, care trece prin O, este situată dedesubtul planului orizontal care trece prin O şi face cu acest plan unghiul α.

1°. Să se determine poziţia de echilibru (planul ABC este vertical). Să se demonstreze că în poziţia de echilibru planul ABC este vertical şi să se calculeze unghiul $AOB=\theta$ în funcţiune de α. Aplicaţie numerică $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

2°. Să se aplice metoda travaliului virtual pentru determinarea poziţiei de echilibru şi să se verifice rezultatul dela No. 1°.

3°. Reacţiunea vergelii.

2. Un punct M descrie cercul (O) de rază a. Unghiul pe care-l face raza vectoare OM cu axa Ox fiind egal cu timpul se proectează M în A şi B pe axele dreptunghiulare Ox şi Oy şi fie P proecţia lui M pe AB. Când punctul M descrie cercul (O) punctul P descrie o curbă (C), care întâlneşte axa Ox în M_0.

1°. Să se calculeze în funcţie de t coordonatele centrului de greutate al arcului de curbă M_0P.

2°. Se rostogoleşte toată figura în jurul axei Ox de 2π. Fie S aria descrisă de arcul PM_0 şi S′ aria descrisă de segmentul de dreaptă PA. Să se arate că $S = \frac{6}{5} S'$.

Proba practică

Un punct material M de massă egală cu unitatea descrie curba (C) definită de ecuaţia

$$r = a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

r şi θ fiind coordonatele polare, după legea ariilor.

1°. Presupunând că la momentul iniţial $t = 0$ punctul M se găseşte pe axa Ox în M_0 şi că mărimea vitezei iniţiale este $a\sqrt{2}$. Să se determine t în funcţie de r.

2°. Să se calculeze componentele vitezei în coordonate polare în funcţie de θ. Se duce prin O vectorul OQ echipolent cu viteza punctului M. Să se calculeze coordonatele carteziene ale punctului Q în funcţie de θ.

3°. Să se calculeze forţa care ar produce mişcarea punctului M în funcţie de r.

4°. Să se calculeze raza de curbură în punctul M prin consideraţii cinematice.

ASTRONOMIE

Ştiind că latitudinea Clujului e 46°41′16″ şi că la 16 Iunie 1932 coordonatele ecuatoriale ale stelei α din Orion au fost

$$\alpha = 5^h\,51^m29^s \;;\; S = 7°23'53''$$

să se calculeze:

1°. La ce oră siderală steaua α din Orion a ajuns la înălţimea de 38°17′43″ deasupra orizontului.

2°. Care a fost azimutul stelei în acel moment.

3°. Cât timp a stat steaua deasupra orizontului Clujului.

ŞCOALA POLITECHNICĂ „REGELE CAROL II" DIN BUCUREŞTI

Examen de admitere în Anul Preparator

(27 — 29 Octomvrie 1932)

— Toate chestiunile obligatorii. — Timpul acordat 4 ore. —

ARITMETICA

1. Să se găsească o fracţie ireductibilă cu numitorul 21 şi alta, iarăşi ireductibilă, cu numărătorul 55 ştiind că suma lor este tot una cu diferenţa dintre îndoitul celei dintâiu şi a doua.

2. Laturile unui dreptunghiu sunt în raportul 1 : 5,5129, iar aria lui este echivalentă cu a unui pătrat de 7,925 m. latură. Care este raportul între perimetrul dreptunghiului şi al patratului? Rezultatul se va da cu două zecimale exacte.

3. Problema propusă cu Nr. 4202, din acest număr.

GEOMETRIA

1. Se dau două cercuri tangente exterioare în punctul A, cu centrele în O şi O' şi cu razele $OA = R$, $O'A = R'$. Cele două cercuri au trei tangente comune: AT, care le atinge pe amândouă în A; BB', care atinge cercul O în B şi cercul O' în B'; CC' analoagă cu cea precedentă. Tangenta AT taie tangenta comună BB' în punctul T. Să se demonstreze că triunghiul OTO' este dreptunghiu. Să se deducă expresia lungimii AT şi de aci a lungimii $t = BB'$ a tangentei comune cu ajutorul razelor R şi R'.

2. Se presupune acum că pentru cele două cercuri tangente O şi O' se cunoaşte depărtarea $d = OO'$ dintre centre, precum şi lungimea $t = BB'$ a tangentei comune. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care are ca rădăcini razele necunoscute R şi R' ale cercurilor Să se deducă de aci condiţia de posibilitate a problemei.

ALGEBRA

I. Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$(1) \qquad \begin{aligned} y &= 2\,(x - a) \\ 2\,(y - 1) &+ x = 0 \end{aligned}$$

în care a este o constantă oarecare;

Se cere:

1. Să se rezolve sistemul.

2. Să se determine cea mai mică valoare pozitivă a constantei a cu condiţia ca soluţiile sistemului (1) să fie numere întregi.

3. Constanta a astfel determinată, să se reprezinte grafic ecuaţiile (1).

II. Se dă polinomul:

$$(2) \qquad Y(x) = x^2 - 6x + \frac{23}{3}$$

şi se înseamnă cu $Y(a)$, rezultatul înlocuirii în polinom, a lui x prin a.

1. Se cere să se dovedească identităţile:

$$Y(1) + 4Y(3) + Y(5) = 0$$

$$Y(1) + 3 \cdot Y\left(\frac{7}{3}\right) + 3\,Y\left(\frac{11}{3}\right) + Y(5) = 0.$$

2. m fiind o constantă oarecare, să se arate că:

$$Y(3+m) = Y(3-m)$$

şi să se determine m astfel ca:

$$Y(3+m) = Y(3-m) = 0.$$

3. Să se reprezinte grafic funcţiunea (2), când x variază între 1 şi 5.

TRIGONOMETRIA

1. Să se calculeze cea mai mică valoare pozitivă a lui x, dată de relaţia

$$\cos^3 x = \frac{0{,}002573}{\cos 35^0 25' - 1}.$$

2. O persoană vrea să măsoare suprafaţa unui teren plan, având forma unui patrulater oarecare. Acea persoană dispune numai de un lanţ, cu care poate măsura lungimile laturilor terenului, precum şi alte lungimi pe teren, dar — din cauza unui obstacol — nu poate măsura lungimile diagonalelor terenului. Să se arate ce măsurători trebuesc făcute pe teren, şi apoi ce calcule ar fi de făcut, spre a afla suprafaţa terenului. Să se scrie formulele de întrebuinţat. Ce verificare s'ar putea face că nu s'a greşit?

3. Să se rezolve ecuaţiile:

$$x \sin a - y \sin b = 0,$$

$$x \cos a + y \cos b = p,$$

$$mx \cos(a+u) - ny \cos(b-u) = 0,$$

în raport cu x, y şi u; să se arate că valoarea lui u este dată de relaţia

$$\operatorname{tg} u = \frac{m \operatorname{cotg} a - n \operatorname{cotg} b}{m+n}.$$

COMPOZIŢIA ŞTIINŢIFICĂ

Isvoare de energie în natură.

(Se va da câte un exemplu din ştiinţele fizico-chimice-naturale).

BIBLIOGRAFIE

EUGÈNE BLANC. *Problèmes et Compléments de Mecanique. Ed. Gauthier-Villars & C-nie, Paris.*

Este un volum de 287 pag., care se adresează candidaţilor pentru certificatul de matematici generale ; poate fi utilizat şi de elevii şcoalelor tehnice superioare. Uvragiul e divizat în trei părţi : prima parte cuprinde chestiuni relative la cinematică, a doua chestiuni referindu-se la dinimica punctului, iar a treia probleme de examen. La inceput sunt date câte-va sfaturi practice, relative la modul de tratare al problemelor de mecanică.

Partea relativă la cinematică coprinde cinci capitole. Primul capitol se referă la consideraţiuni generale privitoare la problemele de cinematică, reamintind rezultatele ce se stabilesc în cursurile de cinematică. Celelalte capitole se referă la : studiul cinematic al mişcării unui punct ale cărei ecuaţii sunt date ; determinări de mişcări când se dau anumite elemente ; aceiaşi chestiune în cazul unei acceleraţii centrale ; cinematica solidului şi compuneri de mişcări.

Partea de dinamică cuprinde : un capitol privitor la principiile dinamicei şi alte noţiuni preliminare ; alt capitol se referă în special la determinarea forţei capabile a produce o mişcare dată ; în fine un ultim capitol — cel mai important — se referă la determinări de mişcări sub acţiunea unor forţe date sau de legătură, ceeace autorul numeşte probleme de al doilea tip.

Fiecare capitol, atât în cinematică cât şi în dinamică, cuprinde o parte introductivă cu recapitularea rezultatelor corespunzătoare din curs, apoi o serie de probleme tratate, în fine probleme propuse spre rezolvare. Tratarea problemelor rezolvate e făcută complect şi minuţios,

Partea a treia cuprinde enunţul problemelor de mecanică propuse la Sorbona, pentru examenul de matematici generale, dela Iulie 1919 până la Octomvrie 1930. Unele din aceste probleme sunt şi rezolvate complect, iar pentru altele sunt date indicaţii pentru rezolvarea lor.

Uvragiul mai cuprinde şi două note : una relativă la omogenitatea formulelor, iar alta relativă la un câmp de forţe datorit greutăţii şi unei atracţiuni.

A. G. I.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVIII. No. 9, partea I. Septemvrie 1932. New York. Adunarea din Syracuza a Secţiunii Asociaţiunii americane pentru înaintarea ştiinţelor, de F. F. DECKER. In memoria lui JOHN WESLEY YOUNG, de R. D. BEETLE şi C. E. WILDER. RAMSEY asupra fundamentelor matematicilor, de B. A. BERNSTEIN. KRYLOFF asupra fizicei matematice, de J. B. SCARBOUROUGH. Mc CONNELL asupra calculului absolut de T. Y. THOMAS. Cinci teze asupra calculului variaţiunilor, de A. DRESDEN. Rezumate de memorii.

The Mathematical Gazette. Vol. XVI. No. 220. Octomvrie 1932, Londra. Importanţa istoriei matemeticilor în raport cu studiul technicei matematice, de G. J. WHYTROW. Un calculator cu scară variabilă şi cu trei puncte de

control, de H. G. GREEN. Inițiativa în școlile superioare de matematici. Exerciții investigative, de P. N. ANDERSEN. Matematica și cultura, de J. N. SULLIVAN. Evitarea metodelor simbolice în rezolvarea ecuațiunilor diferențiale, de R. J. A. BARNARD. O fracție continuă a lui STIELTJES, de E. G. PHILLIPS. O nouă ordine în predarea trigonometriei, de H. ABSON.

American Mathematical Society. *List of officers and members*, 1931 — 1932. New York.

M. HAIMOVICI & E. POPA. *Corrispondenza per piani tangenti paralleli.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia nazionale dei Lincei)* Roma 1932-X

Journal de Mathematiques Elementaires publié par H. VUIBERT. Anul 57. No. 4. Noemvrie 1932. Paris.

Boletin Matematico. Anul V. No. 8. Octomvrie 1932. Buenos Aires. Maximum și minimum relativ la dreapta $Ax + By + C = 0$, de B. I. BAIDAFF. În căutarea soluției, de B. I. BAIDAFF.

J. REY PASTOR. *Boletin del Seminario matematico.* Vol. III. No. 10. Iulie 1932. Distanța orientată a conjugatelor, de J. REY PASTOR. O limitare de integrale, de C. BIGGERI. Generalizarea unei teoreme a lui CESARÒ pentru integrale divergente, de C. BIGGERI. Aplicarea teoriei integralelor singulare la demonstrarea unei formule a lui STIELTJES.

R. RISSER. Applications de la statistique à la démographie et à la biologie. Paris 1932. Editor Gauthier-Villars et C-ie.

Această carte e fascicola III din tomul III al volumelor: «*Les applications de la théorie des probabilités aux sciences économiques et biologiques*» din colecțiunea: «*Traités du calcul des probabilités et de ses applications*» de sub direcțiunea D-lui E. BOREL. Autorul se ocupă în prima parte de chestiunile în legătură cu morbiditatea și invaliditatea, cu formarea tablelor referitoare și reprezentarea lor analitică. Partea a doua se ocupă cu stabilirea tablelor de mortalitate ale populațiunii generale, cu mortalitatea dedusă din recensăminte și liste de morți, și cu reprezentarea analitică a mortalității populațiunii generale, cu legea lui MAKEHAM, cu legi de supraviețuire ca a lui THIELE. Partea treia se ocupă cu indicațiuni asupra aplicării analizei matematice și a calculului probabilităților la biologie și compararea rezultatelor obținute cu cele date de experiențe. În acest domeniu nou de aplicațiuni ale matematicilor autorul se ocupă de teoriile D-lui V. VOLTERRA asupra asociațiunilor biologice și lupta pentru viață, ale căror rezultate au fost confirmate de rezultatele statistice ale pescuitului în Marea Adriatică; cu teoria lui W. R. THOMPSON asupra acțiunii paraziților entomofagi. Ultimul capitol se ocupă cu ajustarea analitică și mecanică.

Cartea conține ultimele rezultate obținute în domeniile mai sus arătate și este de folos pentru statisticiani și biologi cari vor să cunoască cuceririle pe care le fac matematicile în câmpurile lor de cercetare precum și pentru matematicieni cărora le oferă direcțiuni noui de explorat.

I. I.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XVIII. No. 3. Septemvrie 1932. Iaşi.

Boletin Matematico Elemental. Anul III. No. 5. Iulie 1932. Buenos Aires. Locurile geometrice mai usuale, de B. I. B.

Idem. No. 8. Octombrie 1932. Formula averilor, de B. I. BAIDAF.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XII. No. 9. Noemvrie 1932. Timişoara. Soluţia generală a problemei 518, de COL. GH. BUICLIU. Sur le triangle isoscèle, par V. THÉBAULT. Câteva aplicaţii ale teoremelor lui GULDIN de D. V. IONESCU.

Journal de Mathematiques Elementaires publié par H. VUIBERT. Anul 57. No. 4. Noemvrie 1932. Paris.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIV. Fascicola IV. Octombrie 1932. Buenos Aires. Asupra unei noui introduceri ale polinoamelor lui LEGENDRE, de C. DIEULEFAIT.

CERERI

224. S'a publicat in româneşte vreun studiu elementar asupra coordonatelor baricentrice?

Dacă da, de unde se poate procura şi cu ce preţ?

MARIUS MARGULIUS.

DIVERSE

Societatea Română de ştiinţe, Secţia Matematică, a ţinut şedinţă in seara zilei de 31 Octomvrie, când s'au făcut următoarele comuuicări:

D-l I. IONESCU: Centenarul primei cărţi româneşti de matematică tipărită la Bucureşti.

D-l O. ONICESCU: Ecuaţii integrale de prima speţă.

In seara zilei de 7 Noemvrie s'au făcut următoarele comunicări:

D-l N. CIORĂNESCU: Câteva aplicaţii a acelei de a doua teoreme a mediei.

D-l G. MIHOC: Teoremele limite din teoria lanţurilor multiple.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3937. a, b, c, *fiind laturile unui triunghiu, să se deducă o soluţiune a ecuaţiunii:*

$$a\sqrt{(4x^2-b^2)(4x^2-c^2)}+b\sqrt{(4x^2-c^2)(4x^2-a^2)}+c\sqrt{(4x^2-a^2)(4x^2-b^2)}=abc.$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

Dacă facem înlocuirile:

$$a=2R\sin A\ ,\ b=2R\sin B\ ,\ c=2R\sin C\ ,\ x=R\sqrt{y}$$

ecuaţia devine

$$\sum \sin A\sqrt{(y-\sin^2 B)(y-\sin^2 C)}=\sin A\,.\,\sin B\,.\,\sin C$$

şi identitatea bine cunoscută

$$\sum \sin A\cos B\cos C=\sin A\sin B\sin C$$

ne arată că $y=1$ este o soluţiune a ecuaţiunei de mai sus. Deci $x=\pm R$ sunt soluţiuni ale ecuaţiei problemei.

Au rezolvat problema D-nii: CONST. CINSKI, ROMEO DUMITRAŞCU, ADRIAN C. GHEORGHIU, PETRE I. GHIŞOIU, TUDOR GOSPODIN, S.-LT. EUG. IACOB, CONST. LUPESCU, NICOLAE N. MIHĂILEANU, MIRCEA LEONTE NEGREA, I. PAREPEANU, CONST. D. RUSU, MIHAIL VELEA şi IOAN ZARDA.

PROBLEMA 3972. *Un funcţionar depune la o bancă sumele pe care le are disponibile şi poliţele pe care le are de încasat şi împrumută de acolo sumele de care are nevoie. Pentru sumele pe care le depune la bancă i se dă o dobândă de 8% însă numai cu începere dela aceeaşi zi a lunii următoare şi numai pentru miile de lei întregi pe care le are depuse. Pentru sumele ce împrumută dela bancă i se socoteşte 16% dobândă la suma întreagă, cu începere chiar din ziua în care rămâne dator băncii. Acelaşi procent de 16% se aplică şi la sconturi. Dobânda nu se adaugă la capital decât la încheere de conturi sau la finele anului.*

La 1 Ianuarie 1930 funcţionarul avea depusă, de mai malte luni, suma de 3000 lei pentru care şi-a luat dobânzile cuvenite până atunci. La 2 Februarie depune la bancă, pentru încasare, o poliţă de 8100 lei cu scadenţa 2 Iulie 1930. La 20 Martie ia dela bancă 15000 lei pentru a-şi plăti chiria. La 19 Aprilie depune la bancă 8040 lei.

Se cere situaţia contului la 1 Iunie 1930.

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l M. Margulius (Liceul Spiru Haret, Buc.).

Depunerile pe care le face funcţionarul sunt următoarele:

1. Suma de 3000 lei la 1 Ianuarie cu dobânde de $8^0/_0$, curgând chiar din acea zi, căci suma era depusă cu mai mult de o lună înainte.

2. Valoarea reală a poliţei depuse la 24 Februarie cu scadenţa peste 5 luni (la 2 Iulie). Scontul comercial al acestei poliţe pe 5 luni cu $16^0/_0$ este de $(8100 \times 16 \times 5)/1200 = 540$ lei, care scăzuţi din valoarea nominală de 8100 lei, ne rămâne ca valoare reală $(8100 - 540) = 7560$ lei. Suma depunerilor până la 24 Februarie este dar de $(3000 + 7560) = 10560$ lei.

3. Suma de 8040 lei depusă la 19 Aprilie.

Funcţionarul a împrumutat o singură dată dela bancă suma de 15000 lei la 20 Martie. Cum la acea dată el nu avea depuşi decât 10560 lei, reese că de fapt a împrumutat dela bancă $(15000 - 10560) = 4440$ lei, cu care i-a rămas dator, până la 19 Aprilie, când, prin depunerea ce a făcut-o atunci, a achitat această datorie şi i-au mai rămas depuşi la bancă $(8040-4440)=3600$ lei. La 1 Iunie se închide contul şi ridică această sumă.

De aci reese că funcţionarul are să ia următoarele dobânzi:

1. La suma de 3000 lei dela 1 Ianuarie până la 20 Martie, adică pe timp de $(31 + 28 + 19)$ zile, sau 78 zile, care face $(3000 \times 8 \times 78)/36000 = 52$ lei.

2. La suma de 7000 lei dela 2 Martie (o lună după depunere) până la 20 Martie când şi-a ridicat depunerile avute. Această sumă a stat dar cu dobândă numai 18 zile şi a adus dobânda de $(7000 \times 8 \times 18)/36000 = 28$ lei.

3. La suma de 3000 lei dela 19 Mai la 1 Iunie, adică 13 zile, ceeace face $(3000 \times 8 \times 13)/36000 = 8{,}67$ lei dobândă.

Totalul dobânzilor de încasat este dar $(52 + 28 + 8{,}67) = 88{,}67$ lei.

La calculul dobânzilor s'a ţinut seama de condiţiunile puse în enunţ, de a calcula dobânzile numai la miile de lei ale sumelor depuse şi cu incepere după o lună dela depunere.

Funcţionarul are însă de plătit dobândă la suma împrumutată dela bancă de 4400 lei pe tot timpul cât a durat împrumutul, adică dela 20 Martie la 19 Aprilie, care face $(11 + 19) = 30$ zile. Procentul fiind de data aceasta 16, dobânda va fi $(4400 \times 16 \times 30)/36000 = 59{,}20$ lei.

La încheerea contului pe 1 Iunie, situaţia este următoarea: Funcţionarul are depuşi 3600 lei, are să ia dobânzi în valoare de 88,67 lei şi are să plătească dobânzi în valoare de 59,20 lei. El va retrage dar dela bancă suma de $(3600 + 88{,}67 - 59{,}20) = 3629{,}47$ lei.

Notă. Problema a fost încercată de D-nii: H. P. Ionescu, C. D. Rusu, C. Pepica, Al. D. Stoica, N. N. Mihăileanu, G. St. Roşca, N. Gluşco, M. D. Motoc, dar au ajuns la alte rezultate, dând diferite interpretări enunţului, sau făcând unele simplificări, care eşiau din cadrul enunţului. Chiar d-l M. Margulius nu a ajuns la rezultatul dat în redijarea de mai sus, întrucât la rezolvarea problemei s'a inspirat de unele precizări puse la problema 4121, deşi calea urmată este tocmai cea dată mai sus. Acele precizări erau însă aferente numai la problema 4121. I. I.

---

*PROBLEMA 4036. *Fie triunghiul* ABC *înscris în cercul* O. *Fie* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălţimilor sale şi* B_2, C_2 *proiecţiunile vârfurilor* B, C *pe tangenta în* A *la* O. *Să se demonstreze:*

1°. *Cercul* $A_1B_2C_2$ *e tangent la* BC;

2°. *Cercurile* $A_1B_2C_2$ *şi* AB_1C_1 *sunt concentrice.*

Locot. I. Gh. Zamfirescu.

Proprietăţile cerute în enunţul problemii sunt consecinţe imediate a proprietăţii interesante următoare: *Dreptele* A_1B_2 *şi* A_1C_2 *sunt, respectiv, paralele cu laturile* AC *şi* AB *ale triunghiului* ABC, pe care o putem demonstra după cum urmează:

Patrulaterul BB_2AA_1 fiind inscriptibil şi AB_2 fiind tangentă la cercul O, avem imediat:

$$\sphericalangle AA_1B_2 = \sphericalangle ABB_2 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BAB_2 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle A_1AC,$$

deci *dreptele* A_1B_2 şi AC *sunt paralele.*

Analog demonstrăm că dreptele A_1C_2 şi AB sunt paralele.

Acum, observăm că perpendicularele pe mijloacele laturilor A_1B_2 şi A_1C_2 trec prin centrele C' şi B' (mijloacele lui AB şi AC) ale patrulaterelor inscriptibile BB_2AA_1 şi CC_2AA_1 ; de altă parte, aceste drepte fiind perpendiculare respectiv pe A_1B_2 şi A_1C_2 sunt respectiv perpendiculare, (pe paralelele acestora) pe AC şi AB, deci ele sunt respectiv paralele cu înălţimile BB_1 şi CC_1 şi în consecinţă (trecând prin C' şi B') trec prin punctul ω, mijlocul lui AH. Aşadar, *centrul cercului* $A_1B_2C_2$ *coincide cu* ω, *centrul patrulaterului inscriptibil* AC_1HB_1.

Observând încă, că raza ωA_1 a cercului $A_1B_2C_2$ este perpendiculară pe BC, urmează *că cercul* $B_2A_1C_2$ *este tangent laturei* BC.

Observarea I. Unii rezolvitori ai problemii au arătat că prima parte din enunţul problemii se găseşte în *«Culegere de Probleme de Geometrie»* a D-lui profesor G. Ţiţeica, în editura *Gazetei Matematice*, ed. 1929, (Cap. IV, pag. 16, probl 32). D-l Locot. I. Gh. Zamfirescu a dedus problema propusă dintr'o proprietate mai generală ce se va publica într'o *Notă*.

Observarea II. Trapezul $AB_1A_1B_2$ *este isoscel.*

Într'adevăr, avem :

$$\sphericalangle B_2AB = \sphericalangle BCA = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle A_1AC$$

$$\sphericalangle B_2AB_1 = \sphericalangle B_2AB + \sphericalangle BAA_1 + \sphericalangle A_1AC = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle BAA_1.$$

Apoi

$$\sphericalangle A_1B_1A = \sphericalangle A_1B_1B + \sphericalangle BB_1A = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle A_1B_1B$$

însă din cercul AB_1A_1B rezultă că :

$$\sphericalangle A_1B_1B = \sphericalangle BAA_1$$

deci

$$\sphericalangle A_1B_1A = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle B_2AB_1.$$

Trapezul $A_1B_1AB_2$ fiind isoscel, diagonalele lui sunt egale :

$$\overline{B_1B_2} = \overline{AA_1}.$$

In acelaş fel demonstrăm că trapezul $A_1C_1AC_2$ este isoscel şi prin urmare că :

$$\overline{C_1C_2} = \overline{AA_1}.$$

Observarea III. Tot din faptul că trapezele $A_1B_1AB_2$ şi $A_1C_1AC_2$ sunt isoscele rezultă proprietatea : *Proiecţiunile ortogonale ale razelor* $\overline{OB}$ *şi* $\overline{OC}$ *pe tangenta în* A *la cercul* O *sunt respectiv egale cu laturile* $\overline{A_1B_1}$ *şi* $\overline{A_1C_1}$ *ale triunghiului ortic* $A_1B_1C_1$ *(al triunghiului* ABC *relativ la punctul* H).

Au rezolvat problema D-nii : Cezar Coşniţă (Bârlad), Haralamb P. Ionescu-Biss, George Şt. Roşca, Nicolae Patraulea (Măn. Dealu), N. N. Mihăileanu, Mihail I. Popescu-Stăneşti.

O. N. Ţ.

*PROBLEMA 4094. *On désigne par* S, S', S'' *les aires des pentagones réguliers, étoilés et du pentagone convexe déterminé par les diagonales* AC = CE = EB = BD = DA = d *d'un pentagone régulier* ABCDE *inscrit dans un cercle de rayon* R. *Demontrer la relation*

$$5d^3 = 4R\,(3S + S' + S'').$$

V. THÉBAULT.

Fie F, G, H, I, J intersecţiile perechilor de diagonale (AC, BD), (BD, CE), (CE, DA), (DA, EB), (EB, AC).

Observăm în primul rând, că avem:

$$S = 5 \text{ aria } AIB + 5 \text{ aria } AIJ + \text{aria } FGHIJ$$

$$S' = 5 \text{ aria } AIJ + \text{aria } FGHIJ$$

$$S'' = \text{aria } FGHIJ,$$

de unde rezultă că:

$$3S + S' + S'' = 20 \text{ aria } AIJ + 15 \text{ aria } AJB + 5 \text{ aria } FGHIJ,$$

sau încă:

$$3S + S' + S'' = 5\,[4 \text{ aria } AIJ + 3 \text{ aria } AJB + \text{aria } FGHIJ].$$

Dar pe figură se observă că dacă însemnăm cu σ aria unuia din cele 5 trapeze egale, de exemplu a lui ABCD, avem:

$$\sigma = 4 \text{ aria } AIJ + 3 \text{ aria } AIB + \text{aria } FGHIJ,$$

deci:

$$3S + S' + S'' = 5\sigma. \tag{1}$$

Să calculăm acum aria σ în funcţiune de lungimea d şi raza R. Să însemnăm încă cu l lungimea laturei aceluiaş pentagon ABCDE, şi cu h înălţimea trapezului ABCD.

Avem cu aceste notaţiuni, mai întâiu:

$$2\sigma = (l + d)\,h; \tag{2}$$

apoi, considerând dreptele AC şi BD tăiate de paralelele BC şi AD, avem că:

$$\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad (\text{căci } \overline{AF} = \overline{AB}),$$

sau încă:

$$\frac{l + d}{d} = \frac{d}{l}. \tag{3}$$

De altă parte, considerând triunghiul ABD înscris în cercul O, avem relațiunea cunoscută:

$$\overline{AB} \cdot \overline{BD} = h \cdot 2R$$

sau încă:

$$l \cdot d = h \cdot 2R. \qquad (4)$$

Ținând seamă de relațiunile (3) și (4) relațiunea (2) devine:

$$2\sigma = \frac{d^2}{l} \cdot \frac{ld}{2R} = \frac{d^3}{2R} \qquad (5)$$

Din compararea celor două expresiuni ale lui σ, anume (1) și (5), rezultă relațiunea cerută în enunț:

$$5d^3 = 4R(3S + S' + S'').$$

C. C. T. D.

Au rezolvat foarte bine problema D-nii: GEORGE ȘT. ROȘCA, N. N. MIHĂILEANU (Constanța), IOAN C. PARAPEANU.

Observare. Problema poate fi generalizată

Dacă considerăm cazul eptagonului regulat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, însemnând lungimile diagonalelor egale: $\overline{A_1A_3} = \overline{A_2A_4} = \ldots = d$ și $\overline{A_1A_4} = \overline{A_2A_5} = \ldots = d'$, cu S aria eptagonului regulat considerat, cu S' aria eptagonului stelat, cu S'' aria eptagonului $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ determinat de diagonalele de prima speță A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, . . ., A_7A_2.

Însemnând încă cu H intersecțiunea diagonalelor A_1A_4, A_2A_5 și punând $\overline{A_1A_2} = l$, $\overline{B_1B_2} = l'$, perechile de drepte paralele (A_2A_3 și A_1A_4); (B_1B_2, A_1A_5) dau relațiunile:

$$l' = \frac{ld'}{l + d'}, \quad \overline{A_3B_1} = \frac{ld}{l + d'},$$

dar

$$d = 2\overline{A_3B_1} + \overline{B_1B_2} = 2\overline{A_3B_1} + l'.$$

Din aceasta, rezultă imediat relațiunea:

$$\boxed{l = \frac{dd'}{d + d'}} \qquad (I)$$

De asemenea, observând că triunghiurile A_3A_1H și A_4A_5H sunt isoscele și asemenea, deducem:

$$\boxed{l(d - l) = d(d' - d)} \qquad (II)$$

Însemnând raportul $\frac{d'}{d}$ cu x, deducem că x este rădăcina pozitivă a ecuațiunii:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Insemnând acum cu σ aria exagonului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ găsim o primă relaţiune care dă pe σ, anume:

$$7\sigma = 5S + S' + S''. \tag{1}$$

De altă parte, descompunându-l în t unghiuri cu vârful în A_1 şi calculând înălţimile ca în cazul pentagonului, găsim a doua relaţiune:

$$2\sigma = \frac{l}{2R}[ld + 2dd' + d'^2]$$

sau încă:

$$\sigma = \frac{d^3}{4R}\left(\frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 + 2x + 1}\right). \tag{2}$$

Comparând (1) cu (2) avem relaţiunea căutată.

II. Problema poate fi generalizată pentru poligonul regulat de nouă laturi şi altele. *O propunem corespondenţilor noştri pentru cercetare.*

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4139. *Să se calculeze suma*

$$\sum_{i=1}^{i=m} \operatorname{tg} ia \operatorname{tg} (i+1)\, a.$$

I. B. Florescu.

Soluţie dată de D-nii: Const. I. Chiriac (elev lic. Iaşi); U. M. Florescu (elev inginer); C. Ivănescu (elev liceul Bârlad); Şt. E. Olteanu (Blaj) şi Iancu Sager.

Observăm că putem scrie:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}[(i+1)\, a - ia].$$

Dar avem:

$$\operatorname{tg}[(i+1)\, a - ia] = \frac{\operatorname{tg}(i+1)\, a - \operatorname{tg} ia}{1 + \operatorname{tg}(i+1)\, a \operatorname{tg} ia} = \operatorname{tg} a$$

şi de aci scoatem:

$$\operatorname{tg} ia \operatorname{tg} (i+1)\, a = \frac{\operatorname{tg}(i+1)\, a - \operatorname{tg} ia - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a}.$$

Dând acum lui i , pe rând, valorile dela 1 până la m , obținem :

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}(\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a)$$

$$\operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}(\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a)$$

$$\operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 4a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}(\operatorname{tg} 4a - \operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} a)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\operatorname{tg}(m-1)\, a \operatorname{tg} ma = \frac{1}{\operatorname{tg} a}(\operatorname{tg} ma - \operatorname{tg}(m-1)\, a - \operatorname{tg} a)$$

$$\operatorname{tg} ma \operatorname{tg}(m+1)\, a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}(\operatorname{tg}(m+1)\, a - \operatorname{tg} ma - \operatorname{tg} a)$$

și adunând membru cu membru egalitățile de mai sus, găsim :

$$\sum_{i=1}^{i=m} \operatorname{tg} ia \operatorname{tg}(i+1)\, a = \frac{(\operatorname{tg}(m+1)\, a - (m+1) \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a}$$

adică tocmai suma cerută.

Cpt. Gh. N.

PROBLEMA 4144. *Dans une quadrilatère* ABCD, *les angles opposés en* B *et* D *sont droites. Soient* A', B' *les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés* AB, BC *et* C", D" *ceux des carrés construits intérieurement sur les côtés* CD, DA. *Montrer que l'aire du quadrilatère* A'B'C"D" *est equivalente à la moitié de celle du quadrilatère* ABCD.

V. Thébault.

Soluție dată de D-l N. N. Mihăileanu.

Observăm în primul rând, că având :

$$\sphericalangle A'BB' = \sphericalangle A'BA + \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBB' = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi$$

și

$$\sphericalangle CDC'' + \sphericalangle D''DA = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle CDA,$$

grupele de puncte (A', B, B') şi (D, D'', C'') sunt respectiv puncte în linie dreaptă.

Dreapta $\overline{DD''C''}$, fiind bisectoarea unghiului drept ABC, trece prin mijlocul M al arcului ABC din cercul ABCD; tot astfel având $\sphericalangle B'BC = \sphericalangle CDM = \frac{\pi}{4}$, latura BB' trece deasemenea prin punctul M.

De altă parte, triunghiurile dreptunghiuri MD''A şi MC''C sunt egale, având ipotenusele $\overline{MA}$ şi $\overline{MC}$ egale, şi unghiurile ascuţite CMC'' şi D''AM (Complementele unghiului DMA) asemenea egale; deci laturile omoloage sunt egale, adică: $\overline{AD''} = \overline{MC''}$ şi $\overline{MD''} = \overline{CC''}$. Tot astfel triunghiurile dreptunghiuri AA'M şi MB'C sunt egale. (Având ipotenuzele $\overline{MA}$ şi $\overline{MC}$ egale şi $\sphericalangle CMB' = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle AMA' = \sphericalangle MAA'$), deci laturile omoloage sunt egale, adică $\overline{MB'} = \overline{AA'}$ şi $\overline{MA'} = \overline{CB'}$. Aşa dar cele două patrulatere $\overline{AA'MD''}$ şi CB'MC'', *inscriptibile în cercuri egale,* sunt egale (având unghiurile şi laturile respectiv egale).

Patrulaterul A'B'C''D'' este echivalent cu fiecare din cele două patrulatere egale, de exemplu cu AA'MD'', având ambele triunghiul A'MD'' comun, iar triunghiurile B'MC'' şi A'AD'' egale ($\overline{MC''} = \overline{AD''}$, $\overline{MB'} = \overline{AA'}$, $\sphericalangle D''AA' = \sphericalangle B'MC''$).

De altă parte, *patrulaterele* ABCD şi AA'MD'' *sunt asemenea,* fiind formate din triunghiuri asemenea şi la fel aşezate.

Intr'adevăr, având:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAD'' + \sphericalangle D''AB = \frac{\pi}{4} + \sphericalangle D''AB$$
$$= \sphericalangle BAA' + \sphericalangle D''AB = \sphericalangle D''AA',$$

apoi $\sphericalangle AA'D'' = \sphericalangle AMD'' = AMD = \sphericalangle ABD$, rezultă că triunghiurile DAB şi D''AA' sunt asemenea. La fel, având $\sphericalangle DCB = \sphericalangle D''MA'$ (ca suplimente de unghiuri egale); apoi $\sphericalangle D''A'M = \sphericalangle DBC$ (complemente a două unghiuri egale), rezultă că triunghiurile DBC şi D''A'M sunt asemenea.

Făcând raportul ariilor ce ne interesează, avem:

$$\frac{\text{aria } AA'C''D'''}{\text{aria } ABCD} = \frac{\text{aria } AA'MD''}{\text{aria } ABCD} = \left(\frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

căci:

$$\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AA'}^2.$$

C. C. T. D.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIIU

Observare. I. Figura mai conţine proprietăţi în privinţa segmentelor; astfel avem:

a) $\overline{A'D''} = \overline{B'C''}$.

(N. N. Mihăileanu).

b) $\sphericalangle MB'C'' = \sphericalangle AA'D'' = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle D''A'M$ $\ast\ast\ast$ $(\overset{\frown}{A'D}, \overset{\frown}{B'C''}) = \frac{\pi}{2}$.

(N. N. Mihăileanu).

c) $\overline{MC''} + \overline{C''D''} = \overline{C''D''} + \overline{AD''} = \overline{C''D''} + \overline{D''D}$,

adică

$$MD'' = DC'' = CC''.$$

II. D-nii Iancu N. Sager şi Ioan C. Parapeanu au rezolvat problema servindu-se de relaţiuni trigonometrice.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4171. *Care este cel mai mare număr care divide totdeauna produsul a trei numere consecutive perechi? Dar dacă numerele ar fi neperechi consecutive?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: I. N. Sager (Profesor, Râmnicul Sărat), N. N. Aldea, M. Margulius şi Nubar Artaki-Acik (Bucureşti), C. N. Trufinescu (Liceul Bălţi, Cl. VII).

Produsul a trei numere consecutive perechi este de forma:

$$2n\,(2n+2)\,(2n+4) = 8n\,(n+1)\,(n+2).$$

Dar din cele trei numere consecutive n, $(n+1)$, $(n+2)$ unul cel puţin se divide cu 2 şi unul se divide prin 3, deci produsul prin 6. Produsul dat se divide neapărat prin $8 \times 6 = 48$. Alţi factori nu poate avea căci $(2 \times 4 \times 6)$ nu are de cât factorii 2 şi 3.

Dacă numerele ar fi neperechi consecutive produsul lor e de forma:

$$(2n-1)\,(2n+1)\,(2n+3) = (4n^2-1)\,(2n+3).$$

Dacă $n = \mathcal{M}3$ ultimul factor e $\mathcal{M}3$; dacă $n = \mathcal{M}3 \pm 1$, primul factor este $\mathcal{M}3$. Deci produsul e totdeauna divizibil cu 3. Alţi factori nu mai poate avea, căci $(1 \times 3 \times 5)$ nu mai are alţi factori decât pe 5 iar $(7 \times 9 \times 11)$ nu are pe 5.

*EXERCIŢII

12. Să se găsească pătratul perfect de forma: $abcba$, ştiind că suma cifrelor rădăcinei pătrate este 3.

CHIRIŢĂ.

R. Pătratul căutat fiind de cinci cifre, rădăcina sa pătrată va fi cuprinsă între 100 şi 316. Ţinând seamă de condiţia a doua, această rădăcină pătrată nu poate fi decât: 102, 111, 120, 201, 210 sau 300. Ridicând la pătrat se găseşte că singura soluţie a problemei este: $111^2 = 12321$.

13. Să se transforme într'o fracţie ordinară numărul zecimal de forma: $0,ababab\ldots$ Aplicaţie: $ab = 69$.

CHIRIŢĂ.

R. Numărul dat se poate scrie sub forma

$$\frac{ab}{100} + \frac{ab}{100^2} + \ldots + \frac{ab}{100^n} + \ldots = ab \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{ab}{99}$$

deoarece prima parte este o progresie geometrică. In cazul: $ab = 69$ numărul dat este egal cu: $\frac{23}{33}$.

14 In orice triunghiu există relaţia

$$\frac{\cos(B-C)}{bc} + \frac{\cos(C-A)}{ca} + \frac{\cos(A-B)}{ab} = \frac{1}{R^2}.$$

CEZAR IVĂNESCU.

R. Avem:

$$\frac{\cos(B-C)}{bc} = \frac{\cos B\cos C + \sin B\sin C}{4R^2\sin B\sin C} = \frac{1}{4R^2}\cot B\cot C + \frac{1}{4R^2}$$

ţinând seamă că:

$$a = 2R\sin A, \ldots$$

Deci

$$\Sigma\frac{\cos(B-C)}{bc} = \frac{1}{4R^2}\Sigma\cot B\cot C + \frac{3}{4R^2} = \frac{1}{R^2}$$

deoarece se ştie că:

$$\Sigma\cot A\cot B = 1.$$

15. In orice triunghiu avem relaţia

$$\frac{(p-a)\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}A}{bc}+\frac{(p-b)\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}B}{ca}+\frac{(p-c)\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}C}{ab}=\frac{1}{2R}.$$

CEZAR IVĂNESCU

R. Plecăm dela relaţia cunoscută:

$$\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=1$$

(care de altfel se poate demonstra uşor ţinând seamă că: $pr = S$ şi $ah_a = 2S$,...) unde se înlocuieşte $\frac{1}{h_a}$ prin:

$$\frac{a}{2S}=\frac{2aR}{abc}=\frac{2R}{bc}$$

şi avem

$$\frac{r}{bc}+\frac{r}{ca}+\frac{r}{ab}=2R.$$

In fine ţinem seamă că: $r=(p-a)\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}A=\ldots$ şi ajungem tocmai la relaţia din enunţ.

16. Suma a doi vectori variabili, de lungime fixă, simetrici faţă de o dreaptă dată, descrie o elipsă.

E. RUSSU.

R. Notând cu r_1 şi r_2 lungimile celor doi vectori şi cu θ unghiul variabil al celor doi vectori cu dreapta dată, luată ca axă θx, găsim:

$$x=(r_1+r_2)\cos\theta$$

$$x=(r_1-r_2)\sin\theta.$$

17. Să se demonstreze că asimptota curbei

$$y=\frac{\alpha x^2+1}{x+\alpha}$$

e tangentă unei parabole fixe.

ION C. VASILIU.

R. Se găseşte că asimptota e:

$$y-\alpha x+x^2=0$$

care e tangentă parabolei:

$$y=\frac{z^2}{4}.$$

18. Dacă N e lungimea normalei minime cuprinsă între punctele unde taie o elipsă, să se găsească maximul lui N când suprafaţa elipsei e constantă.

Ion C. Vasiliu.

R. $$N^2 = \frac{27a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^3}.$$

Maximul lui N e odată cu minimul lui

$$u = a^2 + b^2$$

când

$$\pi ab = k^2$$

care are loc când

$$a = b = \frac{k}{\sqrt{\pi}}$$

şi e:

$$N_{max} = \frac{3k\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}}.$$

PROBLEME PROPUSE

3335 [1]). Să se găsească pe un cerc dat, punctele în care unghiul format de tangenta în acele puncte, cu dreapta care le uneşte cu un punct dat (afară din planul cercului sau în plan) este maxim sau minim. Generalizare.

B. Ig. Baidaff.

*4201. Fie $E\left(\frac{N}{i}\right)$ simbolul lui Legendre, adică numărul întregilor conţinuţi în fracţia $\left(\frac{N}{i}\right)$, şi fie n (N) numărul divizorilor lui N. Să se stabilească egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left[E\left(\frac{N}{i}\right) - n\,(i) \right] = 0.$$

Ioan B. Florescu.

1) Se propune din nou problema 3335 doarece soluţia publicată la pag. 182, 183, Vol. XXXVII este incompletă şi eronată.

B. I. B.

*4202. Trei comune A, B, C, având respectiv 861, 574, 1435 locuitori sunt situate, în ordinea aci dată, pe o şosea la distanţele AB = 4776 m. şi BC = 2388 m. între localurile Primăriilor lor. La 1791 m. dela B înspre A este un râu cu un pod şubred. Cele trei comune se asociază ca să facă acolo un pod nou, repartizând între ele cheltuielile totale în raport cu populaţia şi în raport invers cu distanţele dela Primăriile lor la acel pod. Ele angajează un inginer care să le facă planurile, să dirijeze şi să controleze lucrările, plătindu-i pentru planuri $2^0/_0$ din valoarea totală a lucrărilor proiectate şi $6^0/_0$ asupra valorii lucrărilor executate şi plătite antreprenorului care va face podul. Inginerul a prezentat un proiect de lucrări în valoare de 434000 lei. După cererea comunelor, se suprimă lucrări în valoare de 54000 lei, iar restul se dă în licitaţie şi se obţine un scăzământ de $10^0/_0$. In timpul lucrărilor se constată însă că mai sunt unele lucrări necesare în valoare de 20000 lei, pe care antreprenorul consimte să le facă, însă fără scăzământ. In fine comunele au convenit cu inginerul şi cu antreprenorul ca plata să li se facă după terminarea lucrărilor, la 1 Ianuarie 1933.

Comunele nedispunând de bani, se împrumută pe data de 1 Ianuarie 1933 dela o bancă cu sumele necesare pentru achitarea inginerului şi a antreprenorului. Condiţiunile împrumutului sunt următoarele: dobânda va fi de $10^0/_0$, plătibilă cu anticipaţie la începutul anului, iar capitalul să se restitue, pe jumătate la 1 Ianuarie 1934 şi cealaltă jumătate la 1 Ianuarie 1935. Comunele au acceptat aceste condiţiuni.

Se cere să se calculeze ce sume trebue să înscrie acele comune în bugetele lor pe anii 1934 şi 1935 pentru achitarea sumelor luate dela bancă.

I. Ionescu.

4203. Să se găsească două numere de câte trei cifre abc şi $\alpha\beta\gamma$ ştiind că atât patratele acestor numere cât şi acelea ale numerelor $a\beta c$ şi $ab\gamma$, sunt patrate gemene.

Col. Gh. Buicliu.

4204. Fie (O, r) un cerc cu centru în O şi de rază r iar $ab = l_3$, latura triunghiului echilateral înscris în acest cerc.

Se descrie un cerc (O, R) concentric cu primul și fie AB = L_3 latura triunghiului echilateral înscris în cercul (O, R).

Să se arate că dacă R = l_3, atunci cercul (O, r) taie pe AB în trei părți egale.

AL. NICULESCU.

*4205. Prin vârfurile triunghiului ABC se duc paralele pe care se înseamnă trei puncte A', B', C'. Să se exprime aria triunghiului $\alpha\beta\gamma$ ale cărui vârfuri divid segmentele AA', BB', CC' în același raport k, și apoi să se determine k pentru care punctele α, β, γ sunt în linie dreaptă.

V. THÉBAULT.

*4206. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând puterile centrului cercului înscris față de cercurile exînscrise.

M. GHERMĂNESCU.

4207. Să se dovedească inegalitatea

$$(m - n + 1)^n > m\,(m - n)^{n-1}$$

știind că avem

$$m > n > 1.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

*4208. Să se arate că ecuația:

$$12x^2 - 8(a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca = 0$$

are rădăcinile reale și cuprinse în intervalul (a, c) presupunând $a \leqslant b \leqslant c$.

N. C.

4209. Să se demonstreze că ecuația:

$$x^4 + 4x - a = 0,$$

are cel mult o singură rădăcină de modul subunitar, oricare ar fi a real.

P. SERGESCU.

4210. Să se găsească legea de variație a indicelui de refracție în atmosfera presupusă de 100 km. înălțime știind că o rază ce intră în atmosferă făcând un unghiu de 45 cu verticala locului atinge suprafața pământului tangențial.

AURELIU PÂRVU.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (4187, 90); *Avram N. C.* (4187); *Bădescu Em. A.* (4183, 87); *Cârstoiu D. I.* (4187, N); *Chiriţă M.* (4178, 87, P); *Coşniţă C.* (3959, 85, P); *Costăchescu V. C. Subloc.* (P); *Curchi I.* (4187, 90); *Demény Z.* (P); *Fabius Dorina* (4108, 78); *Florescu M. U.* (4124, P); *Gheorghiu C. A.* (3959); *Godeanu I. V.* (4178, 87, E); *Ivănescu C.* (4133, 83, 87, P); *Margulius M.* (3934, 4009); *Mazilu C. P.* (4178, 87); *Mereuţă Em.* (4140, 78, 79, 87, 90); *Mihăileanu N. N.* (3625, 934, 85, 4175, 76, 83, 96, P); *Naforniţă I. C.* (3985); *Negrea-Leonte A. M.* (4179, 87); *Nicolau-Dobridor I.* (A); *Pănoiu Em.* (4187, P); *Pârvulescu C.* (4140, 79, E); *Roşca St. Gh.* (3959, 85); *Savin C. I. Subloc.* (3579, 649, E, P, R); *Şcodrano A.* (A); *Simionescu D. Gh.* (P); *Stoica D. Al.* (4196); *Trufinescu N. C.* (4162, 83); *Varlam M. P.* (3934, 4083); *Vasiliu C. I.* (1937, 83); *Velicescu N. N.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi brosați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se dau cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

SIBIU

M2529

Biblioteca „ASTRA"
SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

22

0 - MAR 2014

ANUL XXXVIII

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1933

SUMARUL

1. Orthopôle et théorème de Droz-Farny . *V. Thébault*
2. Chestiuni din geometria triunghiului . . *Miron Niculescu*
3. Asupra şirului lui Fibonacci . . . . . *Ioan B. Florescu*
4. Regulamentul fondului „Spiru Haret"
5. Regulamentul fondului „Lt.-Colonel Gh. A. Tănăsescu"
6. Note matematice: 21 — 24
7. Chestiuni de examen
8. Bibliografie
9. Cereri
10. Diverse
11. Probleme rezolvate: 1983, 2695, 3361, 3815, 3872, 4122
12. Exerciţii: 19 — 20
13. Probleme propuse: 4211 — 4220

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1933

74307

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 21, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 54, 55, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 72, 77, 80, 81, 84, 89, 91, 92, 93, 95, 97, 98, 200, 01, 03, 04, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

ORTHOPÔLE ET THÉORÈME DE DROZ-FARNY

1. Rappelons ces deux théorèmes relatifs à l'orthopôle d'une droite par rapport à un triangle ABC :

a) *L'orthopôle d'une droite* Δ, *par rapport à un triangle* ABC, *appartient à la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre* M *du triangle sur la transversale réciproque de la droite* Δ [1]).

b) *Les orthopôles de deux droites rectangulaires du plan d'un triangle sont symétriques par rapport au milieu de la distance de l'orthocentre du triangle au point de rencontre des deux droites* [2]).

2. Soient deux droites Δ_1, Δ_2, rectangulaires, menées par l'orthocentre H d'un triangle ABC ; Δ'_1, Δ'_2, leurs transversales réciproques. D'après les deux théorèmes précédents, les orthopôles φ_1, φ_2, de ces droites sont situés sur les perpendiculaires $H\varphi_1$, $H\varphi_2$, à Δ'_1, Δ'_2 et les points φ_1, φ_2 sont collinéaires avec l'orthocentre H, $H\varphi_1 = H\varphi_2$.

Les droites Δ'_1, Δ'_2, sont donc perpendiculaires à une même droite φ_1 H φ_2 et, par suite, sont parallèles entre elles.

Les transversales réciproques, par rapport à un triangle ABC, *de deux droites rectangulaires* Δ_1, Δ_2, *se coupant à l'orthocentre, sont parallèles* [3]).

3. La question No. 14111 de *l'Educational Times* proposé par DROZ-FARNY, peut s'énoncer ainsi :

Deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre d'un triangle interceptent sur les côtés trois segments dont les millieux appartiennent à une droite δ [4]).

Soient Δ_1, Δ_2, deux droites rectangulaires en l'orthocentre H d'un triangle ABC ; M_a , M_b , M_c , et N_a , N_b , N_c , leurs intersections avec BC, CA, AB, respectivement. En vertu de ce qui précède, leurs transversales réciproques Δ'_1, Δ'_2, par rapport à ABC,

1) R. GOORMAGHTIGH, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1919 — 39.

2) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1923 — 144.

3) V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1926 — 35.

4) Cette questions possède une bibliographie très riche. Voir, *Gazeta Matematica*, vol. XXXVI p. 82 et *Mathesis*, 1930 — 25.

qui coupent BC, CA, AB, en M'_a, M'_b, M'_c et N'_a N'_b, N'_c sont *parallèles*. Les milieux α', β', γ', des segments $M'_a N'_a$, $M'_b N'_b$, $M'_c N'_c$, sont les *isotomiques*, sur BC, CA, AB, des milieux α, β, γ, des segments $M_a N_a$, $M_b N_b$, $M_c N_c$.

Puisque les points α', β', γ', équidistants de deux parallèles Δ'_1, Δ'_2, sont *collinéaires*, il en est de même de leurs isotomiques α, β, γ et le théorème de DROZ-FARNY est ainsi très simplements démontré.

4. On deduit de tout cela les remarques suivantes :

1° *Les transversales réciproques* Δ'_1, Δ'_2, δ', *des droites* Δ_1, Δ_2, δ, *par rapport au triangle fondamental, sont parallèles. La dernière* δ' *est équidistante des deux autres.*

De plus :

Les transversales réciproques Δ'_1, Δ'_2, *sont deux tangentes parallèles d'une conique* Φ *inscrite au triangle* ABC *et concentrique au cercle* (O) *circonscrit à ce triangle* [1]).

La transversale réciproque δ' *de la droite* δ *des milieux des segments* $M_a N_a$, $M_b N_b$, $M_c N_c$, *passe donc par le centre* O *du cercle circonscrit au triangle.*

Enfin, d'après les théorèmes *a), b)* :

Les orthopôles des droites Δ_1, Δ_2, δ, *par rapport au triangle fondamental, sont collinéaires avec l'orthocentre du triangle.*

N. B. On détermine très simplement la conique ci-dessus de M. CL. SERVAIS, en observant que lorsque Δ_1, Δ_2, pivotent autour de l'orthocentre H, les transversales réciproques Δ'_1, Δ'_2, enveloppent une conique Φ, inscrite au triangle ABC, dont les contacts sur BC, CA, AB, sont les isotomiques A″, B″, C″, des pieds A′, B′, C′, des hauteurs du triangle. Le centre Φ de la conique est donc le point de concours des droites qui unissent les milieux A_1, B_1, C_1, de BC, CA, AB, aux milieux des segments AA″, BB″, CC″. Or, ces droites concourent au centre O du cercle circonscrit à ABC [2]).

5. Lorsque la direction des droites Δ_1, Δ_2, varie, la transversale réciproque δ' de δ pivote autour du point fixe O, et la droite δ enveloppe une conique inscrite au triangle ABC.

---

1) CL. SERVAIS, *Mathesis*, 1930 — 378.

2) V. THÉBAULT, *Gazeta Matematica*, XXXVI p. 82.

Mais, connue l'on sait que la transversale réciproque δ d'un diamètre δ' du cercle circonscrit au triangle passe par l'orthopôle φ' de δ, situé sur le cercle (O_9) des neuf points du triangle, et que les droites δ et $H\varphi'$ sont rectangulaires [1]), *la droite* δ *enveloppe une conique, inscrite au triangle* ABC, *de foyers* O *et* H [2]).

N. B. *L'orthopôle* φ' *de la droite* δ' *est situé sur la droite* δ, *il est équidistant des orthopôles des droites* Δ'_1 *et* Δ'_2.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

CHESTIUNI DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI *)

Chestiunile de mai jos, cari urmează în mod firesc chestiunile articolului «Teoreme din Geometria analitică», publicat în anul XXVI, No. 11 — 12 al «Gazetei Matematice», fac o legătură unitară între diferitele puncte importante ale triunghiului.

Teoremă: *Intr'un triunghiu* ABC *se consideră două perechi de ceviene,* (AA', BB', CC'), (AA", BB", CC") *concurente respectiv în* M *şi* N:

1°. *Dreptele cari unesc vârfurile triunghiului respectiv cu punctele* (BB', CC"), (CC', AA"), (AA', BB") *sunt concurente într'un punct* P_1.

2°. *Dreptele cari unesc vârfurile triunghiului respectiv cu punctele* (BB", CC'), (CC", AA'), (AA", BB') *sunt concurente într'un punct* P'_1.

Fie AA_1, BB_1, CC_1, dreptele din prima parte a teoremei şi AA'_1, BB'_1, CC'_1, dreptele din partea doua a teoremei.

Sistemul de drepte concurente (BB', CC", AA_1), ne dă:

$$(1) \qquad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BC''}{AC''} \times \frac{AB'}{CB'} .$$

1) MEYTELON, *Journal de Vuibert*, 36-e année p. 8.

2) J. NEUBERG, *Mathesis*, 1913 — 262.

*) Acest articol a fost scris pe vremea când eram încă elev de liceu. Regăsindu-l printre hârtiile mele, îl public fără nici o modificare, cu speranţa că va trezi interesul câtorva corespondenţi asupra acestui capitol interesant din Geometria elementară.

M. N.

Sistemul de drepte concurente (CC', AA'', BB_1), ne dă:

$$(2) \qquad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CA''}{BA''} \times \frac{BC'}{AC'} .$$

In sfârşit sistemul de drepte concurente (AA', BB'', CC_1) ne dă:

$$(3) \qquad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AB''}{CB''} \times \frac{CA'}{BA'} .$$

Immulţind relaţiile (1), (2), (3), membru cu membru, obţinem:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \times \frac{CB_1}{AB_1} \times \frac{AC_1}{BC_1} = 1$$

deci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în P_1.

In acelaşi mod demonstrăm că dreptele AA'_1, BB'_1 CC'_1 sunt concurente într'un punct P'_1.

Observare: După cum se vede din îmmulţirea relaţiilor (1), (2), (3), pentru ca dreptele despre care e vorba în teoremă să fie concurente, să avem:

$$\frac{BA'}{CA'} \times \frac{BA''}{CA''} \times \frac{CB'}{AB'} \times \frac{CB''}{AB''} \times \frac{AC'}{BC'} \times \frac{AC''}{BC''} = 1.$$

Chestiunea astfel generalizată însă, are numai o valoare speculativă, căci nu mai avem punctele M şi N de care ne servim pentru stabilirea legăturilor ce ne-am propus.

Intre punctele M şi N de o parte şi punctele P_1 şi P'_1 de altă parte există o interesantă legătură, dată de teorema următoare:

3°. *Dacă* (α, β, γ) *şi* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *sunt coordonatele baricentrice ale punctelor* M *şi* N, *acelea ale punctelor* P_1 *şi* P'_1 *sunt respectiv:*

$$(\alpha\alpha_1 \cdot \beta_1\gamma) \ , \ (\beta\beta_1 \cdot \gamma_1\alpha) \ , \ (\gamma\gamma_1 \cdot \alpha_1\beta) \ ;$$
$$(\alpha\alpha_1 \cdot \beta\gamma_1) \ , \ (\beta\beta_1 \cdot \gamma\alpha_1) \ , \ (\gamma\gamma_1 \cdot \alpha\beta_1) \ ;$$

Să însemnăm cu $x, y, z,$ coordonatele baricentrice ale punctului P_1. Considerăm relaţia (1) din propoziţiunea 1-a. Avem evident:

$$\frac{BC''}{AC''} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

şi

$$\frac{AB'}{CB'} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{z}{y} = \frac{\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1} = \frac{\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1} \times \frac{\beta}{\gamma_1} \times \frac{\gamma_1}{\beta}$$

de unde:

$$(1') \qquad \frac{y}{\beta\beta_1 \cdot \gamma_1\alpha} = \frac{z}{\gamma\gamma_1 \cdot \alpha_1\beta} .$$

De asemenea relația (2) din aceeași teoremă, se poate scrie:

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{x}{z} = \frac{\beta_1\alpha}{\beta\gamma_1} = \frac{\beta_1\alpha}{\beta\gamma_1} \times \frac{\gamma}{\alpha_1} \times \frac{\alpha_1}{\gamma}$$

de unde:

$$(2') \qquad \frac{x}{\alpha\alpha_1 \cdot \beta_1\gamma} = \frac{z}{\beta\beta_1 \cdot \gamma_1\alpha} .$$

Relațiile (1') și (2') comparate ne dau:

$$(3') \qquad \frac{x}{\alpha\alpha_1 \cdot \beta_1\gamma} = \frac{y}{\beta\beta_1 \cdot \gamma_1\alpha} = \frac{z}{\gamma\gamma_1 \cdot \alpha_1\beta}$$

Q. E. D.

In același mod se demonstrează că punctul P'_1 are ca coordonate baricentrice:

$$(4') \qquad \frac{x'}{\alpha\alpha_1 \cdot \beta\gamma_1} = \frac{y'}{\beta\beta_1 \cdot \gamma\alpha_1} = \frac{z'}{\gamma\gamma_1 \cdot \alpha\beta_1} .$$

Din chestiunile 1, 2, 3 se pot deduce câteva cazuri particulare interesante, dând lui M și N anumite poziții în planul triunghiului:

4°. *Dacă punctele* M, N, *sunt reciproce, atunci și punctele* P_1, P'_1 *sunt reciproce.*

In acest caz avem:

$$\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1 = \gamma\gamma_1$$

deci formulele (3') și (4'), devin respectiv:

$$\frac{x}{\frac{\beta_1}{\gamma_1}} = \frac{y}{\frac{\gamma_1}{\alpha_1}} = \frac{z}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}$$

$$\frac{x'}{\frac{\gamma_1}{\beta_1}} = \frac{y'}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} = \frac{z'}{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}$$

de unde se vede că coordonatele baricentrice ale punctelor P_1 și P'_1 sunt *inverse,* deci punctele sunt reciproce. c. c. t. d.

5°. *Dacă punctele* M *şi* N *sunt permutante, punctul* P_1 *obţinut este al treilea punct permutant, iar* P'_1 *are ca coordonate baricentrice pătratele coordonatelor reciprocului lui* P_1.

Dacă în formulele (3') şi (4') facem respectiv:

$$\alpha_1 = \beta \quad ; \quad \beta_1 = \gamma \quad ; \quad \gamma_1 = \alpha$$

aceste formule devin:

$$\frac{x}{\gamma} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z}{\beta}$$

$$\frac{x'}{\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{y'}{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{z'}{\frac{1}{\beta^2}}$$

Q. E. D.

6°. *Dacă punctele* M *şi* N *sunt isogonale, punctele* P_1 *şi* P'_1 *sunt şi ele isogonale.*

Coordonatele *normale* ale punctelor M şi N sunt respectiv:

$$\frac{\alpha}{a} \; , \; \frac{\beta}{b} \; , \; \frac{\gamma}{c}$$

$$\frac{\alpha_1}{a} \; , \; \frac{\beta_1}{b} \; , \; \frac{\gamma_1}{c} \; .$$

Aceste coordonate fiind inverse, vom avea:

$$\alpha\alpha_1 = a^2 \quad ; \quad \beta\beta_1 = b^2 \quad ; \quad \gamma\gamma_1 = c^2.$$

Din relaţiile acestea deducem:

$$\beta\gamma = \frac{b^2c^2}{\beta\gamma_1} \quad ; \quad \gamma_1\alpha = \frac{c^2a^2}{\gamma\alpha_1} \quad ; \quad \alpha_1\beta = \frac{a^2b^2}{\alpha\beta_1} \; .$$

Inlocuind toate aceste relaţii în egalităţile (3') şi (4'), obţinem, după simplicări:

$$\frac{x}{\frac{1}{\beta\gamma_1}} = \frac{y}{\frac{1}{\gamma\alpha_1}} = \frac{z}{\frac{1}{\alpha\beta_1}}$$

$$\frac{x'}{a^2 \cdot \beta\gamma_1} = \frac{y'}{b^2 \cdot \gamma\alpha_1} = \frac{z'}{c^2 \cdot \alpha\beta_1} \; .$$

Sub forma aceasta se vede uşor că cele două puncte P_1 şi P'_1 sunt isogonale, c. c. t. d.

7°. *Dacă unul din punctele* M, N *este centrul de gravitate al triunghiului, punctele* P_1 *şi* P'_1 *sunt permutantele reciprocului celuilalt punct.*

E deajuns să facem în formulele (3') şi (4'):

$$\alpha = \beta = \gamma$$

şi ele devin:

$$\frac{x}{\alpha_1\beta_1} = \frac{y}{\beta_1\gamma_1} = \frac{z}{\gamma_1\alpha_1} \quad \text{sau} \quad \frac{x}{\frac{1}{\gamma_1}} = \frac{y}{\frac{1}{\alpha_1}} = \frac{z}{\frac{1}{\beta_1}}$$

$$\frac{x'}{\alpha_1\gamma_1} = \frac{y'}{\alpha_1\beta_1} = \frac{z'}{\beta_1\gamma_1} \quad \text{sau} \quad \frac{x'}{\frac{1}{\beta_1}} = \frac{y'}{\frac{1}{\gamma_1}} = \frac{z'}{\frac{1}{\alpha_1}}$$

sub care formă se vede că punctele P_1 şi P'_1 sunt permutantele reciprocului punctului N.

8°. *Dându-se un punct în planul unui triunghiu şi centrul de gravitate al acestuia, se pot construi numai cu rigla:*

a) *Reciprocul său.*

b) *Punctul care are ca coordonate baricentrice, pătratele coordonatelor acestui punct.*

Fie α, β, γ, coordonatele baricentrice ale acestui punct; punctele P_1 şi P'_1 cari se obţin numai cu rigla prin construcţia indicată de propoziţiunile 1 şi 2, au ca coordonate baricentrice, în virtutea propoziţiunii 7:

$$\alpha\beta \ , \ \beta\gamma \ , \ \gamma\alpha$$
$$\alpha\gamma \ , \ \beta\alpha \ , \ \gamma\beta.$$

Dacă acum aplicăm teorema 5-a punctelor P_1 şi P'_1, obţinem punctele de coordonate:

$$\frac{\beta\gamma}{\frac{1}{\beta^2\gamma^2}} \quad \frac{\alpha\gamma}{\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}} \quad \frac{\beta\alpha}{\frac{1}{\beta^2\alpha^2}}$$

cari se pot scrie, împărţind termenii şirului al doilea cu $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ şi împărţind termenii şirului al treilea cu $\alpha\beta\gamma$:

$$\frac{1}{\alpha} \ , \ \frac{1}{\beta} \ , \ \frac{1}{\gamma}$$
$$\alpha^2 \ , \ \beta^2 \ , \ \gamma^2$$

Q. E. D.

Dacă în această teoremă facem respectiv:

$$\alpha = a \ ; \ \beta = b \ ; \ \gamma = c$$

şi dacă apoi aplicăm din nou această teoremă, obţinem următoarea relaţie remarcabilă de construcţia numai cu rigla, dintre punctele cele mai importante ale triunghiului:

9⁰. *Dacă într'un triunghiu se dă centrul de gravitate* G *şi punctul* I *de întâlnire al bisectoarelor, se pot construi numai cu rigla:*

a) *Reciprocul său.*

b) *Punctul simedian al triunghiului şi reciprocul acestuia.*

c) *Cele două puncte ale lui* BROCARD.

d) *In general, toate potenţialele de ordinul* 2^n *(n, întreg, pozitiv sau negativ) ale triunghiului, precum şi permutantele acestora.*

Intr'adevăr aplicând punctelor G şi I teorema 7-a, obţinem cele două puncte permutante ale reciprocului punctului I. Aplicând acestor două din urmă puncte teorema 5-a, obţinem şi al treilea permutant, adică reciprocul punctului I, precum şi punctul K al lui LEMOINE. Aplicând teorema 7-a punctelor G şi K, obţinem cele două puncte ale lui BROCARD.

Aplicând teorema 5-a acestor două din urmă puncte, obţinem potenţialele de ordinul 2^1 şi 2^2, etc. Construcţia se generalizează cu uşurinţă, aplicând alternativ teoremele 5 şi 7.

MIRON NICULESCU
Elev particular cl. VIII Lic. Mihaiu-Viteazu.

ASUPRA ŞIRULUI LUI FIBONACCI

Fie şirul lui FIBONACCI:

1 . 2 . 3 . 5 . 8 . 13 . 21 . . .

După cum s'a mai făcut în *Gazeta Matematică* vom nota:

$$U_1 = 1 \ , \ U_2 = 2 \ , \ U_3 = 3 \ , \ U_4 = 5 \ , \ . \ . \ . \ U_n = U_{n-1} + U_{n-2}.$$

In această revistă, Anul XXI pag. 125 şi următoarele, D-l GH. ZAPAN a arătat că numai termenii de forma U_{kn-1} se divid cu U_{n-1}, iar în Anul XXIX pag. 131, într'o notă, am arătat că termenul U_{kn-1} se divide cu U^2_{n-1} numai dacă şi k se divide cu U_{n-1}.

In cele ce urmează voi da un criteriu de divizibilitate al unui termen printr'o putere oarecare a unui alt termen din acelaşi şir, extinzând procedeul din nota citată.

Fie U_{n_r-1} cel mai mic termen al şirului care se divide cu U^r_{n-1}. Din cele spuse mai sus rezultă că $n_1 = n$; $n_2 = n\,U_{n-1}$.

Fie $U_{n'_r-1}$ un alt termen al şirului care se divide cu U^r_{n-1}. Conform relaţii:

$$U_{n+s} = U_n\,U_s + U_{n-1}\,U_{s-1}, \qquad (1)$$

vom avea:

$$U_{n'_r-1} = U_{n_r-1}\,U_{n'_r-n_r} + U_{n_r-2}\,U_{n'_r-n_r-1}.$$

Cum

$$U_{n'_r-1} = \mathcal{M}.U^r_{n-1} \text{ şi } U_{n_r-1} = \mathcal{M}.U^r_{n-1} \text{ şi cum } U_{n_r-2} \text{ este}$$

prim cu U_{n_r-1}, rezultă că şi $U_{n'_r-n_r-1} = \mathcal{M}.U^r_{n-1}$. Procedând analog, din aproape în aproape, se deduce:

$$U_{n'_r-n_r-1} = \mathcal{M}.U^r_{n-1}.$$

Făcând abstracţiune de termenii cu indici negativi, şi de oarece am presupus că U_{n_r-1} este cel mai mic termen care se divide cu U^r_{n-1}, rezultă că există o valoare întreagă a lui t, aşa în cât

$$n'_r - n_r - 1 = n_r - 1, \quad \therefore \quad n'_r = (t+1)\,n_r.$$

Deci, *dacă* U_{n_r-1} *este cel mai mic termen al şirului care se divide cu* U^r_{n-1}, *singurii multipli ai acestui divizor sunt de forma* $U_{\alpha n_r-1}$.

Pe de altă parte, dacă $U_{n_r-1} = \mathcal{M}.U^r_{n-1}$ atunci şi $U_{n_r-1} = \mathcal{M}.U^{r-1}_{n-1}$, deci:

$$n_r = \beta n_r - 1,$$

unde β este un întreg ce trebue determinat.

Ţinând seamă de relaţia (1), deducem, din aproape în aproape:

$$U_{kn-1}/U_{n-1} = [U_{n-1}\,U_{(k-1)n} + U_{n-2}\,U_{(k-1)n-1}]/U_{n-1}$$

$$= U_{(k-1)n} + [U_{n-2}\,U_{(k-1)n-1}/U_{n-1}]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= U_{(k-1)n} + U_{n-2}\,U_{(k-2)n} + U^2_{n-2}\,U_{k-3\,n} + \ldots + U^{k-2}_{n-2}\,U_n + U^{k-1}_{n-2} \qquad (2)$$

Tot din (1) deducem:

$$U_{kn} = U_n U_{(k-1)n} + U_{n-1} U_{(k-1)n-1}$$

$$\therefore \quad U_{kn} - U_n U_{(k-1)n} = \mathcal{M} U_{n-1}^2,$$

şi analog:

$$U_{(k-1)n} - U_n U_{(k-2)n} = \mathcal{M} U_n^2 \ _1,$$

. . . . . .

$$U_{2n} - U_n U_n = U_{2n} - U_n^2 = \mathcal{M} U_{n-1}^2,$$

şi deci:

$$U_{kn} - U_n^k = \mathcal{M} U_{n-1}^2. \qquad (3)$$

Ţinând seamă de (3) deducem din (2):

$$(U_{kn-1}/U_{n-1}) - (U_n^{k-1} + U_{n-2} U_n^{k-2} + \ldots + U_{n-2}^{k-1} = \mathcal{M} U_{n-1}^2.$$

$$\therefore \quad (U_{nk-1}/U_{n-1}) - [(U_n^k - U_{n-2}^k)/U_n - U_{n-2})] = \mathcal{M} U_{n-1}^2,$$

$$\therefore \quad (U_{nk-1}/U_{n-1}) - [(U_n^k - U_{n-2}^k)/U_{n-1}] = \mathcal{M} U_{n-1}^2.$$

Insă:

$$U_{n-2}^k = (U_n - U_{n-1})^k = U_n^k - kU_n^{k-1} U_{n-1} + [k(k-1)/1.2] U_n^{k-2} U_{n-1}^2 - \ldots,$$

$$\therefore \quad (U_{nk-1}/U_{n-1}) - k U_n^{k-1} + \tfrac{1}{2} k (k-1) U_n^{k-2} U_{n-1} = \mathcal{M} U_{n-1}^2. \qquad (4)$$

De această relaţie ne vom servi pentru determinarea indicilor n_r şi deci pentru stabilirea criteriului de divizibilitate ce ne-am propus a găsi,

(Va urma) ION B. FLORESCU.

REGULAMENTUL FONDULUI „SPIRU HARET"

Art. 1. — Societatea «Gazeta Matematică», pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator al învăţământului SPIRU HARET, primul român doctor în ştiinţele matematice, constitue un fond denumit fondul «SPIRU HARET», alimentat prin subscripţie publică deschisă în permanenţă.

Art. 2. — Toate sumele strânse se transformă în rentă de Stat sau efecte garantate de Stat.

Art. 3. — Venitul anual al acestui fond serveşte pentru cumpărarea de cărţi de matematici pure şi aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, recreaţii matematice, etc.), care se vor dona bibliotecilor şcolare dela şcolile secundare, sau corespondenţilor meritoşi, elevi ai acestor şcoli.

Art. 4. — A doua adunare generală anuală hotărăşte şcolile sau corespondenţii cărora li se vor trimite cărţi din acest fond, şi alege o comisiune compusă din 2 membri şi un delegat care să aleagă cărţile.

Art. 5. — Cărţile donate vor avea o legătură uniformă, cu inscripţia «Gazetei Matematice», a fondului şi a şcoalei sau corespondentului căruia se donează şi se distribue între începutul anului şcolar şi vacanţa Crăciunului.

Art. 6. — In loc de cărţi se pot dona aparate sau modele necesare învăţământului matematic.

REGULAMENTUL
FONDULUI „LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU“

Art. 1. — Societatea «Gazeta Matematică» primind legatul decedatului AL. TĂNĂSESCU, înfiinţează un fond denumit fondul «LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU», în memoria fiului său.

Art. 2. — Din venitul acestui fond se vor da cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale «Gazetei Matematice».

Art. 3. — In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile vor mări fondul.

NOTE MATEMATICE

*21. *Curiosités arithmétiques.* **1.** Considérons la fraction périodique $\frac{1}{7}$; sa période est formée de $7 - 1 = 6$ chiffres significatifs et nécessairement différents. Si l'on multiplie cette fraction par 1, 2, 3, 4, 5, 6, on obtient des fractions périodiques de périodes formées des mêmes chiffres disposés dans des ordres différents, puisque chaque chiffre est le quotient par 7 d'un reste et que les $7 - 1 = 6$ restes possibles sont obtenus en chaque cas. Il s'ensuit donc que si l'on multiplie la période de $\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999}$, soit 142857,

par les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, on obtient six produits, (1) 142857, 285714, 428571, 571428, 714285, 857142, *qui contiennent chacun les six mêmes chiffres significatifs dans des ordres différents* [1]).

2. Les divisions successives que l'on effectue pour obtenir les périodes des fractions

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7},$$

conduisent à ces tableaux assez curieux : [2])

$$10 = 7 \times 1 + 3, \qquad 20 = 7 \times 2 + 6,$$

$$100 = 7 \times 14 + 2, \qquad 200 = 7 \times 28 + 4,$$

$$1000 = 7 \times 142 + 6, \qquad 2000 = 7 \times 285 + 5,$$

(I) $10000 = 7 \times 1428 + 4$, (II) $20000 = 7 \times 2857 + 1$,

$$100000 = 7 \times 14285 + 5, \qquad 200000 = 7 \times 28571 + 3,$$

$$1000000 = 7 \times 142857 + 1, \qquad 2000000 = 7 \times 285714 + 2,$$

$$10000000 = 7 \times 1428571 + 3, \qquad 20000000 = 7 \times 2857142 + 6,$$

. . . . . .

N. B. Il y a *six* tableaux analogues correspondant aux mêmes puissances de 10 affectées des coefficients 1, 2, 3, 4, 5, 6, les coefficients du facteur 7 étant fournis par les produits (1).

3. Si l'on retranche, ou si l'on ajoute, l'unité à chacun des chiffres du nombre 142857, on obtient deux nombres :

$$N_1 = 031746 \quad , \quad N_2 = 253968,$$

formés chacun de six chiffres différents, qui sont les périodes des fractions $\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{63}$, et $\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = \frac{16}{63}$.

1) Cfr. *Bulletin de Mathématiques Elémentaires*, 1908—104 et 1909—135.

2) Le tableau (I) a été donné par HEGENBERG, *Zahlen-Arithmetik*, 1837. Cfr. *Scripta-Mathematica*, New-York, 1932 — 32).

Comme :

$$7N_1 = 222222 \quad , \quad 7N_2 = 1777776,$$

on obtient les tableaux suivants :

$$2 \times 1 = 7 \times 0 + 2, \qquad 17 = 7 \times 2 + 3,$$
$$2 \times 11 = 7 \times 3 + 1, \qquad 177 = 7 \times 25 + 2,$$
$$2 \times 111 = 7 \times 31 + 5, \qquad 1777 = 7 \times 253 + 6,$$
$$2 \times 1111 = 7 \times 317 + 3, \qquad 17777 = 7 \times 2539 + 4,$$
$$2 \times 11111 = 7 \times 3174 + 4, \qquad 177777 = 7 \times 25396 + 5,$$
$$2 \times 111111 = 7 \times 31746 + 0, \qquad 1777777 = 7 \times 253968 + 1,$$
$$2 \times 1111111 = 7 \times 317460 + 2 \qquad 17777777 = 7 \times 2539682 + 3.$$

. . . . . .

V. THÉBAULT.

22. *Asupra unei teoreme clasice din geometria în spaţiu.* Înfăţişez o demonstraţie, pe care n'am văzut-o prin tratatele mai cunoscute de Geometrie a următoarei teoreme :

Dacă o dreaptă, care întâlneşte un plan, este perpendiculară pe două drepte situate în acest plan şi trecând prin piciorul ei, ea este perpendiculară pe orice dreaptă aşezată în plan şi trecând prin piciorul ei.

Fie O punctul unde dreapta din spaţiu întâlneşte planul şi A un punct pe ea deasupra planului. In plan, trecând prin O, considerăm dreptele Δ_1 şi Δ_2: $\overline{AO} \perp \Delta_1$, $\overline{AO} \perp \Delta_2$; apoi fie OC o semidreaptă oarecare din plan, care — evident — este cuprinsă într'unul dintre cele 4 unghiuri formate de Δ_1 şi Δ_2. Să presupunem că OC este cuprinsă în unghiul B_1OB_2.

Pe OB_1 şi OB_2 luăm respectiv lungimile : $\overline{O\beta_1} = \overline{O\beta_2}$. Notăm cu γ_1 intersecţia bisectoarei unghiului B_1OB_2 cu dreapta $\beta_1\beta_2$ şi unim A cu punctele β_1, γ_1, β_2.

Triunghiul $\beta_1 O \beta_2$ fiind isoscel avem : $\overline{O\gamma_1} \perp \overline{\beta_1\beta_2}$ şi $\overline{\beta_1\gamma_1} = \overline{\beta_2\gamma_1}$.

Tot aşa triunghiul $A\beta_1\beta_2$ fiind isoscel şi $A\gamma_1$ fiind mediană, $\overline{A\gamma_1} \perp \overline{\beta_1\beta_2}$.

Putem scrie :

$$\overline{A\gamma_1}^2 = \overline{A\beta_1}^2 - \overline{\beta_1\gamma_1}^2 \quad \therefore \quad \overline{A\gamma_1}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{O\beta_1}^2 - (\overline{O\beta_1}^2 - \overline{O\gamma_1}^2),$$

$\overline{A\gamma_1}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{O\gamma_1}^2$. Rezultă : $\overline{AO} \perp \overline{O\gamma_1}$.

Să observăm că $O\gamma_1$ este bisectoarea unghiului B_1OB_2 şi să reţinem că: Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte din plan, trecând prin piciorul ei, ea este perpendiculară pe bisectoarea unghiului celor două drepte.

Acum demonstraţia urmează în mod simplu. Dacă OC se confundă cu $O\gamma_1$, teorema este demonstrată căci înseamnă că $AO \perp OC$. Dacă OC nu se confundă cu $O\gamma_1$, ea este cuprinsă într'unul din unghiurile $\beta_1O\gamma_1$, $\beta_2O\gamma_1$. Să presupunem că OC se află în unghiul $\beta_2O\gamma_1$. Fie $O\gamma_2$ bisectoarea unghiului $\beta_2O\gamma_1$. Avem: $\overline{OA} \perp O\gamma_1$, $\overline{OA} \perp O\beta_2$. Raţionăm ca şi mai sus: Dacă OC se confundă cu $O\gamma_2$ teorema este demonstrată, căci $AO \perp OC$. Altfel $\overline{OC}$ este cuprinsă într'unul dintre unghiurile $\gamma_1O\gamma_2$, $\beta_2O\gamma_2$. Să zicem că este în unghiul $\gamma_1O\gamma_2$. Fie $O\gamma_3$ bisectoarea acestui unghiu. Dacă OC se confundă cu $O\gamma_3$, $AO \perp OC$; dacă nu, OC se află într'unul din unghiurile $\gamma_1O\gamma_3$, $\gamma_2O\gamma_3$, fie de ex. în unghiul $\gamma_1O\gamma_3$.

Continuând astfel demonstraţia, se vede că dacă OC se confundă cu vre-o bisectoare $O\gamma_k$, teorema este demonstrată, deoarece $OA \perp OC$; dacă OC nu se confundă cu nici o bisectoare, ea se află cuprinsă succesiv în unghiurile:

$$\widehat{\beta_1O\gamma_1} = \frac{\widehat{B_1OB_2}}{2}, \quad \widehat{\gamma_1O\gamma_2} = \frac{\widehat{B_1OB_2}}{4}, \quad \widehat{\gamma_1O\gamma_3} = \frac{\widehat{B_1OB_2}}{8}, \ldots$$

aşa că OC sfârşeşte prin a se găsi într'un unghiu care tinde către zero, urmează că OC se confundă cu una din laturile unghiului şi pentrucă AO este perpendiculară pe laturile unghiului, rezultă că $AO \perp OC$.

Observare. Această demonstraţie prezintă interesul că în partea finală utilizează o metodă proprie stabilirii anumitor teoreme din Analiza matematică. (Vezi «Lecţiuni de teoria funcţiunilor», pag. 5 § 7 de DAVID EMMANUEL).

G. I. DUMITRESCU.

23. *Asupra Notei 40 din „G. M.", Vol. XXXVII, p. 446.* Observaţiile făcute de D-l M. G. relativ la articolul meu asupra numărului indicatorilor unui număr dat nu sunt exacte. Funcţia *numerică* $I(x)$ nu e deloc determinată de relaţiile:

(1) $\qquad I(1) = 0 \quad , \quad I(2) = 1$

(2) $\qquad I(x \cdot y) = I(x) + I(y).$

Relația următoare:

$$I(x) = I(x-1) \quad \text{când } x \text{ e prim} \tag{3}$$

este necesară.

Nu avem deloc

$$\lim_{x \to \infty} \frac{I(x)}{\log x} = \frac{1}{\log 2}$$

deoarece membrul întâi *nu are limită* pentru $x \to \infty$. Am arătat în articolul meu că:

$$\frac{\log x}{\log 3} - 1 < I(x) < \frac{\log x}{\log 2} + 1$$

și observând că: $I(2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}) = \alpha + \beta$ se pot ușor arăta că:

Valorile limite ale raportului $I(x)/\log x$ *pentru* $x \to \infty$ *formează întreg intervalul:*

$$\left(\frac{1}{\log 3} , \frac{1}{\log 2} \right).$$

T. P.

24. *Asupra articolului: „Asupra ultimului grup de* p *cifre ale patratelor perfecte".* (*Gazeta Matematică,* Anul XXXVII, pag. 366).

In tabloul dat la pag. 368, la grupul 644 forma corespunzătoare este $500n \pm 238$ în loc de $500n \pm 258$.

La pag. 369 sunt de făcut următoarele rectificări:

La rândul 8 de jos se va începe astfel: *„Din patratele numerelor".*

La ultimul rând din aceeași pagină se va înlocui cei doi 5000 cu 50000.

La pag. 370 la rândul 2 de sus se va înlocui 25000 cu 250000, la rândul următor 165771 175771 iar la rândul 5 17571 cu 175771.

Cu această ocaziune adaog că cele 60 de ridicări la patrat ce am arătat că sunt necesare se pot evita procedând astfel. Patratele terminate cu 441 provin dela numerele de forma $500n \pm 21$ și $500n \pm 271$. Dacă pe acestea le ridicăm la patrat, găsim că sunt

de forma $\mathfrak{M}10^4 + 441 \pm 1000$ şi $\mathfrak{M}10^4 + 3441 \pm 1000n$. Punând condiţia ca acestea să se termine cu 4441, găsim:

$$n = 10n' \pm 4, \qquad \text{şi} \qquad n = 10n' \pm 1$$

iar numerele devin:

$$5000n' \pm 2021, \qquad \text{şi} \qquad 5000n' \pm 771.$$

Continuăm mai departe la fel şi problema se rezolvă numai cu 6 ridicări la patrat.

I. V. MĂTIEŞ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ŞTIINŢE

Secţia Matematici

Sesiunea Iunie 1932

ANUL III

ANALIZA MATEMATICĂ p. II

Proba teoretică

1°. Să se integreze ecuaţia

$$\frac{\partial 2}{\partial x} = \frac{\partial 2}{\partial y}\left(x\frac{\partial 2}{\partial x} - 2\right). \tag{1}$$

Se va găsi o integrală complectă de forma

$$z = C_1 x + \sqrt{C_2 - 2C_1}. \tag{2}$$

2°. Intrebuinţând o altă combinare integrabilă, să se deducă o a doua integrală complectă (3) cu constantele a şi b.

3°. Să se arate ce relaţie trebuie să stabilim între constantele C_1 şi C_2 pentru ca integrala (2) să se reducă la integrala (3).

4°. Să se găsească integrala singulară a ecuaţiei (1).

Proba practică

I. Să se determine curbele (C) ale planului xoy, pentru care distanţa dela origina O la tangenta în punctul M al curbei este proporţională cu abscisa lui M.

II. Să se integreze sistemul

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\alpha - \beta)\, x + \beta y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta x + (\alpha - \beta)\, y$$

α şi β fiind constante.

MECANICA RAŢIONALĂ p. II

Proba teoretică

Se consideră un corp solid, care este realizat dintr'o bucată de sârmă metalică omogenă care are forma unui cerc de rază a. Acest cerc se poate roti în jurul diametrului său vertical AB presupus fix. Un punct material de aceeaşi massă ca şi cercul se mişcă fără frecare.

1°. Să se găsească ecuaţiile de mişcare ale acestui sistem aplicându-se teoremele generale.

2°. Să se găsească ecuaţiile de mişcare ale sistemului aplicând ecuaţiile lui LAGRANGE.

3°. Să se discute mişcarea presupunând că la momentul iniţial punctul P a fost aşezat în punctul cel mai de jos al cercului A.

4°. Să se găsească condiţiile iniţiale pentru ca punctul P să fie în echilibru relativ pe cerc.

5°. Să se calculeze reacţiunea cercului asupra punctului P în cazul când P este în echilibru relativ pe cerc.

Proba practică

Se consideră dreptunghiul ABCD ale cărui laturi sunt $AB = 2a$, $BC = b$, şi semicercul DEC de diametru DC, interior dreptunghiului ($2a < b$).

1°. Să se calculeze momentul de inerţie al plăcei ADECB în raport cu AB, precum şi raza de giraţie.

2°. Se roteşte placa ADECB în jurul lui AB şi fie S solidul la care dă naştere. Să se calculeze momentul de inerţie al acestui solid în raport cu AB, precum şi raza de giraţie.

TEORIA FUNCŢIILOR

Proba teoretică

I. Se consideră funcţiunea

$$Z(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}.$$

1°. Să se indice poziţia şi natura punctelor singulare ale funcţiunii inverse $z(Z)$ şi să se dea desvoltarea în serie în domeniul originii a acestei funcţiuni, indicând domeniul în care e valabilă acea desvoltare.

2°. Să se arate că în cercul (γ) cu centrul în origine şi de rază 1, funcţia $Z(z)$ ia orice valoare complexă o singură dată.

3°. Fie (Γ) locul punctelor pentru care avem:

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = k.$$

Să se găsească curba corespunzătoare lui (Γ) în planul variabilei Z şi să se indice domeniul care corespunde interiorului lui (Γ) în planul variabilei Z.

II. Să se determine funcţiile analitice pentru care partea reală e funcţie numai de raportul $\frac{y}{x}$.

Proba practică

Să se calculeze integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x\,(x^2+a^2)^2}$$

prin metoda reziduurilor. Se va considera funcţia

$$\frac{e^{iz}}{z\,(z^2+a^2)^2}.$$

GEOMETRIE INFINITESIMALĂ

Studiul geometric al cicloidei.

ŞCOLILE MILITARE, PREGĂTITOARE ŞI SPECIALE ALE AERONAUTICEI „REGELE CAROL II"

Examenul de admitere din August 1932

Secţia Naviganţi

ALGEBRĂ

1. Să se afle limita funcţiunei

$$y = \frac{4x^3+x-1}{2x^2-3} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos\frac{1}{x}}}$$

când x tinde către $+\infty$.

2. Se dă ecuaţia

$$(a-1)\,x^2 - 6ax + a - 5 = 0.$$

Ce valori trebue să aibă a pentru ca rădăcinile ecuației să fie reale.

3. Să se studieze variația funcției

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 5x - 4}$$

trasându-se și curba reprezentativă.

TRIGONOMETRIE

1. Să se calculeze valorile tuturor liniilor trigonometrice ale arcului de 75°.

2. Să se demonstreze egalitatea

$$\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1+\cos a} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

3 Să se găsească distanța orizontală dela un punct A până la un turn T, presupunând că între A și T există un obstacol așezat astfel, încât nu se poate vedea decât vârful turnului și nici nu se poate măsura distanța cerută direct pe teren.

GEOMETRIE

1. Se dă un triunghiu echilateral ABC și cercul tangent în B și C laturilor AB și AC. Se unește un punct M situat pe arcul de cerc BC din interiorul triunghiului cu punctele B și C. Dreptele BM și CM întâlnesc laturile AC și AB în punctele Q și P. Să se demonstreze că avem

$$AP + AQ = \text{constant.}$$

2. Două cercuri având aceiași rază de 5 cm. sunt secante. Știind că coarda lor comună este egală tot cu 5 cm., se cere să se calculeze suprafața părței comune la cele 2 cercuri.

Timp de lucru: 4 ore și jumătate.

Secția Mecanici

ALGEBRA

1. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2};$$

să se verifice și interpreteze rezultatul.

2. Se dă ecuația

$$(m-5)\,x^2 - 4\,m\,x + m - 2 = 0.$$

Se cere valorile lui m pentru ca rădăcinile ecuației

a) să fie reale

b) să fie de semne contrare.

TRIGONOMETRIE

1. Să se reducă la primul cadran arcul de — 4059°.
2. Să se calculeze liniile trigonometrice ale arcelor, care satisfac egalităţei

$$\sin x = \operatorname{cotg} x.$$

GEOMETRIE

1. Se dă un triunghiu ABC dreptunghiu în A. Prin piciorul D al înălţimei AD se duc două drepte perpendiculare între ele, care tae laturile AB şi AC respectiv în punctele E şi F, iar prelungirile lor respectiv, în E' şi F'. Se cere :

a) care sunt toate triunghiurile asemenea ce au un vârf comun în punctul D.

b) care e poziţia ce trebue să o dăm dreptei DE pentru ca lungimea EF să fie cea mai mică posibilă.

2. Se dă un trunchiu de piramidă exagonală plină având înălţimea h, latura bazei de jos egală cu $2l$, iar acea a bazei de sus egală cu l,

Se consideră piramida având drept bază, baza de sus a trunchiului de piramidă, iar vârful piramidei în centrul exagonului ce formează baza de jos a trunchiului de piramidă.

Scoţând piramida din trunchiul de piramidă, se cere să se calculeze

— suprafaţa totală şi

— volumul

corpului solid rămas.

Aplicaţie pentru $l = 5$ dm. şi $h = 10$ dm

Timp de lucru : 4 ore şi jumătate.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVIII. No 10. Octomvrie 1932. New York. Şiruri de puncte în spaţiul cu trei sau mai multe dimensiuni şi investigaţiuni asupra lor cu mijloacele date de analisis situs unificate, de R. L. WILDER. Un algoritm inversiv, de D. H. LEHMER Notă asupra sistemului triplu, de R. D. CARMICHAEL, Partiţiuni cuadratice, de E. T. BELL. Sisteme eptagonale de opt linii în plan, de L. D. CUMMINGS. O notă asupra algebrei normale a diviziunii de ordinul 16, de A. A. ALBERT. O reprezentare boleană unitate-zero de operaţiuni şi relaţiuni, de B. A. BERNSTEIN. Integrala lui POISSON pentru funcţiuni cu părţi reale pozitive, de W. CAUER. Trei teoreme aplicabile la teoria vibraţiunii, de F. F. KIMBALL. O notă asupra ultimei teoreme a lui FERMAT, de D. H. LEHMER. Asupra unor caracteristice ale varietătilor k-dimensionale în spaciul r, de B. C. WONG, Asupra teorii lui LEXIS şi analiza variantelor, de H. L. RIETZ. Asupra polinomialelor

în câmpul lui GALOIS, de L. CARLITZ. Asupra formulii indicatorului dată de EULER, de D. H. LEHMER. Asupra relaţiilor între firele diagonale din tabla lui PADÉ, de H. S. WALL.

Mathesis. Tomul XLVI. No. 9. Noemvrie 1932. Gembloux. Teorema zisă a lui GULDIN considerată din punct de vedere istoric, de P. VER EECKE. Câteva proprietăţi ale conicelor şi cuadridelor, de D. V. IONESCU. Asupra nomografii ecuaţiilor cu patru variabile, de M. DEWECK. Exerciţii de geometrie diferenţială, de D-ra BERTHE UMÉ. Asupra unor arii de triunghiuri, de R. GOORMAGHTIGH.

Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II". Bucarest. Anul III. No. 2. Bucureşti. 1932. Beitrag zu einem Satz des Herrn POMPEIU, von D. BARBILIAN. Sur la moyenne des polynomes du troisième degré, par E. ABASON. Sur la formule de la moyenne, par G. MIHOC. La dilatation du fer et de l'acier entre + 40° et — 40°, par B. BIANU. La propriété électro-cynétique du carbon colloïde par E. CHIRNOAGA. Sur les forces électromagnétiques. Tension et répulsion des lignes de force. Energie du champ magnétique, par N. VASILESCO KARPEN. Observations sur la section verticale longitudinale d'une salle de théâtre. Considération d'acoustique, par S. FOTINO.

Boletin Matematico. Anul V. No. 9. Noemvrie 1932. Buenos Aires. Asupra ecuaţiilor parametrice, de C. BELL. Asupra sistemelor de inegalităţi lineare, de F. LA MENZA.

Journal de Mathématiques Elementaires, publie par H. VUIBERT. Anul 57. No. 5 şi 6. Decemvrie 1932. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XII. No. 10. Decemvrie 1932 Timişoara. Desfăşurate succesive, de D. V. IONESCU.

R. DE MONTESSUS DE BALLORE. *La méthode de Corrélation.* Paris 1932. Gauthier-Villars & C-ie. Imprimeurs-éditeurs.

Aceasta este o broşură de 78 pagini apărută în Colecţia *„Scientia"*. Ea se ocupă cu metoda corelaţiunii întrebuinţată în statistică pentru a se vedea dacă două fenomene sunt sau nu în relaţiune unul cu altul, când cunoaştem valorile deduse din un număr mare de observaţiuni găsite în anumite condiţiuni. Metoda se aplică de regulă empiric; autorul caută să o ataşeze calculului probabilităţilor, şi în special metodei celor mai mici patrate.

In Cap. I se vorbeşte de centrul distanţelor medii, se critică metoda uzuală şi introduce un factor sau coeficient de coreacţiune. In Cap. II se ocupă de corelaţiune în legătură cu metoda celor mai mici patrate, utilizând reprezentări grafice. In Cap. III se face aplicaţiune la unele exemple, cu capacitatea pluvială a curentului ecuatorial ca factor periodic al climatului, corelaţiunea dintre recolta grâului în guvernământul Upsalei faţă de temperatura medie a

lunei August din anul ce precede recolta, etc. Cap. IV dă exemple de alte corelaţiuni. Aici autorul arată că e o relaţiune mai strânsă între cursul mediu al valorilor cu venit fix şi al celor cu venit variabil; că e o relaţiune mai slabă între preţul grâului şi al cartofilor în Franţa, şi că nu e legătură între numărul căsătoriilor şi preţul grâului. Stabileşte apoi că nu e corelaţiune între numărul zilelor de ploaie şi numărul petelor solare într'un an.

Broşura se termină cu tabela patratelor numerelor întregi până la 1000.

I. I.

GASTON JULIA. *Exercices d'analyse.* Tome II. Paris 1933. Gauthier-Villars Paris. Quai des Grands Augustins 55.

Aceste exerciţii se refer la programul certificatului de calcul diferenţial şi integral al Facultăţii de ştiinţe din Paris. In Cap. I sunt aplicaţiuni ale proprietăţilor elementare ale funcţiunilor analitice; în Cap. II se dau proprietăţi generale ale acestor funcţiuni şi desvoltarea lor în serii; în Cap. III asupra calculului reziduurilor; în Cap. IV transformări analitice ale domeniilor plane şi în Cap. V reprezentări conforme. Printre exerciţii de tip clasic sunt date şi chestiuni noui tratate ca aplicaţiuni prin care se caută să se pună studenţii în curent cu progresele recente ale analizei. Cartea este astfel de mare folos celor ce îşi fac din matematici o specialitate.

I. I.

Revista matematică a Elevilor Craioveni. Anul I. No. 2—3. Aprilie-Mai, ni s'a trimis la redacţie însoţită de un bileţel datat 8 Noemvrie 1932 prin care ni se aduce la cunoştinţă că *«dragostea de matematici a îndemnat pe câţi-va elevi craioveni să facă un* **exces de forţare materială** [1]) *şi să dea la iveală această micuţă revistă matematică ale cărei tendinţe tind spre perfecţionism»*.

Bileţelul este însoţit de două semnături una a redactorului şi una a secretarului, ambii elevi ai liceului *Fraţii Buzeşti,* Craiova.

Recunoaştem că este un adevărat eroism, ca în criza actuală a învăţământului matematic în licee, un grup de elevi să iasă din făgaşul învăţământului zilnic şi să se îndrăgească de matematici. Îi felicităm pentru acest curaj şi le dorim să-şi păstreze entuziasmul.

Felicităm mai cu seamă pe D-nii profesori cari conlucrează alături cu elevii lor şi-i stimulează la discipline de intelectualizare.

Iniţiativa merită toată lauda, numai că nu suntem de acord cu felul cum ea se manifestă. Noi ne-am spus cuvântul, în ceeace priveşte scoaterea de reviste în licee, în articolul **Revistele matematice** din *Gazeta Matematică* pag. 247. Vol. XXXI şi în bibliografia dela pagina 140 Vol. XVI cu ocazia recenzării revistei *«Foaia Matematică a elevilor Liceului militar din Iaşi»*.

Am arătat în acel articol şi bibliografie, că credinţa noastră este că energia şi timpul care se risipeşte cu redactarea, imprimarea şi administrarea

1) Sublinierea este şi în textul bileţelului.

unei reviste nu este în proporţie cu foloasele pe care le aşteaptă iniţiatorii scoaterii revistelor. De aceea sunt de preferat societăţile de elevi, dirijate, controlate şi stimulate de profesorii lor, societăţi care fără a scoate reviste au de scop să propună şi să rezolve în şedinţele lor diferite chestiuni matematice din acelea pe care le-ar indica profesorul sau din acelea pe care şi le-ar alege însuşi elevul fie din cărţile, fie din revistele de matematici.

Sforţarea materială, pe care o subliniază semnatarii bileţelului care însoţeşte revista de care ne ocupăm, ar fi mai folositoare şi chiar mai mică (noi ştim cât costă tiparul) dacă s'ar întrebuinţa la cumpărare de cărţi sau la abonare la reviste; în schimb *folosul intelectual* ar fi nespus mai mare. De aceia rugăm pe iniţiatorii revistei să revadă articolul **Revistele Matematice** din *Gazeta Matematică* Vol. XXXI unde se expune punctul de vedere al experienţelor dela *Gazeta Matematică*.

Cu aceste consideraţiuni generale revenim la revista craioveană. Ea urmează atâtor surate care au început cu *«a voi este a putea»* şi care au dispărut după primele 2 — 3 numere fără moto şi fără să se fi vărsat vre-o lacrimă la dispariţia lor.

Numărul care ni s'a trimis are 16 pagini, inclusiv coperta şi conţine :

Lista membrilor, unde se întâlnesc numele a 48 elevi din clasele 5, 6, 7 divizia A şi B dela liceul „Fraţii Buzeşti", este o înfrăţire care înduioşează şi pe care o dorim perpetuată.

Interpretarea unui sistem de ecuaţii şi *O problemă de geometrie elementară* sunt două articole de Predoescu I. M. un corespondent promiţător al *Revistei Matematice din Timişoara* şi al *Gazetei Matematice*.

Probleme rezolvate şi *Probleme propuse*.

Ne mulţumim a înşira conţinutul revistei fără alt comentariu decât acela că el este elementar, cunoscut şi potrivit cu puterile actuale ale elevilor de liceu.

Col. Gh. Buicliu.

CERERI

Răspuns la cererea No. 48 din Anul XXIV, pag. 39.

Ioan Comnen şi-a început studiile la Constantinopol, le-a continuat în Italia, şi a fost profesor de ştiinţe fizico-naturale la Academia lui *Brâncoveanu* şi medic al Domnitorului. El ştia Greaca, Latina, Italiana, Ebraica şi Araba. La 1700 a scris o *Descriere a Sfântului Munte Athos*, în care arată amănunţit darurile făcute de Domnitorii anteriori. El a fost Episcop de Durostor sub numele de Ieroteiu. A murit în anul 1719. (C. Erbiceanu. In Memoriile *Academiei Române*. Secţia istorică. Tomul XXVII, pag. 153).

P. Sergescu.

Răspuns la cererea No. 188 din Anul XXXV, pag. 305.

Avem în românește: «*Recreații matematice*» de I. AOMEAN, fascicola I, tipărită la Sibiu în 1932.

P. SERGESCU.

Răspuns la Cererea No. 121 din Anul XXX, pag. 306.

Colecția complectă a Revistei «*Annales de Gergonne*» (1810—1832) se găsește în Biblioteca Universității din Cluj, sub No. 106723.

P. SERGESCU.

DIVERSE

Societatea română de Științe, Secția matematică, a ținut ședință în seara zilei de 5 Decemvrie. D-l P. SERGESCU a prezentat o comunicare a D-lui TH. ANGHELUȚĂ asupra unei ecuații funcționale, iar D-l P. SERGESCU a făcut o comunicare asupra unor chestiuni în legătură cu funcțiile univalente.

Cu toate că lumina electrică nu funcționa, ședința s'a ținut cu trei lumânări de stearină, una pe masă, una la baza tablei și alta de conferențiar, pentru a lumina formulele !

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1983. *Să se studieze natura suprafeței*

$$x^2 + \alpha y^2 + \alpha^4 z^2 + 2\alpha^2 yz + 2zx + 2xy + 2x + 2\alpha^3 y + 2\alpha^6 z + \alpha^9 = 0.$$

F. NEDELCU.

Problema se rezolvă cu ușurință urmând cuvânt cu cuvânt una din metodele de recunoaștere a cuadricelor date în unele cursuri de geometrie analitică.

Vom întrebuința metoda dată de regretatul TR. LALESCU în articolul „*Criteriile de recunoaștere a cuadricelor*“ publicat în *Gazeta Matematică* Vol. XIV pag. 232, 261, 321. Rezumăm întâi rezultatele obținute în acel articol.

Fie cuadrica

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Lx + 2My + 2Nz + P = 0.$$

Se notează cu

$$\partial = \begin{vmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & D & F & L \\ D & B & E & M \\ F & E & C & N \\ L & M & N & P \end{vmatrix}$$

$$\eta = A + B + C$$

$$\xi = AB + BC + CA - D^2 - E^2 - F^2$$

∂, Δ, η, ξ fiind invarianţii cuadricei.

Genul cuadricei, după valorile relative ale acestor invarianţi, este dat de tabelul următor :

$\partial \neq 0$ {
- $\xi > 0$ — Elipsoid {
  - $\Delta < 0$ real
  - $\Delta = 0$ redus la un punct
  - $\Delta > 0$ imaginar

  ($\eta\partial > 0$)
- $\xi \leqslant 0$ — sau Hiperboloid {
  - $\Delta > 0$ cu o pânză
  - $\Delta = 0$ con real
  - $\Delta < 0$ cu 2 pânze

  ($\eta\partial \leqslant 0$)

$\partial = 0$ {
- $\xi \neq 0$ {
  - $\Delta \neq 0$ {
    - $\xi > 0$ Paraboloid eliptic
    - $\xi < 0$ Paraboloid hiperbolic
  - $\Delta = 0$ {
    - $\xi > 0$ Cilindru eliptic sau 2 plane imaginare sau confundate
    - $\xi < 0$ Cilindru hiperbolic sau plane reale
- $\xi = 0$ . . . . . Cilindru parabolic sau 2 plane confundate sau 2 plane paralele.

Să aplicăm aceste rezultate la cazul problemei 1983 la care avem :

$$\partial = \alpha\ (\alpha + 1)\ (\alpha - 1)^3$$

$$\Delta = \alpha^4\ (\alpha + 1)^2\ (\alpha - 1)^6\ (\alpha^2 + \alpha + 1)$$

$$\eta = 1 + \alpha + \alpha^4$$

$$\xi = \alpha^5 + \alpha - 2.$$

Valorile remarcabile ale lui α sunt -1, 0 şi $+1$ care anulează pe ∂ şi Δ. Făcând să varieze α dela $-\infty$ la $+\infty$ se construieşte cu uşurinţă următorul tabel care dă semnele invarianţilor în diferitele intervale:

α	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
∂	. . .	—	0	+	0	−	0	+	. . .
η	. . .	+	+	+	+	+	+	+	. . .
$\eta\partial$	. . .	—	+	+	+	−	+	+	. . .
ξ	. . .	−	−	−	−	−	+	+	. . .
Δ	. . .	+	0	+	0	+	0	+	. . .

Aplicând aceste rezultate numerice la primul din tabelele precedente se găseşte că natura suprafeţei propuse este după cum urmează:

$-\infty < \alpha < -1$ . . Hiperboloid cu o pânză
$\alpha = -1$ . . . . . Cilindru hiperbolic
$-1 < \alpha < 0$ . . . . Hiperboloid cu o pânză
$\alpha = 0$ . . . . . Două plane reale
$0 < \alpha < +1$ . . . . . Hiperboloid cu o pânză
$\alpha = 1$ . . . . . 2 Planuri confundate
$1 < \alpha < +\infty$ . . . . Elipsoid imaginar.

Soluţie parţială dela D-l I. C. Vasiliu (Şc. Politecnică, Bucureşti). D-sa a pus ecuaţia suprafeţei sub forma

$$(x+y+z+1)^2+(\alpha^3-1)\left[y+z+\frac{\alpha^3-1}{\alpha^2-1}\right]^2$$

$$+\alpha^2(\alpha^2-1)\left[z+\frac{\alpha(\alpha^3-1)}{\alpha^2-1}\right]^2+\frac{\alpha^2(\alpha^3-1)(\alpha-1)}{\alpha'+1}(\alpha^4+\alpha^3+1)=0$$

şi a găsit, pe o altă cale, soluţia exactă numai pentru $\alpha = 0$ şi $\alpha > 0$.

Col. Gh. Buicliu.

PROBLEMA 2695. *Fie* T *şi* T_1 *două triunghiuri omologice, înscrise în acelaşi cerc* O; T' *şi* T'_1 *triunghiurile formate de tangentele duse la* O *prin vârfurile triunghiurilor* T *şi* T_1.

Să se demonstreze că axa de omologie a triunghiurilor T *şi* T_1 *trece prin punctul de întâlnire al dreptelor lui* LEMOINE *ale acestor triunghiuri şi prin intersecţia axelor de omologie ale triunghiurilor* T, T'_1 *şi* T', T_1; *să se deducă că centrele de omologie ale triunghiurilor* T , T' ; T_1 , T'_1 ; T_1 , T' ; T , T'_1 *se află pe două drepte care trec prin centrul de omologie al triunghiurilor* T , T_1.

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l ADRIAN GHEORGHIU.

1. Fie ABC, $A_1B_1C_1$ triunghiurile T, T_1 înscrise în O şi având punctul S ca centru de omologie iar dreapta D, definită de punctele (AB, A_1B_1) , (BC, B_1C_1) , (CA, C_1A_1) ca axă de omologie. Se vede pe figură că fiecare din aceste trei puncte este conjugate lui S faţă de cercul O. Deci D *este polara lui* S *faţă de* O.

2. Fie A'B'C', $A'_1B'_1C'_1$ triunghiurile T' şi T'_1 ca în enunţ. Notez cu M intersecţia tangentelor B'C', $B'_1C'_1$ în A şi A'_1 la cerc. Punctul M este deci chiar prin construcţie polul dreptei ASA_1 faţă de O, el se va găsi pe polara lui S faţă de O, adică pe D. La fel se arată că punctele (C'A' , $C'_1A'_1$) , (A'B' , $A'_1B'_1$) sunt pe D. Deci *triunghiurile* T',T'_1 *sunt omologice având ca axă de omologie dreapta* D. Observ că prin construcţie C',C'_1 sunt polurile dreptelor AB, A_1B_1 faţă de O, deci $C'C'_1$ va fi polara punctului N de intersecţie al dreptelor AB, A_1B_1 ; cum N se află pe D urmează că polara sa $C'C'_1$ *trece prin* S. Analog se arată că $A'A'_1$, $B'B'_1$ *trec prin* S.

3. Fie L şi Δ punctul şi dreapta lui LEMOINE a triunghiului ABC. Ele sunt, după cum se ştie, centrul şi axa de omologie a triunghiurilor ABC, A'B'C', L fiind polul lui Δ faţă de O.

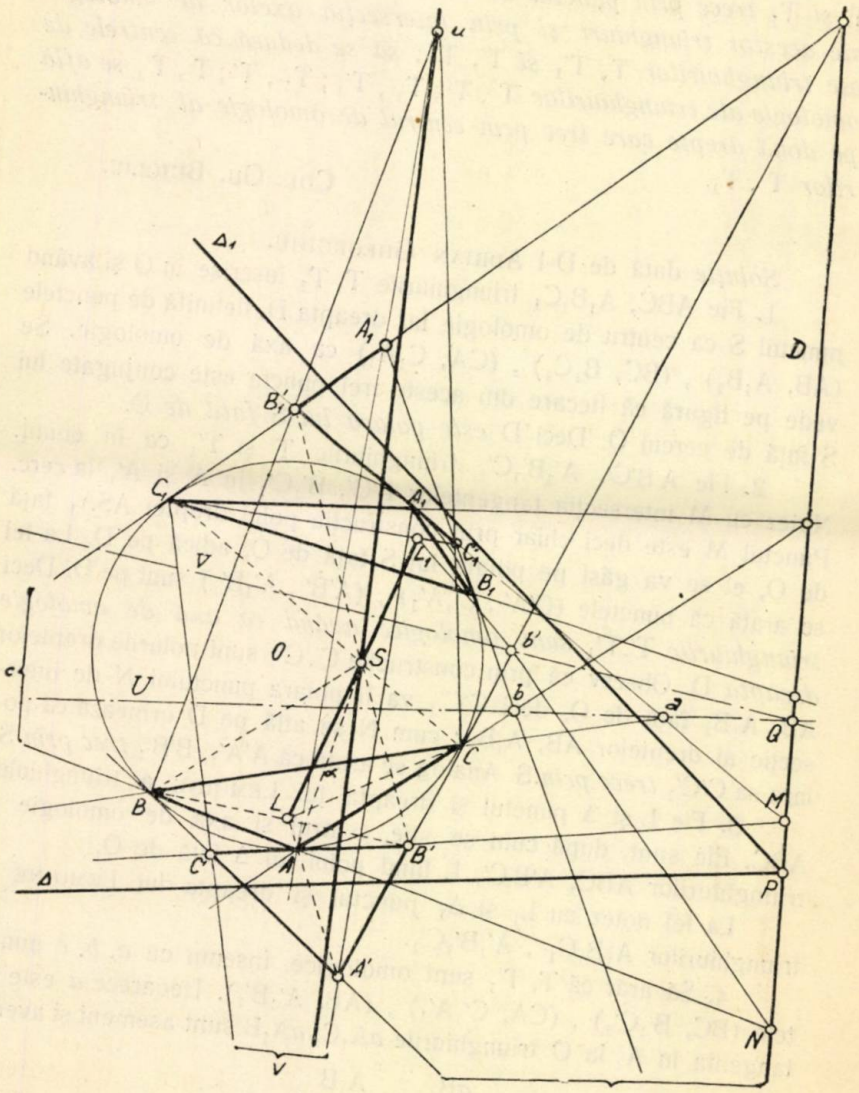
La fel notez cu L_1 şi Δ_1 punctul şi dreapta lui LEMOINE a triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$.

4. Să arăt că T, T_1 sunt omologice. Insemn cu *a, b, c* punctele (BC, $B'_1C'_1$) , (CA, $C'_1A'_1$) , (AB, $A'_1B'_1$). Deoarece *a* este pe tangenta în A_1 la O triunghiurile aA_1C, aA_1B sunt asemeni şi avem:

$$(1) \qquad \frac{aB}{aC} = \frac{A_1B}{A_1C} .$$

Se găseşte la fel

(2) $$\frac{bC}{bA} = \frac{B_1C}{B_1A}$$



(3) $$\frac{cA}{cB} = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

Observ că deoarece *a, b, c* sunt pe tangentele la O sunt exterioare cercului, deci exterioare segmentelor BC, CA, AB și prin urmare *cele trei rapoarte precedente sunt pozitive.*

Fie α, β, γ punctele unde cevienele AA_1, BB_1, CC_1 taie pe BC, CA, AB. Se știe că:

$$(4) \qquad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1.$$

Din asemănarea triunghiurilor αBA_1, αAC pe de o parte și a triunghiurilor αCA_1, αAB pe de altă parte se scoate:

$$\frac{\alpha B}{\alpha A} = \frac{A_1 B}{AC} \; ; \quad \frac{\alpha C}{\alpha A} = \frac{A_1 C}{AB}$$

de unde

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{AB}{AC}$$

sau ținând seamă de (1)

$$(5) \qquad \frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{aB}{aC} \cdot \frac{AB}{AC} .$$

Analog se găsește:

$$(6) \qquad \frac{\beta B}{\beta A} = \frac{bC}{bA} \cdot \frac{BC}{BA} .$$

$$(7) \qquad \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{cA}{cB} \cdot \frac{CA}{CB} .$$

Inmulțind egalitățile (5), (6), (7) și ținând seamă de (4) se găsește în valoare absolută

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$$

adevărată și în valoare relativă, căci am văzut că toate rapoartele din primul membru sunt pozitive.

Deci a, b, c *sunt colineare pe o dreaptă* U *care este axa de omologie a triunghiurilor* T, T'_1. Notez cu *u* centrul de omologie al acestor triunghiuri, adică $u \equiv (AA'_1, BB'_1, CC'_1)$.

5. Analog se arată că T' și T_1 sunt omologice având o dreaptă V și un punct *v* ca axă și centru de omologie, $v \equiv (A'A_1, B'B_1, C'C_1)$.

6. Observ că A_1 este polul dreptei A_1a, tangentă la O, iar A′ este polul dreptei BC, deci $A'A_1$ *este polara lui* a. Se deduce că U *este polara lui* v. La fel se arată că V *este polara lui* u.

7. In rezumat s'a găsit până aici următoarele grupe de triunghiuri omologice:

1^0. $\begin{cases} T\ ,\ T_1 & \text{cu centrul S și axa D.} \\ T'\ ,\ T'_1 & \text{cu centrul S și axa D.} \end{cases}$

2^0. $\begin{cases} T\ ,\ T' & \text{cu centrul L și axa } \Delta \\ T_1\ ,\ T'_1 & \text{cu centrul } L_1 \text{ și axa } \Delta_1 \end{cases}$

3^0. $\begin{cases} T\ ,\ T'_1 & \text{cu centrul } u \text{ și axa U} \\ T_1\ ,\ T' & \text{cu centrul } v \text{ și axa V.} \end{cases}$

8. Constituind figurile $T+T'$ și $T_1+T'_1$, ele sunt omologice conform relațiilor 1^0 căci la A, A′, B, B′, C, C′ corespunde A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1 iar conform relațiilor 2^0 punctele L, L_1 se corespund în această omologie așa că dreapta LL_1 trece prin S. La fel Δ, Δ_1 se corespund căci conțin intersecții de drepte omoloage, la $(AB_1\ A'B')$ de pe Δ corespunde $(A_1B_1\ ,\ A'_1B'_1)$ de pe Δ_1. Deci Δ, Δ_1 *se taie într'un punct* P *pe* D.

Demonstrația se poate face și observând ca la (3) că (Δ, Δ_1) este polul lui LL_1 care trece prin polul S al lui D.

9. Constituind figurile $T+T'_1$ și T_1+T' ele sunt omologice cu centrul în S și axa D căci din cauza relațiilor 1^0 la figura $A, A'_1\ ,\ B, B'_1\ ,\ C, C'_1$ corespunde figura $A_1\ ,\ A'\ ,\ B_1\ ,\ B'\ ,\ C_1\ ,\ C'$ iar conform celor dela 3^0 *u* și *v* se corespund în această omologie deci dreapta *uv* trece prin S. La fel dreptele U și V corespunzându-se, ele se taie într'un punct Q de pe D.

Și această proprietate se poate demonstra ca la (8) observând că punctul (U, V) este polul dreptei *uv*, care trece prin polul S al dreptei D.

Cu aceasta teorema este complect demonstrată.

---

*PROBLEMA 3361. *Pentru construirea unei linii ferate, o fabrică de șini le oferă cu dobândă de $10^0/_0$ plătibile în 20 ani, iar alta cu $6^0/_0$ în 25 ani. La a doua fabrică însă șinile sunt cu $20^0/_0$ mai scumpe ca la prima. Care ofertă este mai avantagioasă ?*

I. Ionescu.

Să considerăm un capital C care depus la o bancă, la începutul operațiunii, să servească, împreună cu dobânzile lui timp de n ani, la achitarea complectă a anuităților, până la sfârșitul operațiunii. C se chiamă *capitalul de investițiune*. Din cele două oferte, aceea va fi cea mai avantagioasă care va cere cel mai mic capital de investițiune.

Dacă A este suma cerută de o fabrică pentru furnitura de șini, și r dobânda la 1 leu pretinsă de fabrică, anuitatea a este dată de formula cunoscută:

$$a = Ar\,(1 + r)^n / [(1 + r)^n - 1]. \qquad (1)$$

Fie q dobânda pe care o dă banca întreprinderii de căi ferate care construiește linia. Banca trebue să dea anuitatea a fabricii timp de n ani din Capitalul C de investire depus, dobânda fiind q la 1 leu. Formula de mai sus aplicată acestui caz ne dă:

$$a = Cq\,(1 + q)^n / [(1 + q)^n - 1]. \qquad (2)$$

Impărțind ecuațiile (1) și (2) și scotând pe C găsim:

$$C = Ar\,(1 + r)^n [(1 + q)^n - 1] / q\,(1 + q)^n [(1 + r)^n - 1]. \quad (3)$$

Să aplicăm această formulă pentru ofertele celor două fabrici. Fie C_1 și C_2 capitalurile de investițiune respective, A și 1,2A costul șinilor oferite de ele, în conformitate cu enunțul problemei. Pentru prima fabrică $r = 0{,}1$ și $n = 20$, iar pentru a doua $r = 0{,}06$ și $n = 25$. Aplicând dar formula (3) de două ori găsim

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= A \times 0{,}1 \times 1{,}1^{20}\ [(1+q)^{20} - 1]/q\,(1+q)^{20}[1{,}1^{20} - 1], \\ C_2 &= 1{,}2A \times 0{,}06 \times 1{,}06^{25}[(1+q)^{25} - 1]/q\,(1+q)^{25}[1{,}06^{25} - 1]. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Făcând operațiunile numerice indicate găsim:

$$0{,}1 \times 1{,}1^{20}/(1{,}1^{20} - 1) = 0{,}1 \times 6{,}727500/5{,}7274500 = 0{,}1175,$$

$$1{,}2 \times 0{,}06 \times 1{,}06^{25}/(1{,}06^{25} - 1) = 0{,}072 \times 4{,}291871/3{,}291871 = 0{,}0938.$$

Cum q este necunoscut, să punem:

$$(1 + q)^5 = x,$$

și cum $q > 0$, reese că vom avea $x > 1$. Făcând înlocuirile în (4) avem:

$$C_1 = 0{,}1175\,(x^4 - 1)/qx^4\ ,\ C_2 = 0{,}0938\,(x^5 - 1)/qx^5. \qquad (5)$$

Ca să comparăm cele două oferte să facem raportul C_1/C_2.

Avem :

$$C_1/C_2 = 0{,}1175x\,(x^4 - 1)/0{,}0938\,(x^5 - 1),$$

$$\therefore\ C_1/C_2 = (1175/938).[(x^4 + x^3 + x^2 + x)/(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)].$$

Când x creşte, fracţia $(x^4 + x^3 + x^2 + x)/(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ din paranteza drept-liniară îşi sporeşte cu aceeaşi cantitate numărătorul şi numitorul şi prin urmare, după o teoremă cunoscută, se apropie de unitate. Pentru $x = 1$, care este o limită inferioară a lui x după cele arătate, fracţia devine $4/5 = 0{,}8$, iar pentru x tinzând spre ∞, ea tinde spre 1. Deci raportul C_1/C_2 variază între $0{,}8 \times (1175/938) = 1{,}002$ şi $(1175/938) = 1{,}25$. Aceasta ne arată că avem totdeauna $C_1/C_2 > 1$, şi deci $C_1 > C_2$ oricare ar fi dobânda q la 1 leu pe care o acordă banca.

Conchidem de aci că oferta fabricei a doua este totdeauna mai avantagioasă ca a primei fabrici şi că avantagiul e cu atât mai mare cu cât banii se pot plasa la bancă cu un procent mai mare.

Ulpiu M. Florescu.
(Elev Inginer)

PROBLEMA 3815. *Une droite* Δ *antiparallèle au côté* BC *coupe les côtés* BA *et* AC *d'un triangle en* C_1 *et* B_1. *Les parallèles à* AC *et* AB *issues de ces points se coupent en* A_1 *et rencontrent* BB_1 *et* CC_1 *en* M *et* N. *On a la relation d'aires.*

$$\overline{A_1B_1C_1}^2 = \overline{ABC} \times \overline{A_1MW}.$$

V. Thébault.

Soluţie dată de D-nii : Nic. Antonescu, N. N. Aldea, Adrian C. Gheorghiu, Petre I. Ghişoiu, Haralamb P. Ionescu-Biss, N. N. Mihăileanu, Corneliu N. Popescu.

Dreapta B_1C_1 fiind antiparalelă cu BC, patrulaterul $BC\,B_1C_1$ este inscriptibil deci :

$$\sphericalangle\, C_1CB_1 = \sphericalangle\, C_1BB_1. \qquad (1)$$

Pe de altă parte A_1B_1 şi A_1C_1 fiind paralele cu AB şi AC :

$$\sphericalangle\, MC_1N = \sphericalangle\, C_1CB_1 \qquad (2)$$

şi

$$\sphericalangle\, MB_1N = \sphericalangle\, C_1BB_1. \qquad (3)$$

Prin urmare

$$\sphericalangle MC_1N = \sphericalangle MB_1N,$$

deci şi patrulaterul C_1B_1MN este inscriptibil şi deci în triunghiul $A_1B_1C_1$, MN este antiparalelă cu BC. Dar atunci triunghiurile A_1MN şi $A_1B_1C_1$ (care la rândul său este egal cu AB_1C_1) sunt asemenea şi prin urmare:

$$\frac{\text{aria } A_1MN}{\text{aria } A_1B_1C_1} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{B_1C_1}^2}. \tag{4}$$

Pe de altă parte

$$\frac{\text{aria } A_1B_1C_1}{\text{aria } ABC} = \frac{\text{aria } A_1BC}{\text{aria } ABC} = \frac{\overline{B_1C_1}^2}{\overline{BC}^2}. \tag{5}$$

In sfârşit triunghiurile MNC_1 şi C_1B_1B sunt asemenea, căci avem:

$$\sphericalangle MC_1N = \sphericalangle C_1CB_1 = \sphericalangle C_1BB_1$$

cum am văzut mai sus (relaţiile 1 şi 2) şi apoi:

$$\sphericalangle C_1NM = \sphericalangle MB_1C_1$$

deci patrulaterul inscriptibil B_1G_1MN. Triunghiul MNC_1 şi C_1B_1B sunt asemenea şi în mod analog MNB_1 şi C_1B_1C vor fi şi ele asemenea. Rezultă atunci că şi patrulaterele MNB_1C_1 şi C_1B_1CB vor fi asemenea (ca fiind compuse cu triunghiuri asemenea şi asemenea aşezate) şi că prin nrmare:

$$\frac{MN}{C_1B_1} = \frac{B_1C_1}{BC} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{MN}^2}{\overline{B_1C_1}^2} = \frac{\overline{B_1C_1}^2}{\overline{BC}^2}. \tag{6}$$

Din compararea relaţiilor (4), (5) şi (6) rezultă relaţia:

$$\frac{\text{aria } A_1MN}{\text{aria } A_1B_1C_1} = \frac{\text{aria } A_1B_1C_1}{\text{aria } ABC}$$

care este sub o altă formă relaţia ce se cere a fi demonstrată.

Soluţie şi generalizare date de D-l Ion C. Vasiliu.

Putem lua în locul unei drepte antiparalele cu BC în triunghiul ABC, o dreaptă Δ oarecare şi repeta construcţia din enunţ, relaţia ce se cere a fi demonstrată este încă valabilă. Intr'adevăr putem face o proecţie ortogonală a figurii pe un plan, altul decât planul figurii aşa fel încât prin proecţie dreapta Δ să devie anti-

paralelă cu BC. E suficient să alegem planul de proecție așa fel încât o elipsă oarecare circumscrisă patrulaterului BCB_1C_1 să se proecteze după un cerc. Cum într'o astfel de proecție paralelismul și raportul între arii se păstrează, și teorema fiind adevărată în proecție va fi adevărată și în cazul general.

S'au primit demonstrații bune dar incomplecte dela D-nii: Aurel Em. Bădescu, Cezar Coșniță, Gh. Th. Gheorghiu-Gladis, Mircea I. Grossu, Const. Gh. Lupescu.

PROBLEMA 3872. *Când* szu/u *e pătrat.*

I. N. Aliman.

Soluție dată de D-nii: N. Aldea, M. Margulius (București), Haralamb P. Ionescu-Biss și D. Șerban-Ulmeni (Oltenița).

Vom pune $szu = u \times N^2$ și fie u' ultima cifră a lui N^2. Conform enunțului va trebui să avem:

$$M10 + u = u(M10 + u')$$

deci

$$u(u' - 1) = M10.$$

Cum u' nu poate fi decât 1, 4, 5 sau 9 ca ultimă cifră a unui patrat perfect (cazul $u' = u = 0$ fiind exclus, problema fiind altfel fără sens) se vede că pentru a satisface relației precedente, va trebui să analizăm cazurile

1^0. $u' = 1$; u oarecare.

2^0. $u' = 5$ sau 9 ; $u = 5$.

3^0. $u' = 6$; $u = 2, 4, 6$ sau 8

căci $u' = 4$ nu dă nici o soluție.

1^0. In primul caz; $u' = 1$; $1 \leqq u \leqq 9$ deci $\frac{100}{9} \leqq N^2 \leqq 1000/1$ sau $4 \leqq N \leqq 31$. Deoarece însă N^2 se termină cu 1, N se va termina cu 1 sau 9, adică N nu va putea lua decât valorile; 9, 11, 19, 21, 29, 31. La fiecare deci aceste valori a lui N vom lua pentru u toate valorile cuprinse între 1 și 9 cu singura condiție ca $u \times N^2$ să fie un număr de trei cifre.

Vom găsi astfel soluţiile:

N= 9; *szu*= 81×2=*162*, 81×3=*243*, 81×4=*324*, 81×5=*405*,
81×6=*486*, 81×7=*567*, 81×8=*648*, 81×9=*729*,

N=11; *szu*=121×1=*121*,121×2=*242*,121×3=*363*,121×4=*484*,
121×5=*605*,121×6=*726*,121×7=*847*,121×8=*968*,

N=19; *szu*=361×1=*361*,361×2=*722*,

N=21; *szu*=441×1=*441*,441×2=*882*,

N=29; *szu*=841×1=*841*,

N=31; *szu*=961×1=*961*.

2⁰. In al 2-lea caz $u' = 5$ sau 9, $u = 5$; $100/5 \leqq N^2 \leqq 1000/5$ deci $5 \leqq N \leqq 14$. Deoarece N^2 se termină cu 5 sau 9, N nu se va putea termina decât cu 3, 5 sau 7, prin urmare N va putea lua în acest caz numai valorile: 5, 7 sau 13. Potrivit acestui caz vom avea soluţiile:

$$N = 5 \; ; \; szu = 25 \times 5 = 125$$
$$N = 7 \; ; \; szu = 49 \times 5 = 245$$
$$N = 13 \; ; \; szu = 169 \times 5 = 845.$$

3⁰. In sfârşit dacă $u'=6$; $u=2, 4, 6$ sau 8; $100/8 \leqq N^2 \leqq 1.000/2$ deci $4 \leqq N \leqq 22$. Pe de altă parte deoarece N^2 se termină cu 6, N nu se va putea termina decât cu 4 sau 6, şi deci nu va putea lua decât valorile: 4, 6, 14, 16. La fiecare din aceste valori a lui N, vom lua pentru u toate cifrele pare, şi vom căpăta o soluţie dacă $u \times N^2$ va fi un număr de trei cifre. Vom căpăta:

N = 4 ; *szu* = 16 × 8 = *128*,

N = 6 ; *szu* = 36 × 4 = *144*, 36 × 6 = *216*, 36 × 8 = *288*,

N = 14 ; *szu* = 196 × 2 = *392*, 36 × 4 = *784*,

N = 16 ; *szu* = 256 × 2 = *512*.

Problema admite aşa dar în total *32 de soluţii*.

Observaţii. Au întrebuinţat un bun raţionament fără a găsi toate soluţiile D-nii: C. D. Ionescu-Ţiu, N. N. Mihăileanu şi Popa G. Ioan (30 soluţii), M. D. Moţoc (29 soluţii), Bulancea G. Ioan (27 soluţii) Emilian Mereuţă (26 soluţii), Petre I. Ghi-

ŞOIU (25 soluţii), HALPERIN H. ALEX. (22 soluţii). ENICĂ I. CONSTANTIN (19 soluţii), AUREL EM. BĂDESCU (17 soluţii), ANTONESCU NICOLAIE (15 soluţii).

Soluţii parţiale s'au primit dela D-l COSTACHE N. (10 soluţii), D-ra PRUNCU G. SILVIA (1 soluţie), VLADIMIR CRIVĂŢ (indicaţia metodei de determinare a unor soluţii particulare).

A. P.

PROBLEMA 4122. *La primul congres al matematicienilor români, ţinut la Cluj în luna Martie 1929, au fost înscrişi* N *membri şi în realitate au participat* M *congresişti. Ştiind că atât* M *cât şi* N *nu diferă prea mult de 150, iar numerile:*

$$(M+N)^{20m+3} \quad şi \quad (M-N)^{20n+3}$$

se termină respectiv cu 64 şi 28, oricari ar fi m *şi* n *întregi, se cere să se calculeze atât numărul celor înscrişi, cât şi acela al membrilor prezenţi.*

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţie dată de D-l N. N. ALDEA (stud. mat. Buc.).

Numărul: $(M+N)^3$ se va termina tot cu 64 iar numărul $(M-N)^3$ se va termina tot cu 28 ca şi numerile date în enunţul problemei şi această afirmaţie o sprijinim pe cele arătate chiar de propunător la pag. 330 şi următoarele în «G. M.» anul XXXVII. Acestea fiind, urmează că:

$(M+N)$ se va termina cu 4
$(M-N)$ se va termina cu 2

şi cum numai ultimile două cifre ale numărului influenţează terminaţia de două cifre a cubului numărului, înseamnă că atât pentru $(M+N)$ cât şi pentru $(M-N)$ trebuiesc căutate cifra zecilor, cari alăturate de 4 sau 2 să dea prin ridicări la cub respectiv terminaţiile 64 şi 28.

Pentru $(M+N)$ găsim numerile: . . . 04 şi . . . 54
Pentru $(M-N)$ găsim numerile: . . . 12 şi . . . 62.

Având în vedere că atât M cât şi N nu diferă prea mult de 150, urmează că putem scrie următoarele sisteme de ecuaţiuni:

$$\begin{cases} M+N = 354\ ;\ 354\ ;\ 304\ ;\ 304\ ;\ 254\ ;\ 254 \\ M-N = 62\ ;\ 12\ ;\ 62\ ;\ 12\ ;\ 62\ ;\ 12. \end{cases}$$

Eliminăm soluţiile :

$$M+N=354 \quad \text{şi} \quad M+N=254$$
$$M-N=62 \qquad M-N=62$$

căci una dă $M>200$, alta $N<100$.

Rămân de cercetat soluţiile :

$$\begin{cases} M=183 \\ N=171 \end{cases} \quad \begin{cases} M=183 \\ N=121 \end{cases} \quad \begin{cases} M=158 \\ N=146 \end{cases} \quad \begin{cases} M=133 \\ N=121. \end{cases}$$

Ori, din acestea, primele două au pe M mai aproape de 200 decât de 150 iar ultima are pe N mai aproape de 100 — încât soluţia care se apropie mai mult de datele problemei este :

$$M=158 \qquad N=146$$

adică s'au înscris 146 congresişti şi au participat 158; această ultimă cifră corespunde cu cea dată în darea de seamă asupra congresului — în «G. M.» vol XXXIV, pag. 403.

Observaţie. — Au dat acelaşi rezultat şi D-nii: M. Margulius şi I. C. Parepeanu (Şc. milit. geniu) însă pentru a ajunge la el pe de o parte au făcut $m=n=0$ fără a motiva, pe de alta au discutat numai numărul 304.

— Un corespondent — deşi reiese clar din datele problemei că $M>N$ — nu a vroit să creadă că s'au prezentat mai mulţi decât inscrişi. Acest lucru e foarte natural însă la congrese şi în special la cele internaţionale, nu însă şi când e vorba de concursuri, examene, etc.!

Cpt. Gh. N.

*EXERCIŢII

19. Să se demonstreze că

$$(x_1-x_2)^7+(x_2-x_3)^7+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^7+(x_n-x_1)^7=\mathcal{M}7$$

unde numerele: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt întregi.

Sub-Lt. I. C. Savin.

R. Cum

$$(a-b)^7=a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7=a^7-b^7+\mathcal{M}7$$

şi deci însemnând cu S suma din enunţ avem

$$S=\left(x_1^7-x_2^7\right)+\left(x_2^7-x_3^7\right)+\ldots+\left(x_{n-1}^7-x_n^7\right)+\left(x_n^7-x_1^7\right)+\mathcal{M}7=\mathcal{M}7.$$

20. Să se demonstreze mai general că

$$(x_1 - x_2)^p + (x_2 - x_3)^p + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^p + (x_n - x_1)^p = \mathcal{M}p$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n numere întregi.

Gh. Th. Gh.

R. Avem, ca şi la exerciţiul precedent,

$$(a-b)^p = a^p - C_p^1 a^{p-1} b + C_p^2 a^{p-2} b^2 - \ldots + C_p^1 a b^{p-1} - b^p$$

$$= a^p - b^p + \mathcal{M}.p$$

deoarece p este impar şi toţi coeficienţii

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

cum : $k < p$, conţin pe p ca factor. Deci, rezultă că

$$(x_1 - x_2)^p + (x_2 - x_3)^p + \ldots + (x_n - x_n)^p + (x_n - x_1)^p$$

$$= (x_1^p - x_2^p) + (x_2^p - x_3^p) + \ldots + (x_n^p - x_1^p) + \mathcal{M}p = \mathcal{M}p.$$

PROBLEME PROPUSE

*4211. Să se găsească o fracţie ireductibilă, cu numitorul 21 şi alta, iarăşi ireductibilă, cu numitorul 55 ştiind că suma lor este tot una cu diferenţa dintre îndoitul celei dîntâiu şi a doua.

I. Ionescu.

*4212. Să se găsească numerele întregi m şi n ştiind că m^n are n cifre iar n^m are m cifre.

Col. Gh. Buicliu.

*4213. Cum se pot afla cuburile terminate cu n cifre identice? Generalizare.

I. V. Măţieş.

4214. Fie M, N, P trei puncte ale căror proecţii pe laturile triunghiului ABC sunt picioarele a 3 ceviene şi H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA, APB. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe laturile triunghiului ABC.

a) Când $A_1B_1C_1$ sunt picioarele a 3 ceviene, perpendicularele duse prin H_1 H_2. H_3 pe dreptele MA_1, NB_1, PC_1 determină un triunghiu omologic cu triunghiul ABC.

b) Dacă A_1, B_1, C_1 sunt 3 puncte colineare pe laturile triunghiului ABC, perpendicularele duse prin H_1, H_2, H_3 pe dreptele MA_1, NB_1, PC_1 determină pe laturile triunghiului ABC picioarele a 3 ceviene.

Cazul când M, N, P sunt 3 puncte ale căror proecții pe laturile triunghiului ABC sunt colineare.

MICU GRÜNBAUM.

*4215. Se consideră un triunghiu ABC și din piciorul înălțimei vârfului A pe latura BC, se duc paralele respectiv la laturile AB și AC. Aceste două paralele taie pe AC și AB în A′ și A″. Analog se determină punctele B′, B″ și C′, C″. Să se arate că

$$a^4\,\overline{A'A''}^2 + b^4\,\overline{B'B''}^2 + c^4\,\overline{C'C''}^2 = 4S^2\,[48R^2 - 5\,(a^2 + b^2 + c^2)].$$

GH. TH. GHEORGHIU.

*4216. Un tetraedru este echifacial dacă cercurile circumscrise, sau cercurile înscrise, fețelor sunt egale.

V. THÉBAULT.

*4217. Fie a, b două numere pozitive și $A = \dfrac{a+b}{2}$ media lor aritmetică, iar $H = \dfrac{2ab}{a+b}$ media lor armonică.

Se definește numărul:

$$T = \frac{ab - 1 + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}$$

ca *media tangențială* a celor două numere.

Să se arate că avem, oricare ar fi a și b,

$$H \leqslant T \leqslant A.$$

N. C.

*4218. Fie

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = n_2p_2 + n_3p_3 \;, \quad \Delta_2 = n_3p_1 + n_1p_3 \;, \quad \Delta_3 = n_1p_2 + n_2p_1.$$

Să se verifice identitatea:

$$A^2 \cdot B^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_2m_1 & a_2m_2 & a_2m_3 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_2m_1 & b_2m_2 & b_2m_3 \\ a_2m_1 & b_2m_1 & 2n_1p_1 & \Delta_3 & \Delta_2 \\ a_2m_2 & b_2m_2 & \Delta_3 & 2n_2p_2 & \Delta_1 \\ a_2m_3 & b_2m_3 & \Delta_2 & \Delta_1 & 2n_3p_3 \end{vmatrix}.$$

N. BOTEA.

4219. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^4 x - 2\cos^3 x - 2\sin^2 x + \lambda \cos x = 0,$$

știind că avem:

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \sin^2 x_3 + \sin^2 x_4 = 2$$

x_1, x_2, x_3, x_4 fiind arcele corespunzătoare rădăcinilor ecuației.

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN.

4220. I. Să se calculeze prima diferențială totală a funcțiunei

$$u = \log \operatorname{tg} \frac{x-y}{x+y}$$

baza logaritmului fiind e.

II. Presupunând că x și y sunt rădăcinile ecuației

$$(p^2 - q^2)z^2 - (p^2 - 2pq - q^2)z - pq = 0$$

și presupunând că p și q sunt la rândul lor variabile independente, să se calculeze expresiunea diferențialei totalei a lui u.

ION S. ANTONIU.

ERATĂ. 1) La problema 4148 (G. M. Vol. XXXVII pag. 400) se va înlocui expresia din rândul al treisprezecilea:

$$\frac{\partial^n U(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial^\alpha x_1 \, \partial^\beta x_2 \ldots \partial^\lambda x_n}$$

prin expresia:

$$\frac{\partial^n U(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1^\alpha \, \partial x_2^\beta \ldots \partial x_n^\lambda}.$$

2) In vol. XXXVII pag. 442 se va înlocui rândul al patrulea de sus prin

$$(OB) + (OB_1) = 2(OO_1) + (O_1B) + (O_1B_1).$$

La aceiaș pagină rândul al 6-lea de jos se va ceti:

„luăm simetricele punctului O_1 în raport cu mijloacele segmentelor AA', BB', CC'."

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (4156, 57, 96); *Aurian Justin* (4024); *Avram N. C. Subloc.* (3491, 4202, P); *Bădescu A. Subloc.* (3491); *Cârstoiu D. I.* (4000); *Chiricuţă M.* (E); *Chirilă M.* (3491); *Costăchescu V. C.* (E); *Curchi I.* (4179); *Florescu M. U.* (4064); *Gheorghiu C. A.* (2392, 3976); *Godeanu V.* (3491); *Ionescu-Biss P. H.* (2980, 4146, N); *Ionescu Ţiu Subloc.* (4038); *Léber Margareta* (4183, 96, 4207); *Margulius M.* (2758, 971, 3239, 697, 764, 75, 874, 75, 977, 4060, 183, 90, 94, 96, 207); *Mătieş V. I.* (P); *Mazilu C. P.* (3491); *Mereuţă M.* (3579, 4153, E); *Mihăileanu N. N.* (2664, 89, 4199); *Negrea A. L. M.* (4182, 96); *Pănoiu Em.* (3491); *Patraulea D. I.* (3936, 77, 4060), *Predoescu I. M.* (4187); *Rogahehi Eugen* (4196); *Sager N. Iancu* (4196, 205); *Savin C. I. Subloc.* (3491); *Stoica D. Al.* (4152, 86, 202); *Trufinescu C.* (3491); *Vasilescu-Popescu C.* (4187); *Vissarion V.* (4127); *Zane D. N.* (4061).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1933

SUMARUL

1. † Ştefan N. Mirea . . . . . *Ing. C. E. Gabrielescu*
2. Asupra şirului lui Fibonacci . . . . . *Ioan B. Florescu*
3. Proprietăţi ale triunghiului . . . . . *N. G. Botea*
4. Concursul „Gazetei Matematice"
5. Regulamentul fondului „General Sc. Panaitescu"
6. Note matematice: 25 — 30
7. Chestiuni de examen
8. Bibliografie
9. Cereri
10. Diverse
11. Probleme rezolvate: 4042, 4064, 4092, 4099, 4124, 4152, 4153, 4202
12. Exerciţii: 21 — 23
13. Probleme propuse: 4201, 4221 — 4230

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 54, 55, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 72, 81, 89, 91, 92, 97, 201, 03, 06, 09, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

† ȘTEFAN N. MIREA

La 15 Ianuarie 1932, s'a stins din viață unul dintre cei mai distinși, mai valoroși și mai bun inginer al Corpului Technic Român, ȘTEFAN N. MIREA.

Necrologul ce urma să fie publicat încă de atunci, a întârziat din cauză că unii prieteni cari și-au luat acest angajament, n'au răspuns până în prezent.

ȘTEFAN N. MIREA profesor la Academia de Arhitectură din București ca și la Universitate, Facultatea de Științe Secțiile Chimia Industrială și Electrotechnică, a fost un desăvârșit dascăl, cum fusese și un desăvârșit inginer.

Născut în anul 1882 la 15 Iunie, a făcut liceul Sf. Petru și Pavel din Ploești, pe care l'a absolvit în anul 1902. Intrând în Școala Națională de Poduri și Șosele din București, s'a remarcat printr'o vie inteligență și printr'o deosebită aplicație; lucru ce a făcut să i se prevadă o frumoasă carieră. A fost printre primii în tot timpul cât a urmat Școala Națională de Poduri și Șosele, dându-și în același timp în mod regulat și examenele la Facultatea de Științe, Secția Matematici.

In anul 1907 și-a luat diploma de inginer, în același timp cu Licența în Matematici. In același an a fost numit inginer în Direcțiunea Generală de Studii și Construcții din Ministerul Lucrărilor Publice, unde s'a distins în mod cu totul deosebit, prin studiile și lucrările ce a executat.

Tot atunci a fost numit și Asistent la Școala Națională de Poduri și Șosele.

In serviciul Ministerului, a conceput și a executat cele mai îndrăznețe poduri de șosea, în beton armat, cu deschideri ce nu se mai făcuse în țară, până atunci. Putem cita între altele: Podul peste râul Bârlad la Tecuciu, Podul peste Siret dela Rogoaza, Podul dela Ajudul Vechiu, Lucrările dela Cercul Militar din București, unde a adus ca aport cunoștințele sale precise și clarvăzătoare, Lucrările dela Liga Culturală, Alimentarea cu apă la Moreni, Studiul alimentărei cu apă la Silistra, etc.

A fost Secretarul Consiliului Technic Superior și în timpul Ministeriatului D-lui General Văleanu a fost însărcinat și cu conducerea Secretariatului General al Ministerului de Comunicații.

A fost membru activ la „Soc. Gazeta Matematică".

A fost membru şi apoi preşedinte la Societatea de Ştiinţe din Bucureşti. A fost preşedintele Cercului Technic al României; a fost membru activ al Societăţei Regale Române de Geografie; a scos culegeri de probleme împreună cu regretatul Tr. Lalescu; a scos un studiu asupra aerodinamicei şi a făcut diferite comunicări la congresele de aviaţie din străinătate; a publicat numeroase articole.

In anul 1920 înfiinţându-se o Direcţie a Aviaţiei Civile la noul Minister al Comunicaţiilor, a fost însărcinat cu organizarea şi conducerea acestei Direcţiuni. De această misiune s'a achitat tot atât de strălucit, cum s'a achitat şi de celelalte însărcinări, ce le-a avut. Concepţia sa înaltă şi deosebita prevedere ce a avut, a făcut să înzestreze Aviaţia Civilă Română cu cele trei aeroporturi de seamă: Băneasa, Galaţi şi Chişinău, mărturie indiscutabilă a meritelor sale. La aeroportul Băneasa a proectat şi a executat un hangar de beton armat de 50 metri deschidere. Cu toate criticele aduse în acea vreme, concepţia sa clarvăzătoare, s'a impus, şi opera ce a înfăptuit este mărturia meritului său şi a calităţilor sale deosebite, recunoscute azi de toată lumea.

Pentru motive rezultate din consideraţiuni politice, Direcţia Aviaţiei Civile din Ministerul Comunicaţiilor s'a desfiinţat şi atunci Ştefan N. Mirea şi-a dat demisia, ca un protest al amestecului nefast al politicei în domeniul technic. De atunci, a rămas cu cele două catedre Universitare, unde şi-a îndreptat toată activitatea şi experienţa sa, muncind cu râvnă pentru formarea noilor generaţii de ingineri universitari, în cadrul unei ştiinţe precise şi clare.

Seriile de ingineri, cari l'au avut de Profesor, nu vor putea uita niciodată pe acel ce le-a fost bunul şi iubitul profesor Mirea.

In cariera sa a fost decorat cu Ordinul „Steaua României" în gradul de Ofiţer şi „Coroana României" în gradul de comandor. A luat parte în calitate de ofiţer la cele două războaie naţionale din 1913 şi 1916.

Ca om şi coleg era unul dintre puţinii oameni cari nu ştiu ce este ura şi răul. Nimeni n'a apelat la serviciile sale, fără să fie satisfăcut în măsura posibilului. Prietenii, nu-l vor putea uita niciodată pe cel ce a fost bunul, blândul şi iubitul Fănică, totdeauna serviabil, totdeauna gata de a interveni în ajutorul colegilor.

Fie-i ţărâna uşoară!

Inginer C. E. Gabrielescu.

ASUPRA ŞIRULUI LUI FIBONACCI

(Urmare *)

Din relaţia stabilită (4) se vede că:

$$U_{nk-1} = \mathcal{M}U_{n-1}^2 \quad \text{dacă} \quad k = \mathcal{M}U_{n-1} \;, \quad \therefore \quad n_2 = n\,U_{n-1}.$$

Să trecem la determinarea lui n_3. Avem:

$$(U_{\beta n_2 - 1}/U_{n-1}) - \beta U_{n-1}\,U_n^{k-1} + \tfrac{1}{2}\beta U_{\lambda-1}^2(\beta U_{n-1} - 1)\,U_n^{k-2} = \mathcal{M}U_{n-1}^2.$$

Pentruca $U_{n_3-1} = U_{\beta n_2 - 1}$ să se dividă cu U_{n-1}^3 trebue ca:

$$\beta U_{n-1}\,U_n^{k-1} - \tfrac{1}{2}\beta U_{n-1}^2(\beta U_{n-1} - 1)\,U_n^{k-2} = \mathcal{M}U_{n-1}^2. \qquad (5)$$

Vom distinge două cazuri:

1) U_{n-1} *nepereche*. Egalitatea (5) ne dă:

$$\beta U_{n-1}\,U_n^{k-1} \equiv \mathcal{M}U_{n-1}^2, \quad \therefore \quad \beta = \mathcal{M}U_{n-1}$$

$$\therefore \quad n_3 = n_2\,U_{n-1} = n\,U_{n-1}^2. \qquad (6)$$

2) U_{n-1} *pereche*. Dacă punem $U_{n-1} = 2A$ atunci (5) ne dă:

$$2\beta A U_n^{k-1} - 2\beta A^2(2\beta A - 1)\,U_n^{k-2} = \mathcal{M}(4A^2)$$

$$\therefore \quad 2\beta A U_n^{k-1} + 2\beta A^2 U_n^{k-2} = \mathcal{M}(4A^2),$$

$$\therefore \quad \beta(U_n + A) = \mathcal{M}2A. \qquad (7)$$

Dacă A este pereche, $(U_n + A)$ este nepereche şi prim cu A; deci trebue să avem:

$$\beta = \mathcal{M}(2A), \quad \therefore \quad \beta = \mathcal{M}U_{n-1},$$

şi prin urmare tot formula (6) este valabilă.

Dacă A este nepereche, $(U_n + A)$ este prim cu A, dar divizibil cu 2. Condiţia (7) va fi satisfăcută în acest caz numai dacă

$$\beta = \mathcal{M}A, \quad \therefore \quad \beta = \mathcal{M}(\tfrac{1}{2}U_{n-1})$$

$$\therefore \quad n_3 = \tfrac{1}{2}n_2\,U_{n-1} = \tfrac{1}{2}nU_{n-1}^2. \qquad (8)$$

Deoarece U_{n-1} e pereche, fără ca $\frac{1}{2}U_{n-1}$ să fie pereche pentru $n = \mathcal{M}6 + 3$, rezultă că formula (8) este aplicabilă numai în cazul când $n = \mathcal{M}6 + 3$; în toate celelalte cazuri, fiind valabilă numai formula (6) mai restrictivă.

*) Vezi *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, pag. 168.

Pentru a simplifica expunerea, voiu căuta să determin dacă (U_{n_3-1}/U^2_{n-1}) și (U_{n_3-1}/U^3_{n-1}) au sau nu factori comuni cu U_{n-1}. Pentru aceasta, scoatem din (4):

$$(U_{n_2-1}/U_{n-1}) - U_{n-1}U_n^{k-1} + \tfrac{1}{2}U^2_{n-1}(U_{n-1}-1)U_n^{k-2} = \mathcal{M}U^2_{n-1},$$

$$\therefore (U_{n_2-1}/U^2_{n-1}) - U_n^{k-1} + \tfrac{1}{2}U_{n-1}(U_{n-1}-1)U_n^{k-2} = \mathcal{M}U_{n-1}. \qquad (9)$$

Dacă U_{n-1} este nepereche, egalitatea (9) devine:

$$(U_{n_2-1}/U^2_{n-1}) - U_n^{k-1} = \mathcal{M}U_{n-1}.$$

Prin urmare (U_{n_2-1}/U^2_{n-1}) nu are factori comuni cu U_{n-1}.

Dacă U_{n-1} este pereche, punem ca mai sus $U_{n-1} = 2A$ și (9) devine:

$$U_{n_2-1}/2A - 2AU_n^{k-1} + 2A^2(2A-1)U_n^{k-2} = \mathcal{M}U^2_{n-1} = \mathcal{M}(4A^2),$$

de unde, după oarecari transformări:

$$(U_{n_2-1}/4A^2) - U_n^{k-2}(U_n + A) = \mathcal{M}(2A).$$

U_n este prim cu A și nepereche, iar $(U_n + A)$ se divide cu 2 numai dacă A este nepereche. Deci (U_{n_2-1}/U^2_{n-1}) este în general prim cu U_{n-1} afară de cazul $n = \mathcal{M}6 + 3$ când are cu U_{n-1} factorul comun 2.

Tot din (4) deducem:

$$(U_{\beta n_2-1}/U_{n_2-1}) - \beta U_{n_2}^{\beta-1} + \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1)U_n^{\beta-2}U_{n_2-1} = \mathcal{M}U^2_{n_2-1},$$

$$\therefore (U_{\beta n_2-1}/U_{n_2-1}) - \beta U_{n_2}^{\beta-1} = \mathcal{M}U^2_{n-1},$$

deoarece $U_{n_2-1} = \mathcal{M}U^2_{n-1}$.

Dacă n nu este $\mathcal{M}6 + 3$ atunci:

$$(U_{n_3-1}/U_{n_2-1}) - U_{n-1}U_n^{\beta-1} = \mathcal{M}U^2_{n-1},$$

$$\therefore (U_{n_3-1}/U_{n_2-1}U_{n-1}) - U_n^{\beta-1} = \mathcal{M}U^2_{n-1},$$

și cum în acest caz, după cele spuse mai sus U_{n_2-1}/U_{n-1} nu au alt factor comun cu U_{n-1} în afară de U_{n-1}, rezultă că (U_{n_3-1}/U_{n-1}) este prim cu U_{n-1}.

Dacă $n = \mathcal{M}6 + 3$, obținem ca mai sus:

$$(U_{n_3-1}/\tfrac{1}{2}U_{n_2-1}U_{n-1}) - U_n^{\beta-1} = \mathcal{M}U^2_{n-1},$$

și cum câtul dintre $\frac{1}{2}U_{n_2-1}U_{n-1}$ și U^3_{n-1} este un număr întreg, rezultă că (U_{n_3-1}/U^3_{n-1}) este și în acest caz prim cu U_{n-1}.

Acestea zise, să trecem acum mai departe la determinarea lui n_r pentru $r > 3$. Din (4), deducem :

$$(U_{\alpha n_3 - 1} / U_{n_3 - 1}) - \alpha U_{n_3}^{\alpha - 1} = \mathcal{M} U_{n-1}. \qquad (10)$$

Cum U_{n_3-1} este produsul lui U_{n-1}^3 printr'un număr prim cu U_{n-1}, rezultă că pentru ca să avem $U_{\alpha n_3 - 1} = \mathcal{M} U_{n-1}^4$ este necesar şi suficient ca să avem $\alpha U_{n_3}^{\alpha-1} = \mathcal{M} U_{n-1}$. Deci :

$$\alpha = \mathcal{M} U_{n-1}, \quad \therefore \quad n_4 = n_3 U_{n-1}.$$

Din (10) se deduce :

$$(U_{n_4 - 1} / U_{n-1} U_{n_3 - 1}) - U_n^{\alpha - 1} = \mathcal{M} (U_{n_3 - 1} / U_{n-1}),$$

relaţie care arată că (U_{n_4-1} / U_{n-1}^4) este prim cu U_{n-1}.

Pentru a determina pe n_r pentru $r > 4$, vom presupune că pentru r avem :

$$n_r = n_{r-1} U_{n-1},$$

şi că $(U_{n_r - 1} / U_{n-1}^r)$ este prim cu U_{n-1}. Plecând dela aceste premise vom căuta să arătăm că proprietatea se păstrează şi pentru $(r+1)$. Cum am arătat că ea este valabilă pentru $r = 4$, va fi adevărată şi pentru $r > 4$. In adevăr avem :

$$(U_{\alpha n_r - 1} / U_{n_r - 1}) - \alpha U_{n_r}^{\alpha - 1} = \mathcal{M} U_{n_r - 1}.$$

Ca să avem $U_{\alpha n_r - 1} = \mathcal{M} U_{n-1}^{r+1}$ trebuie să avem :

$$\alpha = \mathcal{M} U_{n-1}, \quad \therefore \quad n_{r+1} = r_r U_{n-1}.$$

De asemenea se vede că $(U_{n_{r+1} - 1} / U_{n-1}^{r+1})$ este prim cu U_{n-1}. Din cele spuse mai sus se deduce dar :

Dacă $n = \mathcal{M} 6 + 3 : n_2 = n U_{n-1}, n_3 = \frac{1}{2} n U_{n-1}^2, \; n_r = \frac{1}{2} n U_{n-1}^{n-1} \; r \geqslant 3$

» $n \neq \mathcal{M} 6 + 3 : n_2 = n U_{n-1}, n_3 = n U_{n-1}^2, \; n_r = n U_{n-1}^{n-1} \; r \geqslant 3.$

De aci regula:

Termenul U_{tn-1} *se împarte cu* U_{n-1}^2 *dacă* t *se divide cu* U_{n-1}.

Termenul U_{tn-1} *se divide cu* U_{n-1}^r, *unde* $r > 2$, *când* $n \neq \mathcal{M} 6 + 3$, *dacă* $t = \mathcal{M} U_{n-1}^{r-1}$ *şi când* $n = \mathcal{M} 6 + 3$ *dacă* $t = \mathcal{M} (\frac{1}{2} U_{n-1}^{r-1})$.

Acestea sunt criteriile căutate.

Ion B. Florescu.

PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI

I

1°. *Teoremă. Să considerăm un triunghiu* ABC, *o dreaptă* Δ *şi două puncte* M, N *în acelaş plan. Pe dreapta* Δ *considerăm o involuţie. Cevienele punctelor* M, N: AM, BM, CM, AN, BN, CN *întâlnesc pe* Δ *respectiv în* A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. *Fie* A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2, *omoloagele acestor puncte în involuţia considerată pe* Δ. *Perechile de drepte* (A'_1N, A'_2M), (B'_1N, B'_2M), (C'_1N, C'_2M) *întâlnesc respectiv laturile* BC, CA, AB *în punctele* A', A'', B', B'', C', C'', *care se găsesc pe o aceiaş conică* Γ.

După o cunoscută teoremă a lui CARNOT, pentru ca punctele A', A'', B', B'', C', C'' să se găsească pe o conică Γ e necesar şi suficient să avem îndeplinită relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{C''A}{C''B}=1.$$

In cele ce urmează vom căuta să arătăm că, în cazul enunţului nostru avem îndeplinită această relaţiune.

Să luăm un sistem de coordonate carteziene dreptunghiulare, dreapta Δ fiind axa ordonatelor. Alegând origina convenabil, ordonatele a două puncte omoloage ale involuţiei sunt legate prin relaţia:

$$yy'+\lambda(y+y')=0$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{\lambda y}{y+\lambda}.$$

Să mai considerăm punctele:

$$A(x_1, y_1)\quad,\quad B(x_2, y_2)\quad,\quad C(x_3, y_3)$$

$$M(x_m, y_m)\quad,\quad N(x_n, y_n).$$

Dreapta AM are ecuaţia:

$$y-y_m=\frac{y_1-y_m}{x_1-x_m}(x-x_m).$$

Ea întâlneşte axa Δ în punctul A_1, a cărui ordonată este:

$$y=y_m-x_m\frac{y_1-y_m}{x_1-x_m}=\frac{y_m x_1-x_m y_1}{x_1-x_m}.$$

Omologul lui A_1 în involuția considerată pe Δ este punctul A'_1, a cărui ordonată este:

$$y' = \frac{\lambda (x_m y_1 - y_m x_1)}{(y_m x_1 - x_m y_1) + \lambda (x_1 - x_m)}.$$

Dreapta A'_1N va avea ecuația:

$$y + \frac{\lambda (y_m x_1 - x_m y_1)}{(y_m x_1 - x_m y_1) + \lambda (x_1 - x_m)} = \frac{y_n + \dfrac{\lambda (y_m x_1 - x_m x_1)}{(y_m x_1 - x_m y_1) + \lambda (x_1 - x_m)}}{x_n} x$$

sau:

$$(y_m x_1 - x_m y_1) x_n y - (y_m x_1 - x_m y_1) y_n x + \lambda (x_1 - x_m) x_n y - \lambda (y_m x_1 - x_m y_1 + x_1 y_n - x_m y_n) x + \lambda (y_m x_1 - x_m y_1) x_n = 0.$$

Să notăm pentru ușurință respectiv cu $d(m_1, n_1)$, $d(m_2, n_1)$ și $d(m_3, n_1)$ următoarele trei expuneri:

$$d_1 \sqrt{[(y_m x_1 - x_m y_1)(y_n + \lambda) + (x_1 y_n - x_m y_n)]^2 + [(y_m x_1 - x_m y_1) x_n + \lambda (x_1 - x_m) x_n]^2}$$

$$d_2 \sqrt{[(y_m x_1 - x_m y_1)(y_n + \lambda) + (x_1 y_n - x_m y_n)]^2 + [(y_m x_1 - x_m y_1) x_n + \lambda (x_1 - x_m) x_n]^2}$$

$$d_3 \sqrt{[(y_m x_1 - x_m y_1)(y_n + \lambda) + (x_1 y_n - x_m y_n)]^2 + [(y_m x_1 - x_m y_1) x_n + \lambda (x_1 - x_m) x_n]^2}$$

Vom avea:

$$d(m_1, n_1) = (y_m x_1 - x_m y_1)(x_n y_1 - x_1 y_n) + \lambda [(x_1 - x_m) x_n y_1 - (y_m x_1 - x_m y_1 + x_1 y_n - x_m y_n) x_1 + (y_m x_1 - x_m y_1) x_n]$$

$$d(m_2, n_1) = (x_n y_m x_1 y_2 + x_m y_n x_2 y_1) - (x_m x_n y_1 y_2 + y_m y_n x_1 x_2 + \lambda [x y_2 x_n + y_1 x_2 x_m - x_m x_n (y_1 + y_2) + x_n y_m x_1 + x_m y_n x_2 - x_1 x_2 (y_m + y_n)]$$

$$d(m_3, n_1) = (x_n y_m x_1 y_3 + x_m y_n x_3 y_1) - (x_m x_n y_1 y_3 + y_m y_n x_1 x_3 + \lambda [x_1 y_3 x_n + y_1 x_3 x_m - x_m x_n (y_3 + y_1) + x_n y_m x_1 + x_m y_n x_3 - x_1 x_3 (y_m + y_n)].$$

Deducem cu ușurință:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{d_2}{d_3} = \frac{d(m_2, n_1)}{d(m_3, n_1)}.$$

In mod analog găsim :

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{d(m_3, n_2)}{d(m_1, n_2)}, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{d(m_1, n_3)}{d(m_2, n_3)}, \quad \frac{A''B}{A''C} = \frac{d(m_1, n_2)}{d(m, n_3)},$$

$$\frac{B''C}{B''A} = \frac{d(m_2, n_3)}{d(m_2, n_1)}, \quad \frac{C''A}{C''B} = \frac{d(m_3, n_1)}{d(m_3, n_2)},$$

din care deducem relaţia pe care ne propusesem să o aflăm

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1.$$

Deci punctele A', A'', B', B'', C', C'' se găsesc pe o conică. Dacă trei din aceste puncte sunt colineare şi celelalte trei se vor bucura de aceiaş proprietate. Deasemenea dacă trei din ele sunt picioarele a trei ceviene concurente, acelaş lucru îl putem spune despre celelalte trei puncte.

Teorema de mai sus poate prezenta cazuri particulare deosebit de interesante, din cari vom da câteva exemple.

Să presupunem că dreapta Δ este dreapta dela infinit şi că punctele duble ale involuţiei pe care o considerăm pe Δ sunt punctele circulare I şi J. Obţinem teorema următoare :

2°. *Fie punctele* M *şi* N *în planul triunghiului* ABC. *Perpendicularele ridicate în* N *pe cevienele* AM, BM, CM, *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *respectiv în* A'', B'', C''. *Punctele* A', A'', B', B'', C', C'' *se găsesc pe o conică* [1]).

Dacă M este ortocentrul triunghiului ABC iar N un punct oarecare în planul său, perpendicularele duse din N pe înălţimile triunghiului sunt paralele cu laturile, pe cari le întâlnesc deci în trei puncte situate pe dreapta dela infinit. Rezultă de aci propoziţiunea clasică :

3°. *Perpendicularele coborâte din ortocentrul unui triunghiu pe cevienele unui punct oarecare întâlnesc laturile respectiv în trei puncte colineare.*

4°. Pentru a găsi alte propoziţiuni remarcabile să considerăm un sistem de coordonate baricentrice, luând triunghiul ABC ca

1) N. Botea. Curierul Matematic II. p. 193.

Pentru această proprietate mi-a fost prezentată acum trei ani o simplă şi elegantă soluţie geometrică din partea D-lui I. Georgescu-Racoviţă.

Angajem pe tinerii corespondenţi să regăsească acea soluţie şi să încerce chiar o soluţionare prin geometrie pură a teoremei dela punctul 1°.

triunghiu fundamental. Dacă (x_0, y_0, z_0) sunt coordonatele unui punct L, locul geometric al punctelor P astfel ca paralelele duse prin P la conjugatele armonice ale cevienelor lui L să întâlnească laturile triunghiului ABC respectiv în trei puncte colineare este conica circumscrisă triunghiului de ecuație:

$$\Sigma\, yzx_0\,(y_0 - z_0)\,(-x_0 + y_0 + z_0) = 0\,^{1}).$$

In particular avem proprietatea:

5°. *Locul punctelor prin care ducând perpendiculare la cele trei bisectoare, acestea să taie laturile corespunzătoare în trei puncte colineare, e hiperbola lui* FEURBACH, *transformată prin puncte inverse a dreptei ce unește centrul cercului înscris* I *cu centrul cercului circumscris* O.

Din teoremele 2 și 5 deducem propoziția:

6°. *Perpendicularele coborâte din centrul cercului înscris unui triunghiu, pe cevienele unui punct al hiperbolei lui* FEUERBACH, *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului în trei puncte colineare.*

O altă particularizare a conicei de mai sus ne dă:

7°. *Antiparalelele duse la laturile triunghiului în unghiurile opuse, printr'un punct al hiperbolei lui* JERABECK *(transformata izogonală a dreptei lui* EULER) *întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte colineare.*

Din teoremele 2° și 7° deducem:

8°. *Perpendicularele coborâte din centrul cercului circumscris unui triunghiu pe cevienele unui punct al iperbolei lui* JERABECK *a triunghiului, întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului în trei puncte colineare.*

Cum punctul lui LEMOINE este izogonalul centrului de greutate, vom avea în particular:

9°. *Perpendicularele coborâte din centrul cercului circumscris unui triunghiu pe simediane întâlnesc laturile corespunzătoare în trei puncte colineare.*

Deasemenea se poate demonstra cu ușurință următoarea reciprocă a proprietății dela punctul 3°.

10°. *Dacă* H *este ortocentrul triunghiului* ABC, *iar* A', B', C' *trei puncte colineare, situate pe laturile lui, atunci perpendicu-*

1) I. C. VASILIU. Curierul Matematic I. p. 82.

larele coborâte din A, B, C *respectiv pe dreptele* HA', HB' HC' *sunt concurente.*

11°. Un alt caz particular interesant al teoremei dela punctul 1°, îl obținem dacă observăm că laturile unui unghiu, care admite bisectoare date, formează un fascicol în involuție. Vom avea proprietatea:

Fie în planul unui triunghiu ABC *două puncte* M, N *și o direcție* D. *Dreptele duse prin* M, *astfel ca direcțiile lor să fie simetrice cevienelor* AN, BN, CN *în raport cu* D, *întâlnesc respectiv laturile* BC, CA, AB *în punctele* A', B', C', *iar dreptele duse prin* N *astfel ca direcțiile lor să fie simetrice cevienelor* AM, BM, CM *în raport cu direcția* D *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *respectiv în punctele* A'', B'', C''. *Punctele* A', A'', B', B'', C', C'', *se găsesc pe o conică.*

12°. Proprietatea dela punctul 4° admite următoarea reciprocă:

Locul geometric al punctului P astfel ca paralelele duse prin punctul fix M (x_0, y_0, z_0) la conjugatele armonice ale cevienelor lui P este cubica

$$\Sigma\, x_0 (y_0 + z_0)\, yz\, (y - z) = 0.$$

Această cubică este circumscrisă triunghiului ABC și triunghiului lui complimentar și trece prin centrul de greutate G.

In particular când M este ortocentrul triunghiului

$$x_0 : y_0 : z_0 = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

se obține proprietatea;

13°. Locul geometric al punctului P astfel ca paralelele duse prin ortocentrul unui triunghiu ABC la conjugatele armonice ale cevienelor lui P să întâlnească laturile triunghiului în trei puncte colineare este cubica celor 17 puncte. (Locul punctelor inverse colineare cu centrul de greutate al triunghiului).

14°. Să considerăm o proprietate, care să cuprindă unele din cazurile particulare de mai sus. Să revenim la teorema 1°, dela care am plecat. Să ne dăm λ constant și punctul M fix. Locul geometric al punctului N pentruca punctele A', B', C' să fie colineare este cubica

$$d(m_2, n_1)\, d(m_3, n_2)\, d(m_1, n_3) + d(m_3, n_1)\, d(m_1, n_2)\, d(m_2, n_3) = 0$$

unde s'au înlocuit coordonatele x_n, y_n, z_n prin coordonatele curente x, y, z.

In acest caz după teorema generală dela 1° şi punctele A″, B″, C″ sunt colineare. Să observăm că dacă N se găseşte pe Δ proprietatea ca grupurile de puncte (A′, B′, C′), (A″, B″, C″) să fie colineare este întotdeauna verificată.

Deci cubica de mai sus se descompune în dreapta Δ şi o conică (C). Deasemenea proprietatea e verificată când N se găseşte într'un vârf al triunghiului. Astfel conica (C) este circumscrisă triunghiului ABC. Prin particularizări se pot găsi proprietăţi remarcabile ale triunghiului şi se pot regăsi altele deja cunoscute.

15°. Deasemenea locul geometric al lui N pentru ca cevienele AA′, BB′, CC′ să fie concurente este cubica

$$d(m_2, n_1)\, d(m_3, n_2)\, d(m_1, n_3) = d(m_3, n_1)\, d(m_1, n_2)\, d(m_2, n_3).$$

In general această cubică nu se descompune în curbe mai simple.

(Va urma). N. G. Botea.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

După cum s'a anunţat în Numărul 1, din Septemvrie 1932 al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de Matematici între elevii liceelor din ţară şi elevii anului preparator al Şcoalei Politechnice «Regele Carol II» din Bucureşti.

Data înscrierii la acest concurs a fost până la 31 Decemvrie 1932, până când s'au primit 26 de înscrieri, dintre cari: un candidat de clasa III, 6 candidaţi din clasa IV, 6 din clasa V, 7 din clasa VI, 5 din clasa VII şi un candidat din anul preparator al Şcoalei Politechnice.

Toţi aceşti candidaţi au fost admişi a se prezenta la concurs dând examen din materiile specificate de ei, după cum urmează:

CLASA III

1) *Virgil Dimitriu Şoimu* (lic. Sft. Andrei, Bucureşti), (materia Cl. III).

CLASA IV

1) *Bogdan Ioan* (lic. militar, Iaşi), (materia Cl. IV);
2) *Bucur N. Virgil* (lic. militar, Iaşi), (materia Cl. IV);

3) *Cosma Victor* (lic. militar, Iaşi), (Algebra şi Geometria plană Cl. IV);

4) *Enache D. Iordache* (lic. militar, Iaşi), materia Cl. IV);

5) *Ignat Dumitru* (lic. militar, Iaşi), (materia Cl. IV);

6) *Ştefănescu I. Gheorghe* (lic. militar, Iaşi), (materia Cl. IV).

CLASA V

1) *Ceauşescu F. Vasile* (lic. militar, Iaşi), (Algebra şi Geometria plană Cl. V);

2) *Gavrilescu N. Constantin* (lic. militar, Iaşi), (Algebra elementară şi Geometria în spaţiu Cl. V);

3) *Grigoriu Vasile* (lic. militar, Iaşi), (Algebra elementară şi Geometria în spaţiu Cl. V);

4) *Lebăda Dumitru* (lic. militar, Iaşi), (Algebra şi Geometria plană Cl. V);

5) *Soare N. Ioan* (lic. militar, Iaşi), (Algebra elementară şi Geometria în spaţiu);

6) *Vasilescu-Popescu Constantin* (lic. X, Bucureşti), (Algebra Cl. V).

CLASA VI

1) *Burcea Şt. Niţă* (lic. «Ion Maiorescu», Giurgiu), (Algebra Cl. V şi Trigonometria Cl. VI);

2) *Churiţa Mihail* (lic. militar, Craiova), (Algebra elementară şi Geometria elementară Cl. V);

3) *Mănescu A. Mircea* (lic. «Mihail Eminescu», Bucureşti), (Algebra Cl. V);

4) *Stănculescu Gheorghe* (lic. militar, Iaşi), (Algebra Superioară Cl. VI R., Trigonometria plană şi Mecanica);

5) *Stratulat Gheorghe* (lic. militar, Iaşi), (Algebra Superioară de Cl. VI R., Trigonometria plană şi Mecanica);

6) *Popa D. Traian* (lic. «Ion Maiorescu», Giurgiu); (Algebra Cl. V şi Trigonometria Cl. VI);

7) *Zaharescu Ilie* (lic. militar, Iaşi), (Algebra Superioară Cl. VI R., Trigonometria plană şi Mecanica).

CLASA VII

1) *Borcea Clement* (lic. militar, Iaşi), (Algebra, Trigonometria plană şi Mecanica Cl. VI R.);

2) *Chiriac I. Constantin* (lic. militar, Iaşi), (Algebra, Trigonometria şi Mecanica Cl. VI R.);

3) *Ghiocel V. Vasile* (lic. «Ion Maiorescu», Giurgiu), (Trigonometria Cl. VI şi Astronomia Cl. VII);

4) *Predoiescu I. Marin* (lic. «Fraţii Buzeşti», Craiova), (Algebra şi Trigonometria);

5) *Săcoşanu Gheorghe* (lic. militar, Iaşi), (Algebra, Trigonometria şi Mecanica Cl. VI R.).

ANUL PREPARATOR

1) *Marius Margulius* (Şcoala Politechnică „Regele Carol II", Bucureşti), (Geometria Analitică).

Examenul se va ţine în Bucureşti, la Facultatea de Ştiinţe în zilele de Vineri 21 şi Sâmbătă 22 Aprilie 1933 şi va consta dintr'o probă scrisă compusă din două părţi, relative respectiv la materiile indicate de candidaţi, şi dintr'un examen oral.

Proba scrisă se va da Vineri dimineaţa la ora $8^1/_2$, iar proba orală Vineri la ora 15 şi va continua Sâmbătă la aceleaşi ore.

Candidaţilor înscrişi la concurs cari nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor) li se vor trimete în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului lor la Bucureşti şi li se vor comunica locul unde vor fi găzduiţi în timpul concursului.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

REGULAMENTUL FONDULUI „GENERAL SC. PANAITESCU"

Art. 1. — Societatea «Gazeta Matematică» primind donaţiunea D-lui GENERAL SCARLAT PANAITESCU înfiinţează un fond denumit fondul «GENERAL SCARLAT PANAITESCU», din venitul căruia şi în conformitate cu dorinţa donatorului, să se acorde un premiu celei mai bune lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, publicate în cursul anului.

Art. 2. — Studiile în manuscris care se aduc la cunoştinţa Societăţii pe orice cale, se iau şi ele în consideraţie la acordarea premiului.

Art. 3. — Premiul poartă numele «Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare».

Art. 4. — Autorii publicaţiilor prezentate trebue să fie români, sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Art. 5. — Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an. In cazul când nu se găseşte nici o lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voeşte a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică şi chestiuni de matematică aplicată la ştiinţele militare.

Art. 6. — Prima adunare generală din fiecare an alege o comisiune compusă dintr'un delegat al Societăţii şi 2 membri, dintre care cel puţin un ofiţer.

Art. 7. — Comisiunea propune celei de a doua adunări generale spre premiare, lucrarea găsită cea mai meritoasă dintre cele publicate în cursul anului expirat, sau dintre manuscrise aduse la cunoştinţa Societăţii în acelaş timp.

Art. 8. — Raportul comisiei se publică în numărul «Gazetei Matematice» din Octomvrie.

NOTE MATEMATICE

25. *Asupra indicatorilor.* In *Bulletin of the American Mathematical Society,* din Octomvrie 1932, D-l D. H. LEHMER arată că indicatorul unui număr n divide pe $(n-1)$ dacă n este prim şi că nu s'ar mai putea găsi soluţiuni decât dacă n este compus numai din factori primi la puterea întâia în număr de cel puţin şapte. Se studiază şi cazul când indicatorul divide pe $(n+1)$ şi se găseşte ca soluţii numai $n=2$, şi $n=3=2^2-1$ cu numere prime, şi $n=3.5=15=2^4-1$, $n=3.5.17=255=2^{16}-1$, $n=3.5.17.257=65536=2^{16-1}$, $n=3.5.17.257.65537=2^{32}-1$, $n=3.5.17.353.929=83623935$, $n=3.5.17.353.929.83623937=6992962672132095$ cu numere compuse.

Dacă acest din urmă număr mărit cu 2 ar fi un număr prim, atunci $n=3.5.17.353.929.83623937.6992962672132097=4890152693383286437825847335321 5$ ar fi o soluţie. In tot cazul n trebue să fie un număr compus, format din factori primi la puterea întâia, în număr de cel puţin şapte ca să mai avem alte soluţii decât cele opt date mai sus.

I. I.

26. *Sur des formules relatives aux triangles.* Considérons le triangle ABC assujetti à rester inscrit dans le cercle fixe (O) de rayon R et circonscrit ou cercle fixe (I) de rayon r. Soient: Δ l'axe radicale des cercles (O) et (I); M, N, P les pieds des bissectrices extérieures des angles A, B, C et d la distance OI.

Le Colonel Gh. Buicliu établit, dans le problème 4153, que la somme

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

est constante.

Cette propriété, que nous avons obtenue autrement, resulte des formules classiques relatives aux triangles et peut se déduire facillement de la relation (5) que nous avons établie dans la note 6 page 51 du No. 2 de *Gazeta Matematica.*

Pour le triangle ABC assujetti aux conditions ennoncées plus haut on a encore les propriétés suivantes:

1°. *La droite* MNP *reste fixe.*

2°. *Les distances* ∂_0, ∂_i *des centres* O, I *à* MNP *s'expriment par*

$$\partial_0 = \frac{R(R+r)}{d} \quad ; \quad \partial_i = \frac{3Rr}{d} .$$

3°. *Les distances des points* M, N, P à Δ *sont égales entre elles et égales à*

$$\frac{r(4R+r)}{2d} .$$

On en déduit la perpendicularité des droites MNP et OI [1]).

4°. *Lorsque le triangle* ABC *se déplace, les points* M, N, P *décrivent une droite fixe perpendiculaire à* OI.

5°. *Les pieds des bissectrices interieures des angles du triangle* ABC, *décrivent une ellipse bitangente au cercle* (I) [2]).

La distance focale de cette ellipse et ses axes sont respectivement

$$\frac{2dr}{R} \quad ; \quad 2r \quad ; \quad 2r\sqrt{\frac{2r}{r}} .$$

6°. *La somme des rayons des cercles exinscrits au triangle est constante et egale à*

$$4R + r.$$

1) V. Thébault. *Bulletin de Mathématiques élémentaires,* 1909 — 236.
2) V. Thébault. *Mathésis,* 1915 — 192 et 1922 — 296.

7°. *On a aussi les expressions constantes suivantes*

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R + r}{R}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 2R - r$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$$

$$a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(R + r).$$

V. THÉBAULT.

27. *Asupra exercițiului 24, Anul XXXVII.* In acest exercițiu se afirmă că ecuația:

$$x^3 + px^2 + qx + 3 = 0,$$

are rădăcinile reale și pozitive dacă $pq \leqslant 9r$. Aceasta nu este adevărat căci, de exemplu, ecuația:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

are rădăcina triplă negativă $x = -1$, deși $pq = 9r = 9$. Apoi ecuația:

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 4 = 0,$$

are două rădăcini imaginare și o rădăcină negativă $x = -0{,}51...$

I. B. F.

28. *Asupra problemei 4149.* Intrebuințând aceleași metode ca cele date în rezolvarea acestei probleme (G. M. XXXVII, pag. 476), se obține următoarea proprietate generalizată:

Modulul sumei a n *numere, al căror modul e mai mare decât* $\sqrt[n-1]{n}$, *este inferior modulului produsului.*

Fie x_1, x_2, . . . numerele considerate. Avem

$$\frac{1}{|x_1|} < \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

şi deci $\frac{1}{|\, x_1 \ldots x_{n-1} \,|} < \frac{1}{n}$. Atunci funcţia simetrică cu n termeni:

$$\left| \sum \frac{1}{x_1 \ldots x_{n-1}} \right| < 1 \quad \therefore \quad \frac{|\, \Sigma x_1 \,|}{|\, x_1 \ldots x_n \,|} < 1$$

$$|\, x_1 + x_2 + \ldots + x_n \,| < |\, x_1 \ldots x_n \,|\,.$$

c. c. t. d.

A doua metodă de rezolvare se generalizează astfel:

$$|\, x_i \,| = \sqrt[n-1]{n} + \alpha_i$$

unde câtimile α_i sunt toate pozitive. Ca atare:

$$S = |\, \Sigma x_i \,| < \Sigma \,|\, x_i \,| = n \sqrt[n-1]{n} + \Sigma \alpha_i$$

$$P = |\, x_1 \ldots x_n \,| = n \sqrt[n-1]{n} + n \,\Sigma\, \alpha_i + \sqrt[n-1]{n^{n-2}}\, \Sigma\, \alpha_i\, \alpha_j + \ldots$$

Cum câtimile α sunt toate pozitive, rezultă în mod evident că $P > S$, c. c. e. d. d.

Har. P. Ionescu-Biss.

29. *O nouă generalizare a problemei 4110.* Generalizarea dată la pag. 92. Vol XXXVIII se extinde şi în spaţiu. Fie suprafaţa:

$$f(x,y,z,t) = Ax^2 + 2Bxy + \ldots + 24xt + 2Myt + 2Nzt + Pt^2 = 0$$

şi

$$Q \equiv xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0} = 0$$

planul polar al unui punct $R(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Dacă S este proecţia lui R şi 0′ proecţia originei pe planul Q atunci avem:

$$\overline{RS} = \frac{|\, Q_R \,|}{\pm \sqrt{(f'_{x_0})^2 + (f'_{y_0})^2 + (f'_{z_0})^2}}$$

$$\overline{00'} = \frac{|\, Q_0 \,|}{\pm \sqrt{(f'_{x_0})^2 + (f'_{y_0})^2 + (f'_{z_0})^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{RS}}{\overline{00'}} = \frac{|\, Q_R \,|}{|\, Q_0 \,|}$$

sau

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{OO'}} = \frac{f(x_0, y_0, z_0)}{f'_{t_0}} = C^t .$$

H. P. Ionescu-Biss.

30. *Asupra conicelor înscrise unui triunghiu.* In articolul cu acelaş titlu, publicat în *Gazeta Matematică* Vol. XXXIII, pag. 323, D-l V. Thébault a studiat şi cazul particular când centrul O al cercului circumscris triunghiului se află pe axa focală FF' a conicei înscrise aceluiaş triunghiu. Să consider cazul când O se află pe axa perpendiculară lui FF'. In acest caz

$$\overline{OF} = \overline{OF'}$$

iar relaţiunea

$$\overline{OF} \cdot \overline{OF'} = 2R \cdot O_9\omega$$

de la pag. 323 Vol. XXXIII devine

$$(1) \qquad \overline{OF}^2 = 2R \cdot O_9\omega.$$

Pe de altă parte teorema lui Laguerre (pag. 324, vol. XXXIII) dă

$$(2) \qquad (R^2 - \overline{OF}^2)^2 = 4b^2 R^2$$

Eliminând pe OF între (1) şi (2) găsesc

$$\overline{O_9\omega} = \tfrac{1}{2}R \pm b$$

care este analoagă cu ultima formulă dela pagina 324 Vol. XXXIII aşa că teorema stabilită de D-l V. Thébault la acea pagină se enunţă mai general în felul următor:

Când una din axele unei conice înscrise într'un triunghiu trece prin centrul cercului circumscris acelui triunghiu, atunci cercul principal corespunzător acelei axe este tangent cercului celor 9 puncte al triunghiului.

Un exemplu este elipsa lui Brocard, focarele ei sunt punctele lui Brocard, iar axa nefocală este OK.

Notaţiile din această notă sunt aceleaşi de care s'a servit D-l V. Thébault în articolul d-sale.

I. C. Vasiliu.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ «REGELE CAROL II», BUCUREŞTI

Examenul de Admitere în Ciclul I

Lucrările scrise

15 Septemvrie — 23 Septemvrie 1932

I. ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

1°. Să se determine natura seriei al cărei termen general este:

$$U_n = \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}$$

a fiind un număr pozitiv.

2°. Să se studieze variaţia funcţiunei:

$$y = L(1+\cos x) + 2\cos^2 x - 4\cos x + 1$$

când x variază în intervalul $(0,2\pi)$ şi să se reprezinte grafic această variaţie.

Valorile maxime sau minime ale funcţiunii se vor calcula cu două zecimale exacte.

3°. Să se determine λ astfel ca ecuaţiile:

$$4x^3 + \lambda x + 2 = 0 \quad ; \quad 2x^2 + \lambda x + 1 = 0$$

să aibă cel puţin o rădăcină comună; şi în acest caz să se rezolve prima ecuaţie.

(Timp acordat: 4 ore; toate chestiunile obligatorii).

II. GEOMETRIA ANALITICĂ

1°. Se consideră în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy, punctul $A(0,1)$ şi se cere:

a) Să se determine pe axa pozitivă Ox, un punct B astfel ca lungimea segmentului AB să fie egală cu 2.

b) Să se afle coordonatele vârfurilor exagonului regulat construit pe AB ca latură şi situat în cadranul pozitiv al axelor de coordonate.

c) Să se scrie ecuaţiile diagonalelor acestui exagon şi să se afle coordonatele centrului lui.

2°. Se consideră un cerc de centru $C(\alpha, \beta)$ tangent la axa Ox; fie M şi N punctele în care cercul întâlneşte bisectriţa unghiului pozitiv al axelor Ox, Oy, iar P punctul de întâlnire al tangentelor duse la cerc în punctele M şi N.

Se cere:

a) Să se arate că dacă centrul $C(\alpha, \beta)$ descrie dreapta $y - x = 1$, locul geometric al punctului P este o conică.

Să se determine natura şi poziţia acestei conice; să se deseneze conica.

b) In ipoteza că centrul C (α, β) descrie dreapta $y + x = 0$, să se afle locul punctului P.

Să se explice rezultatul geometriceşte.

3°. In raport cu trei axe rectangulare $Oxyz$, se defineşte o dreaptă (D) prin ecuaţiile:

$$(D) \qquad x = mz \quad , \quad y = nz \qquad (m, n > 0)$$

şi se cere:

a) Să se determine pe dreapta (D), în diedrul pozitiv al axelor, un punct A astfel ca distanţa $\overline{OA}$ să fie egală cu l.

b) Să se scrie ecuaţia planului P care trece prin A şi este perpendicular pe dreapta (D).

c) Să se determine lungimea l astfel ca volumul determinat de planul (P) şi planele coordonate, să aibe valoarea $\frac{1}{6} K^3$.

4°. Să se determine natura suprafeţei:

$$x^2 + y^2 + \lambda z^2 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$$

λ fiind un parametru variabil între $-\infty$ şi $+\infty$.

Se va examina în particular cazurile:

$$\lambda = 0 \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad \lambda = 3.$$

(Toate chestiunile obligatorii — Timpul acordat: 4 ore).

III. GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

Intersecţie de con cu sferă.

Cadru: 270×450 mm.

Linia de pământ paralelă cu latura mică a cadrului şi aşezată la 270mm. depărtare de linia superioară a cadrului.

Se dă:

1. O sferă de rază R = 50 mm., având centrul C:

C (110, 90, 50).

Cifrele din paranteză au următoarele semnificaţiuni:

Prima reprezintă distanţa dela marginea din stânga a cadrului, măsurată pe linia de pământ OX; a doua cifră reprezintă depărtarea dela planul vertical; a treia cifră reprezintă înălţimea deasupra planului orizontal (cota).

2. Un plan P'αP ce trece prin punctul cel mai de sus al sferei şi este definit astfel încât:

Urma verticală αP' face cu linia de pământ OX unghiul 45°.

Urma orizontală αP face cu linia de pământ OX unghiul 60°.

3. Un con având vârful în V:

V (220, 90, 213)

şi ca directoare, cercul de intersecţie al planului P'αP cu sfera dată.

Se cere :

1. A doua curbă de eşire a conului din sferă, care se va trasa cu roşu plin.

2. Distanţa reală a punctelor celor mai depărtate de pe acea curbă.

Nota :

Se va trasa în tuş sau în cerneală:

1. Cercul de intersecţie al planului P'αP cu sfera dată.

2. Construcţia unui punct şi a tangentei respective, de pe curba cerută şi

3. Elementele esenţiale ale curbei de intersecţiune.

(Timpul acordat: 4 ore).

IV. MECANICA

1°. Se dă, într'un plan vertical, două bare grele, omogene, AB şi CB, de lungimi k şi l, greutate pe unitate de lungime p. Barele sunt articulate în punctele fixe A şi C, situate pe aceeaşi orizontală, iar între ele în B, ele fac cu orizontala AC respectiv unghiurile a şi b. Se cer reacţiunile din A, B şi C. Caz particular $k = l$.

2°. O bară de greutate neglijabilă este simplu rezemată în A şi B, reazemele sunt pe aceiaşi orizontală, distanţa între ele este l; reazemul A e cu frecare, coeficient de frecare f, pe reazemul B frecarea e neglijabilă.

Pe bară se reazemă cu frecare, coeficient de frecare f', o placă dreptunghiulară CDEF de dimensii: $CD = a$, $DE = i$; greutatea plăcii este P şi trece prin mijlocul lui AB. In afară de greutatea ei placa mai este supusă la o forţă Q aplicată în E şi făcând cu direcţia AB unghiul u. Se cere condiţiunile de echilibru ale sistemului.

Caz particular : $u = 0$.

3°. Să se găsească centrul de greutate al suprafeţei unei învelitori cu 4 scurgeri; două din planele de scurgere sunt trapeze isoscele egale (ABEF şi CDFE), iar celelalte două sunt triunghiuri isoscele egale (ADF şi BCE), toate planurile de scurgere sunt înclinate la 45° pe planul orizontal ABCD. ABCD e un dreptunghiu de dimensiuni $AB = a$, $BC = b$. Caz particular $a = 2b$.

V. FIZICA

1°. Acromatism (Prisma şi lentile).

2°. Metoda amestecurilor (Principii-aparate-corecţiuni).

3°. Fenomene capilare produse de lame.

4°. Două baloane A şi B comunică printr'un tub T.

In ambele baloane se găseşte aer sec la zero grade şi la presiunea atmosferică. In tub se găseşte o picătură de mercur în dreptul unei diviziuni oarecare.

Balonul A rămânând la zero şi balonului B ridicându-i-se temperatura la t^0, să se calculeze :

a) Numărul de diviziuni n de care se deplasează picătura de mercur.

b) Eroarea relativă asupra lui n.

Se va considera la zero, $V_A = V_B$; $t^0 = 5^0$ cu o preciziune de $\frac{1}{100}$; $\alpha = 0{,}00367$ cu o preciziune de o unitate a ultimei cifre; o diviziune a tubului valorează a 10.000-a parte din V_A.

Se vor neglija dilataţiunea aerului din tub precum şi dilataţiunea baloanelor.

(Toate chestiunile obligatorii — Timpul acordat: 4 ore)

VI. CHIMIA

1°. Compuşii oxigenaţi ai Carbonului.
2°. Aluminiul.
3°. Esterii.

(Toate chestiunile obligatorii — Timpul acordat: 4 ore.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVIII. No. 11. Novembrie 1932. New-York. Adunarea de vară din Los Angelos, de M. H. Ingraham. Congresul internaţional al matematicienilor dela Zürich din 1932, de R. C. D. Richardson. Tomas Hakon Gronwall, in memoriam, de E. Hille Volumul al 2-lea din Istoria lui Loria, de R. B. McClenon. Rezumatul lucrărilor.

Mathesis. Anul XLVI. No. 10. Decemvrie 1932. Gembloux. Asupra desfăşuratelor curbelor în spaţiu, de R. Deaux. Asupra a două cazuri particulare ale problemei lui Apollonius, de R. Goormaghtigh. Asupra dreptelor lui Simpson şi ortopolul, de Ad. M. Exerciţii de geometrie infinitezimală, de D-ra Bethe Umé.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIV. Fascicolele V-VI. Noemvrie-Decemvrie 1932 Buenos Aires.

Boletin Matematico Elemental. Anul III. No. 9. Noemvrie 1932. Buenos Aires. Practica neegalităţilor, de B. I. Baidaff.

Idem. No. 10. Decemvrie 1932. Asupra proprietăţilor celui mai mic comun multiplu, M. O. Gonzales.

Journal des Mathematiques Elementaires, publié par H. Vuibert. Anul 57. No. 7. Ianuarie 1933. Paris.

Idem. No. 8. Ianuarie 1933.

Revista matematică a elevilor Craioveni. Anul I. No. 4-5. Craiova 1933. Cercul celor 9 puncte, de I. M. Predoiescu.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XII. No. 11. Ianuarie 1933. Timişoara. Asupra dreptei lui SIMPSON, de AL. NICULESCU.

N. BOTEA. *Asupra unor ecuaţii cu derivate parţiale.* (Extras din Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences din Paris). Paris 1932.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 224 din Anul XXXVIII pag. 145.

Noţiuni de coordonate baricentrice sunt date în *«Formule pentru Geometria Triunghiului»* de N. ABRAMESCU. (Extras din *Gazeta Matematică.* Anul 1907), care se pot procura dela Autor. De asemenea se mai tratează astfel de chestiuni în *«Lecţiuni de Geometria Analitică»* de N. ABRAMESCU, care se pot procura dela Administraţia Universităţii din Cluj.

N. A.

Răspuns la Cererea No. 2 din Anul XXI pag. 24.

GH. CONSTANDA (nu GRIGORE) s'a născut în Millies din Tesalonic. El a succedat lui NEOFIT CAVSOCALIVITUL ca profesor şi director al Academiei Domneşti din Bucureşti, mort la 1780. In 1790 COSTANDA se duce în Europa pentru a-şi lua Doctoratul în matematici la Halle, şi i se pierde urma. (C. ERBICEANU. In Memoriile Secţiunii istorice a Academiei române. Tomul XXVII. pag. 86).

P. SERGESCU.

ERATĂ. In Anul XXXV la Tabla de materii la No. 192 *nu s'a răspuns* la pag. 423 cum e indicat în Tabla de materii.

In Anul XXXVII la pag. 23 în loc de *«Cererea 209»* trebue pus *«Răspuns la Cererea 202»* iar la pag. 318 în loc de *«Cererea 218»* trebue pus *«Răspuns la Cererea 195».*

P. SERGESCU.

DIVERSE

Societatea română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 16 Ianuarie când D-l N. TEODORESCU a făcut o comunicare despre un caz singular în problema lui CAUCHY.

In seara zilei de 23 Ianuarie D-l N. CIORĂNESCU a făcut o comunicare generalizând polinomul lui LEGENDRE. In aceeaşi şedinţă s'a ales biuroul pentru anul 1933. A fost ales preşedinte D-l V. VÂLCOVICI şi Vicepreşedinte D-l D. BARBILIAN.

Lui P. S. LAPLACE i s'a ridicat o statuie în oraşul său natal Beaumonten-Auge.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4042. *Să se afle numerele mai mici decât 1000 cari se scriu în baza 13 cu aceleaşi cifre ca şi în baza 10.*

N. C.

Soluţie dată de D-l N. N. ALDEA:

Să căutăm numerile de 2 şi 3 cifre, soluţii ale problemei.

De 2 cifre. Vom avea:

$$10a + b = 13b + a$$

$$\therefore \quad 3a - 4b = 0$$

$$a = \tfrac{4}{3}\, b.$$

Soluţiile sunt:

$$a = 4 \; ; \; b = 3$$

$$a = 8 \quad b = 6$$

deci numerele 43 şi 86 (în baza 10).

De 3 cifre. Un număr de 3 cifre scriindu-se în baza 10, *abc*, în baza 13 se va putea scrie sub următoarele forme:

$$acb, \; cab, \; cba, \; bca, \; bac.$$

Vom lua fiecare caz în parte.

1) $\qquad 10^2a + 10b + c = 13^2a + 13c + b$

$$\therefore \quad 23a - 3b + 4c = 0 \quad \therefore \quad a = \frac{3b - 4c}{23}\,; \text{ deci } b \geqslant 8.$$

Avem o soluţie:

$$a = 1 \; , \; b = 9 \; , \; c = 1$$

deci numărul 191.

2) $\qquad 10^2a + 10\,b + c = 13^2c + 13a + b$

$$\therefore \quad 29a + 3b - 56c = 0 \quad \therefore \quad 5 = \frac{56c - 29a}{3} \text{ deci } c \leqslant 5.$$

Soluţiile sunt:

$$a = 1 \; , \; b = 9 \; , \; c = 1$$

$$a = 7 \; , \; b = 7 \; , \; c = 4$$

deci numerele 191 şi 774.

3) $10^2a + 10b + c = 13^2c + 13b + a$

$\therefore \quad 33a - b - 56c = 0 \qquad a = \dfrac{56c + b}{33}; \quad c \leqslant 5.$

Soluţiile sunt :

$$a = 7 \, , \, b = 7 \, , \, c = 4$$

deci numărul 774.

4) $10^2a + 10b + c = 13^2b + 13c + a$

$\therefore \quad 33a - 53b - 4c = 0 \qquad a = \dfrac{53b + 4c}{33}; \quad b \leqslant 5.$

avem soluţia :

$$a = 9 \, , \, b = 5 \, , \, c = 8,$$

deci numărul 958.

5) $10^2a + 10b + c = 13^2b + 13a + c$

$\therefore \quad 29a - 53b = 0 \qquad a = \dfrac{53}{29} b$ imposibilitate.

Deci în total avem 5 soluţii dinstincte :

43, 86, 191, 774 şi 958 (în baza 10).

Soluţie bună şi dela D-nul Aur. Em. Bădescu. Mai complicată, dela D-nul Nic. D. Zane; D-nul Victor I. Ionescu pierde ultima soluţie, iar D-nul N. N. Mihăileanu alcătueşte un tablou pe 2 pagini, de numere scrise în cele două sisteme, totuş găseşte şi soluţia 129 care se scrie în baza 13, 9 (12), uitând că (12) este o cifră nouă în baza 13, ce n'are corespondent în baza 10. Pierde în schimb soluţia 191.

N. C.

PROBLEMA 4064. *Se dau două puncte* A *şi* B *şi o dreaptă* Δ. *Să se găsească drumul cel mai scurt dela* A *la* B *cu obligaţia de a merge pe dreapta* Δ *o anumită lungime dată* l.

(Se cere şi o construcţie geometrică pentru acest drum minim).

N. C.

Soluție dată de D-l Gh. Șt. Roșca (Craiova).

Fie ACDB ($CD = l$) drumul pentru care trebue să găsim poziția în care are valoarea minimă. Vom deosebi două cazuri:

1°. A și B sunt de o parte și de alta a dreptei Δ.

Drumul ACDB este compus din dreptele AC, CD și DB. Deoarece $CD = l$ este constant urmează să determinăm poziția în care $AC + DB$ este minim. Transportând punctul A paralel cu Δ în sensul spre B în A_1, așa ca $AA_1 = l$ vom avea $AC = A_1D$. Așa dar minimul sumei $AC + DB$ echivalează cu minimul sumei $A_1D + DB$. Dar minimul ultimei sume îl constitue dreapta A_1B. Deci drumul minim ACDB se va compune din segmentul AC paralel cu A_1D, din segmentul $CD = l$ și din segmentul DB determinat chiar de A_1B.

Construcția drumului minim constă așa dar în determinarea punctului A_1 prin transportarea punctului A paralel cu Δ pe o distanță $AA_1 = l$, trasarea dreptei A_1B și construirea paralelei din A la A_1B. Drumul ACDB astfel construit va fi drumul minim.

2°, Dacă A și B sunt de aceeași parte a dreptei Δ, se determină întâiu simetricul B_0 al punctului B, se construește drumul minim AB_0 ca mai sus și în urmă se construește simetricul DB al segmentului DB_0 față de dreapta Δ.

Soluții bune analoage dela D-rele: Mariana Abramescu și Margareta Léber (studente Cluj); D-nii: Ulpiu M. Florescu și Al. D. Stoica (elev Lic. Voevodul Mihai).

O soluție algebrică dela D-nii George Șt. Roșca și Marius Margulius care observa că o problemă analoagă se găsește enunțată în „Exercices de Géomètrie" de F. G. M. exercițiul No. 1053. D-l „N. M." observă că problema este rezolvată în „Culegere de probleme de Geometrie" de G. Țițeica (1929) prob. 25, cap. II, pag. 9 și 118.

Problema 4064 a fost propusă ca o introducere la problema 4085 la care n'am primit nici o soluție până acum.

N. C.

PROBLEMA 4092. *Dintre toate numerile de patru cifre de una din formele:*

$$2n(n+1)(4n-1)\ ;\ n(n+5)(3n+2)\ ;\ 4n(n-2)$$

numai numărul 1932 verifică egalitățile:

$$2(10a+b) = (10c+d) + c \times d$$

$$b = c(a+d)$$

unde a, b, c *și* d *sunt cifrele numerilor de forma indicată.*

Căpitan Gh. Niculescu.

Soluție. Observăm că două din formele date conduc la numere pare. A treia: $n\,(n + 5)\,(3n + 2)$ conduce și ea tot la numere pare căci dacă n este impar atunci $n + 5$ este par. Toate numerile noastre de patru cifre vor fi deci pare și ca atare cifra d va fi cu soț. Să presupunem $d = 0$. Introducând această valoare în egalitatea:

$$2\,(10a + b) = (10c + d) + c \times d \qquad (1)$$

obținem:

$$2\,(10a + b) = 10c$$

ceeace atrage:

$$b = 0.$$

Dar în această condiție egalitatea:

$$b = c\,(a + d) \qquad (2)$$

cere neapărat să avem: $c = 0$ căci numărul fiind de patru cifre **a** nu poate să fie zero. Să introducem valoarea $c = 0$ în (1). Obținem:

$$2\,(10a + b) = d$$

egalitate care nu poate să aibă loc căci **d** este număr de o cifră. Rezultă că avem neapărat $d \geqslant 2$ și atunci: $a + d \geqslant 3$. Să introducem în (1) valoarea: $c = 1$. Obținem:

$$2\,(10a + b) = 10 + 2d$$

egalitate ce nu poate să existe căci **d** fiind par nu ar putea lua decât valorile 6 și 8 pentru a da în membrul al doilea un număr de două cifre ca și în membrul întâi. Dar în acest caz, ținând seamă de (2) trebuie ca: $b > d$ totdeauna și atunci chiar pentru $a = 1$ membrul întâi devine mult mai mare ca al doilea. Tragem concluzia că trebuie neapărat să avem $c > 1$. Această ultimă inegalitate cât și $a + d \geqslant 3$ aplicate egalității (2) cer neapărat:

$$b \geqslant 6$$

și cum b este de o cifră vom avea în cele din urmă:

$$9 \geqslant b \geqslant 6$$

atrăgând pentru c singurile valori posibile:

$$c = 2\ ;\ c = 3.$$

Observăm însă că b nu poate lua valoarea 7 din cauză că ambii factori: c şi $(a + d)$ ai membrului II-lea din egalitatea (2) sunt superiori unităţii. Rămân de considerat numai cazurile:

$$b = 6 \; ; \; b = 8 \; b = 9$$

cari se studiază în tabelul de mai jos:

b	c	$(a+d) \geqslant 3$	$a > 0$	$d > 2$	$b = c(a+d)$	*Soluţie*
6	2	3	1	2	$6 = 2(1+2)$	1622
8	2	4	2	2	$8 = 2(2+2)$	2822
9	3	3	1	2	$9 = 3(1+3)$	1932

Dintre aceste trei numere, ce verifică egalitatea (2) numai numărul 1932 verifică şi egalitatea (1) căci avem:

$$2 \times 19 = 32 + 3 \times 2$$

şi dacă vom arăta că acest număr se poate pune sub una din formele date — atunci problema este complet rezolvată.

Pentru aceasta descompunem pe 1932 în factori primi.

Avem:

$$1932 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 23$$

care se mai poate scrie:

$$1932 = 2 \times 6 \, (6 + 1) \, (4 \times 6 - 1)$$

$$1932 = 7 \, (7 + 5) \, (3 \times 7 + 2)$$

$$1932 = 4 \times 23 \, (23 - 2)$$

şi dacă înlocuim în prima egalitate pe **6** cu x ; în a doua: $x = 7$ iar în a treia $x = 23$, dăm tocmai peste formele din enunţ.

In urma celor arătate până aci este evident că nici un alt număr de patru cifre numai îndeplineşte toate condiţiunile problemei în afară de 1932.

A rezolvat problema D-l Mircea Leonte A. Negrea (stud. mat. Buc.), prin încercări, formând numerile şi verificând apoi cu cifrele numerilor formate egalităţile (1) şi (2).

Gh. N.

PROBLEMA 4099. *Să se rezolve în numere întregi şi pozitive, ecuaţia :*

$$\frac{x!\,(x+y+1)!}{x(x-1)\ldots 1+(x+1)\ldots 3\cdot 2+\ldots+(x+y)\ldots(y+1)}=720.$$

C. POPOVICI.

Soluţie dată de D-nii: GEORGE ŞT. ROŞCA (Craiova) şi M. MARGULIUS (Lic. Spiru Haret, Buc.) :

Vom scrie ecuaţia sub forma :

$$\frac{(x+y+1)!}{\frac{x!}{x!}+\frac{(x+1)x\ldots 3\cdot 2}{x!}+\ldots+\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(y+1)}{x!}}=720$$

sau :

$$\frac{(x+y+1)!}{C_x^x+C_{x+1}^x+C_{x+2}^x+\ldots+C_{x+y}^x}=720.$$

Ţinând seamă de relaţia cunoscută :

$$C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-2}^{p-1}+C_{n-3}^{p-1}+\ldots+C_p^{p-1}+C_{p-1}^{p-1}$$

ecuaţia propusă devine :

$$\frac{(x+y+1)!}{C_{x+y+1}^{x+1}}=720$$

şi efectuând obţinem :

$$\frac{(x+y+1)!}{\frac{(x+y+1)!}{(x+1)!\,y!}}=720.$$

Prin simplificare rămâne de rezolvat ecuaţia :

$$(x+1)!\,y!=720.$$

Descompunem acum numărul 720 în factori primi căutând a-i aranja sub forma de produs de două factoriale. Aceasta se poate face în următoarele două moduri :

$$720=6!\,1!=(x+1)!\,y!$$

$$720=3!\,5!=(x+1)!\,y!$$

Identificând factorialele obţinem următoarele patru sisteme de soluţiuni:

$$x = 5 \ , \ y = 1$$
$$x = 0 \ , \ y = 6$$
$$x = 2 \ , \ y = 5$$
$$x = 4 \ , \ y = 3.$$

Dacă socotim şi **0** ca soluţie întreagă şi pozitivă şi ţinem seama de convenţia: $0! = 1$, atunci scriind:

$$720 = 6!\ 0!$$

deducem al cincilea sistem de soluţii:

$$y = 0 \ , \ x = 5.$$

Observaţiuni.

1°. D-l P. M. Varlam a rezolvat în acelaşi mod problema, dar a dat numai două sisteme de rădăcini.

2°. D-l Sub.-Lt. Ion C. Savin a simplificat mult rezolvarea ecuaţiei observând că:

$$1.2.3 \ldots x + 2.3.4 \ldots (x+1) + \ldots + (x+1)(x+2) \ldots x+y) = \frac{(y+1)\ldots(y+x+1)}{x+1}$$

identitate arătată în „Calcul Algebric" de Traian Lalescu (pag. 12), dar nu a studiat complet rezultatul final, pentru a da toate rădăcinile.

Cpt. Gh. N.

---

*PROBLEMA 4124. *Tangenta la un cerc* O *în punctul* M, *mobil pe cerc, întâlneşte un diametru fix al cercului în* E. *Se cere să se găsească locul geometric al intersecţiei lui* OM *cu perpendiculara în* E *pe* OE.

N. Donciu.

Să raportăm figura la doi diametri ai cercului perpendiculari între ei, dintre care unul OE ca axă OX, iar cellalt ca axă OY. Fie P. punctul de întâlnire al razei OM cu perpendiculara EP pe OE. Să însemnăm cu α unghiul MOE care determină poziţiunea punctului M pe cercul O şi cu R raza cercului O. Din triunghiul OME, dreptunghiu, avem: $\overline{OM} = \overline{OE}\cos\alpha$, dar $\overline{OE} = x$, abscisa punctului P, deci

$$x = \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \qquad (1)$$

Asemenea, din triunghiul dreptunghiu OEP avem:

$$\overline{EP} = \overline{OE}\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{R\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

dar $\overline{EP} = y$, ordonata punctului P, deci

$$y = \frac{R\sin\alpha}{\cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

Aşadar, ecuaţiunile parametrice (în funcţiune de unghiul polar al lui P faţă cu axa polară OX şi polul O) ale locului lui P sunt:

$$(P)\begin{cases} x = \dfrac{R}{\cos\alpha} \\ y = \dfrac{R\sin\alpha}{\cos^2\alpha}. \end{cases}$$

Pentru a avea ecuaţiunea carteziană a acestui loc, este suficient a elimina pe α între ecuaţiunile (P).

Vom ţine socoteala pentru acest scop de relaţiunea

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (3)$$

şi vom observa că avem:

$$\cos\alpha = \frac{R}{x} \text{ şi } \sin\alpha = \frac{Ry}{x^2}, \qquad (4)$$

pe care introducându-le în (3) obţinem, eliminând numitorii, ecuaţiunea locului (P) sub forma:

$$x^4 - R^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (P)_1$$

Această curbă de gradul al patrulea are un punct dublu izolat în origine, care nu aparţine locului real al punctului P. Ea este simetrică în raport cu cele două axe de coordonate şi deci are origina centru de simetrie. Rezolvind ecuaţiunea în raport cu y, sau scriind sub forma:

$$x^2(x^2 - R^2) \neq R^2 y^2 = 0$$

se vede că nu avem puncte de ale locului pentru $x^2 - R^2 < 0$, adică curba există numai în intervalele $(-\infty, -R)$; $(+R, +\infty)$, adică în regiunea planului cuprinsă între dreptele $x = -R$ şi $x = +R$ nu sunt puncte ale locului (P). Pentru a construi deci curba (P) este de ajuns a studia o ramură, de exemplu:

$$y = +\frac{x}{R}\sqrt{x^2 - R^2} \text{ pentru } x \geqq +R.$$

Calculând prima şi a doua derivată ale lui y în raport cu x, obţinem :

$$y' = \frac{2x^2 - R^2}{+R\sqrt{x^2 - R^2}} \tag{5}$$

şi

$$y'' = \frac{x(2x^2 - 3R^2)}{R\sqrt{(x^2 - R^2)^3}}. \tag{6}$$

Din (5) se vede că $y' > 0$ în tot intervalul dela $+R$ la $+\infty$, deci x crescând dela $+R$ la $+\infty$, *y creşte continuu dela 0 la* $+\infty$. In punctul $(R, 0)$ curba are aceeaşi tangentă cu cercul 0, deci curba (P) este tangentă cercului O în punctele depe axa OX. Din (6) se vede că în intervalul considerat $(+R, +\infty)$ şi pentru ramura considerată y'' se anulează pentru $x = \frac{R\sqrt{6}}{2}$, având $y'' < 0$ pentru $R < x < R\sqrt{\frac{3}{2}}$ şi $y'' > 0$ pentru $x > \frac{R\sqrt{6}}{2}$. Se vede din acestea că ramura considerată are concavitatea întoarsă către y-cii negativi în intervalul $(R, R\sqrt{\frac{3}{2}})$ şi întoarsă către y-cii pozitivi pentru $x > R\sqrt{\frac{3}{2}}$, având prin urmare un punct de inflexiune în punctul $x = R\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Observând că ramura are un punct pe dreapta $y = +R$ pentru $x = R \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, deducem că punctul de inflexiune se află sub dreapta $y = +R$. (Din ecuaţiunea curbei se vede că avem o singură direcţiune asimptotică $x = 0$, însă asimptotele paralele cu această direcţiune sunt aruncate la infinit, aşa că ramurile curbei sunt ramuri paralelice). Pentru a preciza mai bine trasarea ramurei, determinăm punctele :

$$(R\sqrt{2},\ R\sqrt{2})\ ;\quad (+2R,\ +2R\sqrt{3})\ ;\quad (3R,\ 6R\sqrt{2}),\ \text{etc.}\ ;$$

apoi luând simetricile acestei ramuri în raport cu axele OX, OY şi în raport cu origina, avem construită curba (3) în întregime.

Au găsit ecuaţiunea locului următorii corespondenţi : Iancu N. Sager, N. N. Mihăileanu, Ştefan Teodorescu, Acikgheozian A. Nubar, Ştefan Olteanu, Marius Margulius, Cezar Coşniţă (Bârlad), V. I. C. Vissarion, Mihail C. Preda, Cezar Ivănescu, Ulpiu Florescu, Mircea Mănescu, Har. P. Ionescu-Biss.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4152. *Se dau numerele* abcde, bcdea, cdeab, deabc, eabcd, *formate prin permutare circulară a cifrelor* a, b, c, d, e. *In ce caz unul din ele este media aritmetică a celorlalte patru ?*

I. Ionescu.

Cele cinci numere din problemă fiind obținute din primul prin permutare circulară a cifrelor, putem porni dela oricare din ele pentru a le afla pe celelalte.

Va fi dar de ajuns să considerăm cazul când primul este media aritmetică a celorlalte. Pentru aceasta ar trebui să avem :

$$4(10000a+1000b+100c+10d+e) = 10000b+1000c+100d+10e+a+$$
$$10000c+1000d+100e+10a+b+$$
$$10000d+1000e+100a+10b+c+$$
$$10000e+1000a+100b+10c+d.$$

Dacă punem $s = a + b + c + d + e$, relația precedentă devine :

$$4(10000a+1000b+100c+10d+e) = 10000(s-a) +$$
$$+ 1000(s-b)+100(s-c)+10(s-d) + (s-e).$$

$$\therefore \quad 5(10000a + 1000b + 100c + 10d + e) = 11111 \cdot s.$$

Se vede imediat că trebuie să luăm $s = 5n$ și relația devine:

$$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 11111n.$$

Insă a, b, c, d, e fiind de o cifră, suma lor s e cel mult $5 \times 9 = 45$; deci $n = s/5$ este cel mult 9, adică de o cifră. Egalitatea precedentă ne arată că în acest caz $a = b = c = d = e = n$. Soluțiile problemei sunt deci numai numerele de 5 cifre identice : 11111, 22222, . . . , 999999.

După cum se vede soluția este numai formală, toate numerele cerute fiind identice.

Ulpiu M. Florescu
(Elev-Inginer)

O soluție a acestei probleme a fost dată și de D-nii : M. Margulius și Al. D. Stoica.

PROBLEMA 4153. *Să se demonstreze că dacă* a, b, c *sunt laturile unuia din triunghiurile înscrise într'un cerc dat şi circumscrise unui cerc dat, atunci suma :*

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

este constantă.

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii : M. MARGULIUS (Lc. Spiru Haret, Bucureşti) ; I. I. PETRESCU şi E. MEREUŢĂ.

Dacă R şi r sunt razele celor 2 cercuri, din relaţiile clasice

(1) $$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$$

(2) $$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$$

se deduce imediat :

(3) $$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = -4r(r + 4R) = const.$$

1°. Relaţiile (1) şi (2) se găsesc demonstrate în mai toate culegerile de relaţiuni între elementele unui triunghiu. Citez de exemplu *«Relations entre les éléments d'un triangle»*, H. VUIBERT.

2°. Din (1) şi (2) se deduce că *pentru toate triunghiurile de acelaşi perimetru suma*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

este constantă.

3°. Din (3) se deduce că *dacă* R *şi* r *sunt constante*

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca.$$

4°. Triunghiurile înscrise în un cerc (O) şi circumscrise unui cerc (>) se bucură de o sumă de alte proprietăţi interesante. Pentru parte din acele proprietăţi a se consulta nota D-lui V. THÉBAULT dela pagina 215 din acest număr.

GH. B.

---

*PROBLEMA 4202. *Trei comune* A, B, C, *având respectiv 861, 574, 1435 locuitori sunt situate, în ordinea aci dată, pe o şosea la distanţele* AB = *4776 m şi* BC = *2388 m între localurile Primăriilor lor. La 1791 m dela* B *înspre* A *este un râu cu un pod şubred. Cele trei comune se asociază ca să facă acolo un pod nou, repartizând între ele cheltuelile totale în raport direct cu populaţia şi în raport invers cu distanţele dela Primăriile lor*

la acel pod. Ele angajează un inginer care să le facă planurile, să dirijeze şi să controleze lucrările, plătindu-i pentru planuri 2% din valoarea totală a lucrărilor proiectate şi 6% asupra valorii lucrărilor executate şi plătite antreprenorului care va face podul. Inginerul a prezentat un proiect de lucrări în valoare de 434000 lei. După cererea comunelor, se suprimă lucrări în valoare de 54000 lei, iar restul se dă în licitaţie şi se obţine un scăzământ de 10%. In timpul lucrărilor se constată însă că mai sunt unele lucrări necesare în valoare de 20000 lei, pe care antreprenorul consimte să le facă, însă fără scăzământ. In fine comunele au convenit cu inginerul şi cu antreprenorul ca plata să li se facă după terminarea lucrărilor, la 1 Ianuarie 1933.

Comunele ne dispunând de bani, se împrumută pe data de 1 Ianuarie 1933 dela o bancă cu sumele necesare pentru achitarea inginerului şi a antreprenorului. Condiţiunile împrumutului sunt următoarele: dobânda va fi de 10%, plătibilă cu anticipaţie la începutul anului, iar capitalul să se restitue, pe jumătate la 1 Ianuarie 1934 şi cealaltă jumătate la 1 Ianuarie 1935. Comunele au acceptat aceste condiţiuni.

Se cere să se calculeze ce sume trebue să înscrie acele comune în bugetele lor pe anii 1934 şi 1935 pentru achitarea sumelor luate dela bancă.

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: Avram N. Constantin (S.-Lt. din Geniu), S.-Lt. A. Em. Bădescu, D. Rotaru şi Al. D. Stoica (Liceul «Marele Voevod Mihai» din Buc.).

Problema comportă trei părţi:

1. Stabilirea sumelor ce trebuiesc date inginerului şi antreprenorului.

2. Stabilirea plăţilor ce trebuiesc făcute la bancă la 1/I 1934 şi la 1/I 1935.

3. Distribuirea acestor sume la cele trei Comune.

I. Din valoarea totală a lucrărilor proiectate de 434000 lei nu se mai vor executa lucrări în valoare de 54000 lei, aşa că rămân de efectuat lucrări în valoare de $434000 - 54000 = 380000$ lei. La licitaţie se obţine un scăzământ de 10% din această sumă, aşa că antreprenorul va primi 0,90 dintr'ânsa, adică $0{,}90 \times 380000 = 342000$ lei. Se mai fac lucrări suplimentare de 20000 lei, aşa

că antreprenorul va avea de primit la 1/I 1933 suma de 342000 + 20000 = 362000 lei.

Inginerul va avea de primit atunci $2^0/_0$ din valoarea totală a lucrărilor proiectate (434000 lei) şi $6^0/_0$ din valoarea lucrărilor plătite antreprenorului (342000 lei). Deci el va primi în total $0{,}02 \times 434000 + 0{,}06 \times 342000 = 30400$ lei.

Suma totală pe care cele trei comune va trebui să o achite inginerului şi antreprenorului la 1/I 1933 va fi de 30400 + 342000 = 392400 lei.

II. Comunele trebue să ia dela Bancă 392400 lei. Insă la 100 lei cu care se îndatorează cineva la acea Bancă nu primeşte în mână de cât 90 lei, căci 10 lei îi reţine ca dobândă prin anticipaţie. Prin urmare, ca acele Comune să primească 392400 lei, ele trebue să contracteze o datorie de $392400 \times 100/90 = 436000$ lei. Din această sumă va trebui să restituiască jumătate, adică $\frac{1}{2} \times 436000 = 218000$ lei la 1/I 1934 şi tot atâta la 1/I 1935. Această din urmă sumă mai rămâind 1 an neachitată, pentru ea va trebui să se plătească, la începutul anului, adică la 1/I 1934, o dobândă de $10^0/_0$ adică $0{,}10 \times 218000 = 21800$. Deci la acea dată trebue să se plătească în total 218000 + 21800 = 239800 lei, iar la 1/I 1935 numai 218000 lei, căci nu mai rămâne nici o datorie după această plată.

In rezumat dar, Comunele vor avea de plătit Băncii 239800 lei la 1/I 1934 şi 218000 lei la 1/I 1935.

III. Rămâne acum să distribuim aceste sume la cele trei Comune A, B, C. După convenţiunea încheiată între ele, plata se va face, pe de o parte, proporţională cu populaţiile lor, adică cu 861, 574, 1435. Dar se vede uşor că avem:

$$861 = 3 \times 287, \qquad 574 = 2 \times 287, \qquad 1435 = 5 \times 287.$$

Suprimând factorul comun 287 se vede că e destul a împărţi proporţional cu 3, 2, 5. Pe de altă parte, distribuţia datoriilor se mai face şi invers proporţional cu distanţele dela primăriile acelor Comune la pod. Fie A, B, C, P punctele de pe şosea în care se află primăriile comunelor A, B, C şi podul. După datele problemei avem:

$$AP = 4776 - 1791 = 2985 = 5 \times 597, \quad BP = 1791 = 3 \times 597,$$

$$CP = 1791 + 2388 = 4179 = 7 \times 597.$$

Deci e destul a împărți invers proporțional cu factorii necomuni 5, 3, 7. Distribuția datoriilor făcându-se direct proporțional cu numerele 3, 2, 5 și invers proporțional cu 5, 3, 7, împărțirea trebue făcută proporțional cu fracțiile 3/5, 2/3, 5/7, sau, aducându-le la același numitor, proporțional cu 63/105, 70/105, 75/105. Numitorul fiind comun e destul a face împărțirea proporțional cu numărătorii 63, 70, 75. Suma acestor trei numere fiind 208, revine Comunelor A, B, C respectiv 63/208, 70/208 și 75/208 din datoriile ce au de plătit la Bancă, la datele de 1/I 1934 și 1/I 1935. Inmulțind cu aceste fracțiuni sumele de 239800 lei și 218000 lei datorate la acele date, găsim următorul tablou al sumelor pe care cele trei comune trebue să le înscrie în bugetele lor pe 1933 și 1934:

Comuna	Bugetul 1933	Bugetul 1934
A.	72631 lei	66029 lei
B.	80702 „	73365 „
C.	86467 „	78605 „
Total...	239800 lei	218000 lei

*EXERCIȚII

21. Se cer numerile N compuse din factori, 2, 3 și 7, a căror indicatori sunt cuburi perfecte de trei cifre.

EMILIAN MEREUȚĂ.

R. Numerile N căutate sunt de forma:

$$N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma}.$$

Indicatorul lui N va fi de forma:

$$\varphi(N) = 2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma-1}$$

cuburile de trei cifre care conțin factorii lui φ (N) sunt:

$$216 = 2^3 \cdot 3^3 \; ; \; 343 = 7^3 \; ; \; 512 = 2^9 \; ; \; 729 = 3^9.$$

Deci găsim:

$2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma-1} = 2^3 \cdot 3^3 \quad \therefore \quad \alpha = 2 \; ; \; \beta = 3 \; ; \; \gamma = 1 \quad N = 756$

$2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma-1} = 7^3 \quad \therefore \quad \alpha = -1 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 4$ nu e soluție

$2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma-1} = 2^9 \quad \therefore \quad \alpha = 8 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 1$ nu e soluție

$2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma-1} = 3^9 \quad \therefore \quad \alpha = -1 \quad \beta = 9 \quad \gamma = 1 \quad N = \frac{5103}{2}$.

Adică 756 soluții.

22. Se dă o progresie geometrică de 8 termeni. Se ştie că diferenţa dintre suma ultimilor 4 termeni şi suma primilor 4 termeni este 225, iar produsul lor e 3600.

Să se afle acea progresie.

M. CHIRIŢĂ.

R. Notând :

$$X = a \cdot r^4 \cdot (1 + r + r^2 + r^3) = a \cdot r^4 \cdot \frac{r^4 - 1}{r - 1}$$

$$Y = a \cdot \quad (1 + r + r^2 + r^3) = a \cdot \quad \frac{r^4 - 1}{r - 1}$$

avem conform enunţului :

$$X - Y = 225 \quad \text{şi} \quad X \cdot Y = 3600$$

de unde :

$$X = 240 \quad \text{şi} \quad Y = 15.$$

Atunci :

$$\frac{X}{Y} = \frac{240}{15} = 16 = r^4$$

deci :

$$r = \pm 2 \; ; \; \pm 2 \cdot i \quad \text{unde } i = \sqrt{-1}$$

apoi :

$$a = \frac{Y(r-1)}{r^4 - 1} = \frac{15}{16 - 1}(r - 1)$$

de unde obţinem soluţiile :

$$a = 1 \; ; \; -3 \; ; \; (2 \cdot i - 1) \; ; \; -(2i + 1).$$

Prin urmare găsim două progresiuni reale şi două imaginare.

23. Să se rezolve sistemul :

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y+2}} + \sqrt[3]{\frac{y+2}{x}} = 2$$

$$\sqrt{x - \sqrt{y+1}} - \sqrt{y - \sqrt{x+3}} = 0.$$

C. PÂRVULESCU.

R. Prima ecuaţie se mai scrie gonind numitorii

$$(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y+2})^2 = 0 \quad \therefore \quad \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y+2}$$

de unde

$$x = y + 2 \quad \therefore \quad y = x - 2$$

valoare care introdusă în a doua şi prin ridicări succesive la pătrat ne dă : $x = 1$. Soluţia sistemului este deci : $x = 1$, $y = -1$.

PROBLEME PROPUSE

4201 [1]). Orice ecuaţie de gradul al treilea, ai cărei coeficienţi consecutivi sunt puterile p (p negativ sau pozitiv mai mic sau cel mult egal cu 3) ale termenilor consecutivi ai unei progresii aritmetice, are o singură rădăcină reală.

P. SERGESCU.

4221. Să se găsească un număr de trei cifre aşa ca suma cifrelor lui să fie un multiplu al fiecărora din ele.

V. THÉBAULT.

*4222. Laturile unui dreptunghiu sunt în raportul 1 : 5,5129, iar aria lui este echivalentă cu a unui patrat de 7,925 m. latură. Care este raportul între perimetrul dreptunghiului şi al patratului? Rezultatul se va da cu două zecimale exacte.

I. IONESCU.

*4223. Se dă triunghiul ABC şi cercul său circumscris O Fie α, β, γ şi A_1, B_1, C_1 punctele unde AO, BO, CO, taie respectiv laturile opuse şi cercul O. Să se arate că avem relaţiunea:

$$\frac{\overline{A_1\alpha}}{\overline{A\alpha}} + \frac{\overline{B_1\beta}}{\overline{B\beta}} + \frac{\overline{C_1\gamma}}{\overline{C\gamma}} = 1.$$

N. N. ALDEA.

*4224. A_1, B_1, C_1 fiind picioarele cevienelor unui punct M, iar φ_a, φ_b, φ_c unghiurile făcute de acestea cu laturile opuse, să se demonstreze relaţiunea:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AA_1}}\operatorname{cotg}\varphi_a + \frac{\overline{BM}}{\overline{BB_1}}\operatorname{cotg}\varphi_b + \frac{\overline{CM}}{\overline{CC_1}}\operatorname{cotg}\varphi_c = 0.$$

ION C. VASILIU.

*4225. Se dau ecuaţiile:

(1) $f(x)=a_0x^2+2a_1x+a_2=0$; (2) $g(x)=b_0x^2+2b_1x+b_2=0$

ale căror rădăcini sunt de aceiaş natură.

Se consideră ecuaţia:

(3) $\varphi(x)=a_0c_0g(x)+2c_1(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)+b_0c_2f(x)=0.$

Să se determine în ce caz ecuaţia (3) are rădăcinile de aceiaş natură cu ale ecuaţiilor (1) şi (2), oricare ar fi aceste ecuaţii.

N. CIORĂNESCU.

1) Problema 4201, propusă în Nr. 4 la pag. 158 fiind tot una cu problema 3983 propusă de acelaşi autor la pag. 238, Vol. XXXVI, se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

*4226. Să se rezolve şi să se discute sistemul:

$$(T)\quad \left|\begin{array}{l}(a-x)(a-y)(a-z)=a^p\\(b-x)(b-y)(b-z)=b^p\\(c-x)(c-y)(c-z)=c^p\end{array}\right|.$$

Să se discute problema în cazul a n necunoscute.

O. N. Ţino.

*4227. Să se demonstreze că:

1°. Într'un cerc de rază R se pot înscrie o infinitate de triunghiuri ABC, în care bisectoara unghiului A să fie şi mediană în triunghiul format de mediana AM, de înălţimea AH şi de segmentul MH;

2°. Fiind dată una din laturile triunghiului ABC, se poate construi triunghiul;

3°. Fiind dat triunghiul A se poate rezolva triunghiul şi să se rezolve în cazul

$$R = 5\text{ m.} \qquad \text{iar} \qquad A = 80^0.$$

Col. Gh. Buicliu.

4228. Să se stabilească identitatea

$$(s - aR\cos A)\cos^2 A + (s - bR\cos B)\cos^2 B + (s - cR\cos C)\cos^2 C = 2s\cos A\cos B\cos C.$$

Cezar Ivănescu.

4229. Pe două drepte fixe, care se întretae în punctul O, se iau respectiv punctele A şi B, astfel încât OA + OB = constantă.

Se descriu cercurile cu centrele în A şi B, având ca raze respectiv lungimile OB şi OA.

Se cere locurile geometrice descrise de punctele M şi N de intersecţie ale celor două cercuri.

Colonel Vasile Negrei.

4230. Un «Yo — Yo» lăsat să cadă liber, capătă *1933* de ture pe minut la finele căderei.

Ştiind că raza lui este 25 mm. şi greutatea 300 gr., se întreabă până la ce înălţime se va urca iarăşi pe sfoară?

Cum ar trebui să mişcăm mâna, pentru a-i ajuta urcarea?

Se va presupune că frecarea cu sfoara este: $f = 0{,}1$.

Căpitan I. Linteş.

ERATĂ. La Exerciţiul Nr. 20 din acest an s'a omis din enunţ: «*p un număr prim* > 2».

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (4156, 57, 93, 208, 17); *Aurian A. Justin* (4024); *Avram N. C. Subloc.* (4173, 82, 99, 204, 11); *Bădescu Em. A. Subloc.* (4121, 96); *Ceauşescu Vasile* (4180); *Chiriţă M.* (4084, 96, E, P); *Cohn L. Avr.* (4208); *Costăchescu V. C.* (P); *Curchi I.* (3491, 4176, 99); *Fabius Dorina* (4179, 217); *Ghiocel V. V.* (4187); *Godeanu I. V.* (4084, 96); *Ionescu-Biss P. Har.* (4146); *Ivănescu Cezar* (4077, 177, 82, 96, 99, 208, P); *Léber Margareta* (4204, 05, 07, 17); *Mănescu Mircea* (4108, 208); *Mareş I. Em.* (3491, 4208, 11); *Margulius M.* (2985, 3059, 73, 90, 389, 491, 720, 4145, 74, 76, 93, 95, 99, 204, 07); *Mazilu C. Panaite* (4180); *Mereuţă Em.* (4133); *Mihăileanu N. N.* (4174); *Nubar Artaki-Acik* (4107, 79, 84); *Olteanu E. Şt.* (4071, 107, 84, 90, 98, 99, N, P); *Patraulea N.* (4174, 76, 90, 96, 99); *Petrescu I. Ion* (4196); *Petrescu I. M.* (4204); *Predoescu I. M.* (4188, P); *Rogalschi V. E.* (3491); *Sager N. I.* (4174, 99, 200, 04, 15, 17); *Stoica D. Al.* (3491, 4217); *Thébault V.* (A, N, P); *Ziff S. Martin* (3491, 4173, 82, 87, 211, 17).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor aveà format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“.

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1933

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Proprietăți ale triunghiului (urmare) . . . . . *N. G. Botea*
2. Regulamentul fondului „Vasile Conta"
3. Note matematice: 31 — 38
4. Chestiuni de examen
5. Bibliografie
6. Cereri
7. Diverse
8. Probleme rezolvate: 3649, 3921, 3959, 4017, 4058, 4182, 4198
9. Exerciții: 24 — 25
10. Probleme propuse: 4231 — 4240

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 54, 55, 63, 65, 67, 69, 70, 89, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 22 Februarie a. c. mai fac parte din Societatea noastră şi D-nii: C. Ionescu-Bujor, licenţiat în matematici, Al. Roşu, licenţiat în matematici, Rudolf Woinarovsky, licenţiat în matematici şi Gh. Vasiliu-Loeben, inginer.

PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI

(Urmare *)

II.

1°. **Teoremă.** *Să considerăm un triunghiu* ABC, *o dreaptă* Δ *şi două puncte* M, N, *în acelaş plan. Pe dreapta* Δ *considerăm omografiile determinate de relaţiile:*

$$(1)\quad yy' + \lambda(y - y') = 0\ ,\quad (2)\quad yy' + \lambda(y' - y) = 0.$$

Cevienele punctelor M, N : AM, BM, CM, AN, BN, CN *întâlnesc pe* Δ *respectiv în* A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. *Fie* A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2 *omoloagele acestor puncte respectiv în omografiile considerate pe* Δ. *Perechile de drepte* (A'_1N, A'_2M), (B'_1N, B'_2M), (C'_1N, C'_2M) *întâlnesc respectiv laturile* BC, CA, AB *în punctele* A', A'', B', B'', C' C'', *care se găsesc pe o aceiaşi conică* Γ.

Pentru demonstrare vom proceda ca şi în prima parte, căutând să dovedim relaţia lui CARNOT.

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{C''A}{C''B} = 1.$$

Vom întrebuinţa coordonatele carteziene luând un sistem de axe dreptunghiulare astfel ca Δ să fie chiar axa ordonatelor, iar origina să fie origina omografiei de pe Δ. Ordonatele a două puncte omoloage în prima omografie considerată pe Δ sunt legate prin relaţia:

$$yy' + \lambda(y - y') = 0$$

$$y' = \frac{\lambda y}{\lambda - y}\cdot$$

Să mai considerăm punctele:

$$A(x_1, y_1)\ ,\ B(x_2, y_2)\ ,\ C(x_3, y_3)\ ,\ M(x_m, y_m)\ ,\ N(x_n, y_n).$$

Dreapta AM are ecuaţia:

$$y - y_m = \frac{y_1 - y_m}{x_1 - x_m}(x - x_m).$$

*) A se vedea *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, pag. 206.

Ea întâlnește axa Δ în punctul A_1, a cărui ordonată este

$$y = \frac{y_m x_1 - x_m y_1}{x_1 - x_m}.$$

Omologul lui A_1 în omografia considerată pe Δ este punctul A'_1, a cărui ordonată este

$$y' = \frac{\lambda (y_m x_1 - x_m y_1)}{x_m y_1 - y_m x_1 + \lambda (x_1 - x_m)}.$$

Dreapta A'_1N va avea ecuația:

$$y - \frac{\lambda (y_m x_1 - x_m y_1)}{x_m y_1 - y_m x_1 + \lambda (x_1 - x_m)} = \frac{y_n - \dfrac{\lambda (y_m x_1 - x_m y_1)}{x_m y_1 - y_m x_1 + \lambda (x_1 - x_m)}}{x_n} x.$$

sau:

$$(x_m y_1 - y_m x_1) x_n y - (x_m y_1 - y_m x_1) y_n x + \lambda (x_1 - x_m) x_n y +$$
$$\lambda (y_m x_1 - x_m y_1 - x_1 y_n + x_m y_n) x - \lambda (y_m x_1 - x_m y_1) x_n = 0.$$

Să notăm că d_b, d_c distanțele punctelor B, C la dreapta NA'_1 a cărui ecuație am găsit-o și cu $d(m_2, n_1)$, $d(m_3, n_1)$ următoarele expresii:

$$d_b \sqrt{[(x_m y_1 - y_m x_1) x_n + \lambda (x_1 - x_m) x_n]^2 + [-(x_m y_1 - y_m x_1) y_n +}$$
$$\overline{\lambda (y_m x_1 - x_m y_1 - x_1 y_n + x_m y_n)]^2}.$$

$$d_c \sqrt{[(x_m y_1 - y_m x_1) x_n + \lambda (x_1 - x_m) x_n]^2 + [(y_m x_1 - x_m y_1) y_n +}$$
$$\overline{\lambda (y_m x_1 - x_m y_1 - x_1 y_n + x_m y_n)]^2}$$

Vom avea:

$$d(m_2, n_1) = (x_m x_n y_1 y_2 + y_m y_n x_1 x_2) - (x_n y_m x_1 y_2 + x_m y_n x_2 y_1) +$$
$$\lambda [x_n x_1 y_2 - x_m y_1 x_2 + x_m x_n (y_1 - y_2) + x_1 x_2 (y_m - y_n) +$$
$$x_n y_1 x_2 - x_1 y_n x$$

$$d(m_3, n_1) = (x_m x_n y_1 y_3 + y_m y_n x_1 x_3) - (x_n y_m x_1 x_2 + x_m y_n x_2 y_1) +$$
$$\lambda [x_n x_1 y_3 - x_m y_1 x_3 + x_m x_n (y_1 - y_3) + x_1 x_3 (y_m - y_n) +$$
$$x_m y_n x_3 - x_n y_m x_1].$$

Deducem cu ușurință

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{d_b}{d_c} = \frac{d(m_2, n_1)}{d(m_3, n_1)}$$

și în mod analog găsim

$$\frac{B'C}{BA} = \frac{d(m_3, n_2)}{d(m_1, n_2)}, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{d(m_1, n_3)}{d(m_2, n_3)},$$

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{d(n_2, m_1)}{d(n_3, m_1)}, \quad \frac{B''C}{B''A} = \frac{d(n_3, m_2)}{d(n_1, m_2)}, \quad \frac{C''A}{C''B} = \frac{d(n_1, m_3)}{d(n_2, m_3)}$$

și cum

$$d(m_i, n_j) = d(n_j, m_i)$$

relația

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$$

este verificată și deci punctele A', A'', B', B'', C', C'' se găsesc pe o conică Γ. Dacă trei din aceste puncte sunt colineare și celelalte trei se vor bucura de aceiaș proprietate.

Deasemenea dacă trei din ele sunt picioarele a trei ceviene concurente, acelaș lucru îl putem spune despre celelalte trei puncte.

Teorema de mai sus prezintă câteva cazuri particulare deosebit de interesante.

Dacă scriem relația omografică sub forma

$$\frac{1}{\lambda} yy' + y - y' = 0$$

și facem pe λ să tindă la infinit obținem relația omografică $y = y'$, care face ca două puncte corespunzătoare să fie confundate. Avem astfel teorema următoare:

2⁰. *O dreaptă* Δ *întâlnește cevienele unui punct* M *în triunghiul* ABC *în* A_1, B_i, C_i, *iar cevienele unui punct* N *în* A_2, B_2, C_2. *Dreptele* MA_2 *și* NA_2 *întâlnesc latura* BC *respectiv în* M_a, N_a *și analog obținem punctele* M_b, N_b, M_c, N_c. *Punctele* M_a, N_a, M_b, N_b, M_c, N_c *sunt situate pe o conică* [1]).

1) N. Botea Curierul Matematic II, pag. 169; Mathesis 1927, pag. 76.

Când Δ este dreapta dela infinit vom avea :

3°. *Paralele duse printr'un punct* M *la cevienele unui alt punct* N *şi paralele duse prin* N *la cevienele lui* M *în acelaş triunghiu* ABC, *întâlnesc laturile acestuia în şase puncte situate pe o conică* [1]).

Cum într'un triunghiu ABC picioarele cevienelor a două puncte sunt şase puncte situate pe o conică deducem :

4°. *Fiind dat un triunghiu* ABC *şi două puncte* M *şi* N *în planul său, dacă paralelele duse din* N *la cevienele lui* M *determină pe laturile corespunzătoare ale triunghiului* ABC, *trei puncte colineare, sau cari sunt picioarele a trei ceviene, atunci şi* M *se bucură de aceeaş proprietate faţă de cevienele lui* N. (L. HAMBURGER. Problema 2591 G. M.).

Folosind un sistem de coordonate baricentrice raportat la un triunghiu ABC, avem proprietatea : [2]).

5°. *Locul punctelor* M (x, y, z), *din planul triunghiului* ABC, *astfel ca paralelele duse prin ele la cevienele unui punct* $M(x_0, y_0, z_0)$ *să întâlnească laturile triunghiului în trei puncte colineare este conica circumscrisă triunghiului* ABC, *de ecuaţie :*

$$\Gamma(x, y, z) = x_0(y_0 + z_0)yz + y_0(z_0 + x_0)xz + z_0(x_0 + y_0)xy = 0.$$

Din proprietăţile 4° şi 5° deducem :

6°. *Locul punctelor* M (x, y, z) *din planul triunghiului* ABC, *astfel ca paralelele duse prin punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *la cevienele lui* M *să întâlnească laturile triunghiului în trei puncte colineare este tot conica de mai sus*

$$\Gamma(x, y, z) = x_0(y_0 + z_0)yz + y_0(z_0 + x_0)zx + z_0(x_0 + y_0)xy = 0$$ [3]).

Cazuri particulare avem : [4]).

---

1) Acest caz particular admite o simplă soluţiune geometrică, ce a fost dată de D-l GEORGESCU RACOVIŢĂ acum trei ani la o şedinţă a unui cerc studenţesc de studii geometrice. Corespondenţii au prilejul să regăsească acea soluţie cu ocazia rezolvărei problemei 2591.

2) I. C. VASILIU, Curierul Matematic I. pag. 81.

3) N. BOTEA, Curierul Matematic I. pag. 134.

4) Idem.

7°. Paralelele duse prin ortocentrul unui triunghiu la cevienele unui punct al cercului circumscris tae laturile triunghiului în trei puncte colineare [1]).

8°. Paralelele duse prin centrul de greutate la cevienele unui punct depe elipsa lui STEINER întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte colineare.

9°. Paralele duse prin punctul lui STEINER la cevienele unui punct depe hiperbola lui KIEPERT întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte colineare.

Tot din proprietatea noastră 6° se deduce:

10°. Paralelele duse din centrul unei conici Γ, circumscrise triunghiului ABC, la transversalele unghiulare ale unui punct al ei, taie laturile triunghiului complimentar în trei puncte colineare [2]).

11°. Să considerăm o proprietate, care să cuprindă unele din cazurile particulare de mai sus. Să revenim la teorema 1°, dela care am plecat. Să presupunem pe λ constant și punctul M fix. Locul geometric al punctului N pentruca punctele A', B', C' să fie colineare este cubica:

$$d(m_2 n_1)\, d(m_3 n_2)\, d(m_1 n_3) + d(m_3 n_1)\, d(m_1 n_2)\, d(m_2 n_3) = 0,$$

unde s'au înlocuit coordonatele x_n, y_n, z_n prin coordonatele curente. In acest caz după teorema generală dela 1° și punctele A'', B'', C'' sunt colineare. Să observăm că dacă N se găsește pe Δ proprietatea ca grupurile de puncte (A', B', C'), (A'', B'', C'') să fie colineare este întotdeauna verificată. Deci cubica de mai sus se descompune într'o conică (C) și în dreapta Δ. Proprietatea este deasemenea verificată când N se găsește într'un vârf al triunghiului.

Conica (C) este astfel circumscrisă triunghiului ABC.

12°. Locul geometric al lui N pentruca cevienele AA', BB', CC', să fie concurente este cubica:

$$d(m_2 n_1)\, d(m_3 n_2)\, d(m_1 n_3) = d(m_3 n_1)\, d(m_1 n_3)\, d(m_2 n_1).$$

In acest caz și cevienele AA'', BB'', CC'' sunt concurente.

(Va urma) N. G. BOTEA.

1) D. NESTOR. G. M. XXXII, pag. 127.

2) M. GRÜNBAUM. F. M. II, pag. 77.

REGULAMENTUL FONDULUI „VASILE CONTA“

Art. 1. — Societatea «Gazeta Matematică» continuând ideia acordării unui premiu anual pentru lucrări de filosofia matematicilor în memoria ilustrului filosof român Vasile Conta, idee înfăptuită la «Gazeta Matematică» de sora sa Ana Conta Kernbach în timpul vieții sale prin o contribuție viageră anuală, constitue un fond în acelaș scop, denumit fondul «Vasile Conta», din venitul căruia se acordă un premiu.

Art. 2. — Premiul se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoștința Societății în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Dacă până la acea dată nu se prezintă nici o lucrare, se va aștepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Art. 3. — Prima adunare generală anuală alege o comisiune compusă din 2 membri și un delegat, care examinează lucrările; mandatul acestei comisiuni este limitat la un an, chiar dacă nu se acordă premiul.

Art. 4. — Comisiunea propune celei de a doua adunări generale din acel an, una sau cel mult două lucrări pentru premiare.

Premiul constă din totalitatea venitului fondului cumulat până la data acordării.

Art. 5. — Autorii lucrărilor trebuie să fie români și să-și fi făcut studiile secundare în țară.

Art. 6. — Raportul comisiunii se publică în numărul din Noemvrie al «Gazetei Matematice».

NOTE MATEMATICE

31. *Asupra șirului*

$$P_0 = 1,\ P_1 = p,\ P_2 = p^2 + q,\ \ldots,\ P_n = p\,P_{n-1} + q\,P_{n-2}.$$

Voi face asupra acestui șir, în mod rezumativ, considerațiuni analoage cu cele făcute asupra șirului lui FIBONACCI în articolele dela pag. 168 și pag. 203.

Relația corespondentă lui (1) este aci:

$$P_{n+s} = P_n P_s + q\,P_{n-1}\,P_{s-1}. \qquad (1')$$

Dacă p este prim cu q, şirul nu are dat termeni consecutivi cu divizori comuni.

Ţinând seama de aceasta şi de relaţia:

$$P_{tn-1} = P_n P_{(t-1)n-1} + q P_{n-1} P_{(t-1)n-2},$$

în care facem pe t să ia toate valorile dela 0 la t, deducem că singurii termeni divizibili cu P_{n-1} sunt cei de forma P_{tn-1}.

Analog lui (4) se găseşte:

$$(P_{nk-1}/P_{n-1}) - k P_n^{k-1} + \tfrac{1}{2} k(k-1) p P_n^{k-2} P_{n-1} = \mathcal{M} P_{n-1}^2. \quad (4')$$

Dintr'o examinare detaliată a acestei relaţiuni se deduce:

a) Dacă p este pereche, $P_{tn-1} = \mathcal{M} P_{n-1}^r$ când $t = \mathcal{M} P_{n-1}^{r-1}$.

b) Dacă p este nepereche şi q pereche, toţi termenii şirului sunt neperechi şi $P_{tn-1} = \mathcal{M} P_{n-1}^r$ dacă $t = \mathcal{M} P_{n-1}^{r-1}$.

c) Dacă p şi q sunt neperechi, şirul are şi termeni perechi şi anume pe aceia al căror indice mărit cu 1 sunt $\mathcal{M} 3$. Vom examina mai de aproape pe primii termeni perechi, adică pe $P_2 = p^2 + q$ şi $P_5 = p^5 + 4p^3q + 3pq^2$.

Patratul unui număr nepereche este $\mathcal{M} 4 + 1$. Deci:

$$P_2 - (q+1) = \mathcal{M} 4 \quad , \quad P_5 = \mathcal{M} 4.$$

Din examinarea relaţii (4') se deduce că dacă $q = \mathcal{M} 4 + 3$ regula de divizibilitate este aceiaşi ca la *(a)* şi *(b)*; dacă $q = \mathcal{M} 4 + 1$ regula este aceiaşi ca la şirul lui Fibonacci.

De aci scoatem regula:

Dacă $p = \mathcal{M} 2 + 1$, $q = \mathcal{M} 4 + 1$, $n = \mathcal{M} 6 + 3$, *termenul* P_{tn-1} *al şirului este* $\mathcal{M} P_{n-1}^2$ *când* $t = \mathcal{M} P_{n-1}$, *şi avem* $P_{tn-1} = \mathcal{M} P_{(n-1)}^r$, $(r > 2)$ *dacă* $t = \mathcal{M}\left(\tfrac{1}{2} P_{n-1}^{r-1}\right)$. *In toate celelalte cazuri* $P_{tn-1} = \mathcal{M} P_{n-1}^r$ *dacă* $t = \mathcal{M} P_{n-1}^{r-1}$.

Regula nu se aplică când p şi q au un divizor comun, căci atunci P_n şi P_{n-1} nu mai sunt primi între ei aşa cum s'a presupus la stabilirea regulii.

Ion B. Florescu.

32. *Asupra problemei 2608.* In această problemă se cerea să se găsească termeni din şirul lui Fibonacci care se termină cu n zerori.

Soluţia dată în volumul XXXV, pag. 186 este eronată, deoarece nu s'a ţinut seamă că relaţia:

$$U_{pq-1} = \mathcal{M}. (U_{p-1}\, U_{q-1}),$$

nu este adevărată decât dacă p şi q sunt primi între ei. Soluţia se poate deduce uşor din criteriul de divizibilitate dat în articolul pe care-l public în No. 6 din acest an.

Ca un număr să fie $\mathcal{M}.10^n$ trebuie să se dividă cu 2^n şi 5^n. Dar $2 = U_2$, $5 = U_4$. Deci termenul căutat se va divide cu U_2^{10} şi U_4^{10}; adică cu $(U_{3-1}^{10} . U_{5-1}^{10})$. Cum 5 nu este $\mathcal{M}.6 + 3$, atunci U_{5t-1} se divide cu $U_{5-1}^n = 5^n$ dacă $t = \mathcal{M}.5^{n-1}$. Cel mai mic termen din şirul lui Fibonacci care se divide cu 5^n este deci U_{5^n-1}.

Pentru ca U_{3t-1} să se dividă cu U_{3-1}^2 trebuie ca t să se dividă cu 2, iar pentru ca U_{3t-1} să se dividă cu $U_{3-1}^n = 2^n$, pentru $n > 2$, trebue ca t să se dividă cu $\frac{1}{2} U_{3-1}^{n-1} = 2^{n-2}$. Deci cel mai mic termen care se divide cu 2^2 este $U_{6-1} = U_5$, iar cel mai mic termen care se divide cu 2^n, $(n > 2)$, este $U_{3.2^n-1}$.

De aci reese că:

a) U_{t-1} se termină cu 1 zero când se divide cu U_{3-1} şi U_{5-1}, deci când t se divide cu $3 \times 5 = 15$.

b) U_{t-1} se termină cu 2 zerori când se divide cu U_{6-1} şi U_{25-1}, deci când t se divide cu $6 \times 25 = 150$.

c) U_{t-1} se termină cu n zerori $(n > 2)$ când se divide cu $U_{3.2^n-1}$ şi U_{5^n-1}, deci când t se divide cu $3.2^{n-2} . 5^n$.

Deci cel mai mic termen care se termină cu 1 zero este $U_{15-1} = U_{14}$; cu 2 zerori $U_{150-1} = U_{149}$: cu 3 zerori $U_{750-1} = U_{749}$, şi cu n zerori $(n > 3)$, $U_{7499\ldots9}$, cifra 9 repetându-se în indice de $(n - 2)$ ori.

Ion B. Florescu.

33. *Asupra unor relaţii dintre elementele unui triunghiu.*

Cu puţin înaintea Numărului 2 tocmai scrisesem câteva rânduri despre exprimarea expresiilor simetrice, în raport cu laturile unui triunghiu, în funcţie de: p, r şi R notaţiile fiind cele obijnuite. Intâmplător însă în acest număr D-l V. Thébault a dat o notă cu acelaşi subiect. Deoarece metoda D-sale este diferită de a mea, pe care o cred mai generală, găsesc totuşi că rândurile de faţă nu sunt scrise de prisos.

Fie a, b, c laturile unui triunghiu ABC. Ecuația

$$(1)\quad x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$$

are ca rădăcini tocmai pe a, b, c. Însă se știe că

$$a+b+c=2p\ ,\ ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr\ ,\ abc=4Rrp$$

și deci ecuația (1) se mai poate scrie:

$$(1')\qquad x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4Rrp=0.$$

Cunoscând această ecuație vom putea, după metoda generală, exprima orice funcție simetrică de rădăcinile sale cu ajutorul coeficienților, adică tocmai problema noastră.

Să facem câteva aplicații. Primele două sunt chiar exemplele alese de D-l THÉBAULT.

1°. Să calculăm expresia

$$E_1=\left(\frac{a}{p-a}\right)^2+\left(\frac{b}{p-b}\right)^2+\left(\frac{c}{p-c}\right)^2.$$

Vom forma mai întâi ecuația care are ca rădăcini pe

$$y=\frac{x}{p-x}$$

unde x este o rădăcină a ecuației (1'). Se găsește ușor această ecuație

$$(2)\quad r^2y^3+2r(r-2R)y^2+(p^2+r^2-8Rr)y-4Rr=0$$

și atunci E_1 nu este altceva decât suma pătratelor rădăcinilor acestei ecuații adică:

$$E_1=\left[-\frac{2(r-2R)}{r}\right]^2-2\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}=\frac{2(8R^2+r^2-p^2)}{r^2}$$

cu alte cuvinte putem scrie identitatea:

$$\left(\frac{a}{p-a}\right)^2+\left(\frac{b}{p-b}\right)^2+\left(\frac{c}{p-c}\right)^2=\frac{2(8R^2+r^2-p^2)}{r^2}.$$

2°. Să calculăm expresia:

$$E_2=bc(p-a)+ca(p-b)+ab(p-c).$$

Avem imediat, ținând seamă de relațiile dintre rădăcinile și coeficienții relației (1').

$$E_2 = p(bc+ca+ab) - 3abc = p(p^2+r^2+4Rr) - 12Rrp = p(p^2+r^2-8Rr)$$

și deci putem scrie identitatea:

$$bc(p-a) + ca(p-b) + ab(p-c) = p(p^2 + r^2 - 8Rr).$$

3°. In fine să calculăm expresia:

$$E_3 = \Sigma a^2 b = a^2 b + a^2 c + ab^2 + cb^2 + ac^2 + bc^2$$

care ar fi mai greu de calculat cu ajutorul considerațiunilor făcute de D-l THÉBAULT în Nota din Numărul 2. Avem:

$$E_3 = S_1 S_2 - S_3$$

unde am notat prin:

$$S_m = a^m + b^m + c^m.$$

Dar

$$S_1 = 2p \ , \ S_2 = 4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

și cu ajutorul formulelor lui NEWTON găsim:

$$S_3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$$

așa că

$$E_3 = 4p(p^2 - r^2 - 4Rr) - 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$$

și deci avem identitatea:

$$\Sigma a^2 b = 2p(p^2 + r^2 - 2Rr).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

34. *Asupra unui loc geometric.* Sub acest titlu, D-l Profesor D. V. IONESCU a publicat un interesant articol în numărul dela 15 Iulie 1932 din *Revista Matematică din Timișoara* la pagina 49, unde în prima parte stabilește elementar și pe cale geometrică următoarea teoremă:

Se dă un cerc C *de rază* R *și un punct fix* A *în planul său. Fie* M *un punct mobil pe cercul de diametru* AC. *Să se demonstreze că dacă se prelungește* AM *cu o cantitate* MP *egală cu* R, *atunci punctul* P *descrie podara lui* A *față de* C.

La 10 Aprilie 1932 am primit spre examinare o problemă propusă de D-l SUB-LOCOT. I. C. SAVIN, problemă în care se enunță aceiași proprietate. D-l SUB-LOCOT. I. C. SAVIN în soluția sa, demonstrează proprietatea pe cale analitică prin coordonate polare.

Abundența de materie ne-a împiedecat să publicăm la timp problema propusă de D-l I. C. Savin, iar articolul D-lui D. V. Ionescu face acum inoportună publicarea acelei probleme; rămâne ca studentul din Iași și harnicul nostru corespondent, D-l Sub.-Lt. I. C. Savin să aibă șansa priorității în alte coincidențe, viitoare, de gândire.

Col. Gh. Buicliu.

35. *Sur le triangle isoscèle.* Voici une autre démonstration simple de ce théorème bien connu:

Tout triangle qui a deux bissectrices intérieures égales est isoscèle [1]).

Soient un triangle ABC; B', C', les pieds des bissectrices intérieures des angles B, C, sur les côtés AC, BA; I le point d'intersection de ces bissectrices.

Traçons les cercles (ω_b), (ω_c), circonscrits aux triangles BAB', ACC', qui se coupent en A et K, et soient φ_1, φ_2, les intersections de la bissectrice intérieure AI de l'angle A avec ces cercles, autrement dit les milieux des arcs B'KB et CKC'.

Si l'on suppose que les bissectrices BB' et CC' sont *égales,* les cercles (ω_b) et (ω_c) sont aussi égaux, ainsi que les cordes $\varphi_1 B = \varphi_2 C$ qui soustendent des arcs égaux dans ces cercles égaux.

On déduit de là que

$$\varphi_1 I \cdot \varphi_1 A = \varphi_1 B^2 = \varphi_2 C^2 = \varphi_2 I \cdot \varphi_2 A,$$

soit $\varphi_1 = \varphi_2$, et la bissectrice intérieure AI est l'axe de symétrie de la figure. Les cordes BA et AC, également inclinées sur cet axe, sont *égales,* ce qui justifie le théorème.

V. Thébault.

36. *Asupra problemei 3937. G. M. XXXVIII, p. 146.*

Ne propunem să rezolvăm ecuația:

$$a\sqrt{(4x^2 - b^2)(4x^2 - c^2)} + b\sqrt{(4x^2 - c^2)(4x^2 - a^2)} + c\sqrt{(4x^2 - a^2)(4x^2 - b^2)} = abc.$$

1) Nous avons donné une autre solution, qui nous a été suggérée par la question 4115, G. M. 1932 — 73, dans R. M. T. 1932 — 99.

Pour une bibliographie plus complète du problème, voir *Mathesis,* 1923 — 337 et 1930 — 97. (V. T.)

Trecând ultimul radical în partea a doua, ridicând la patrat şi reducând termenii asemenea obţinem :

$$8x^2[2x^2(a^2+b^2-c^2)-a^2b^2+ab\sqrt{4x^2-a^2)(4x^2-b^2)}]=0$$

$x=0$ nefiind o soluţiune a ecuaţiunei, vom avea de rezolvat ecuaţia :

$$2x^2(a^2+b^2-c^2)-a^2b^2=-ab\sqrt{(4x^2-a^2)(4x^2-b^2)}.$$

Ridicând din nou la patrat ambele părţi, reducând termenii asemenea şi eliminând factorul comun $4x^2$ obţinem :

$$x^2[4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2]=a^2b^2c^2$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}$$

şi dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu, se obţine $x=\pm R$.

C. Cinski, R. Dumitrăşcu, P. Ghişoiu, C. Lupescu, N. Mihăileanu, M. L. Negrea, I. Parepeanu, C. Rusu, I. Zarda.

37. *Asupra unei probleme.* In «Mathesis» vol. XLVI, pag. 256, D-l R. Goormaghtigh propune următoarea problemă : „*Soient* $A_i B_i C_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *n triangles équilatéraux coplanaires de même sens de circulation; si l'on affecte les sommets de chacun de triangles* $A_i B_i C_i$ *de masses* μ_i *les centres de gravité des masses appliqués respectivement aux points* A_i *aux points* B_i *et aux points* C_i *forment un triangles équilateral*".

Imi propun în această notă să demonstrez următoarea proprietate mai generală : „*Fie n grupuri de câte m puncte în spaţiu* $A_i B_i \ldots M_i$ $(i=1 \ldots n)$ *alese astfel ca în raport cu un al* $(n+1)^{lea}$ *grup* $A_0, B_0 \ldots M_0$ *să avem relaţiile de proporţionalitate.*

$$\overline{A_iB_i}=K_i\,\overline{A_0B_0}\;;\;\overline{B_iC_i}=K_i\,\overline{B_0C_0}\;;\;\ldots\;;\;\overline{L_iM_i}=K_i\,\overline{L_0M_0}. \quad (1)$$

Dacă afectăm punctelor fiecărui grup nişte mase μ_i , *centrele de greutate* A, B . . . M *ale maselor din punctele* A_i $(i=1,\ldots\mathfrak{M})$, B_i $(i=1 \ldots n) \ldots M_i$ $(i=1 \ldots n)$ *formează un nou grup de puncte cari verifică relaţiile :*

$$\overline{AB}=K\,\overline{A_0B_0}\;;\;\overline{BC}=K\,\overline{B_0C_0}\;;\;\ldots\;\overline{LM}=K\,\overline{L_0M_0} \quad (2)$$

analoage cu (1)".

Voi utiliza pentru demonstrație calculul punctual al lui GRASSMAN (Vezi de ex. Lesengle «Précis de Calcul Géométrique». Gauthier-Villars 1920).

Relațiile (1) din enunț se scriu:

$$A_i - B_i = K_i\,(A_0 - B_0)\,;\ \ldots\ L_i - B_i = K_i\,(L_0 - B_0), \qquad (3)$$

iar centrele de greutate ale punctelor $A_i\,;\ B_i\,;\ \ldots L_i\,;\ M_i$ $(i = 1 \ldots n)$ afectate de masele μ_i sunt date de expresiile:

$$A = \frac{\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \ldots + \mu_n A_n}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n} = \frac{\sum_1^n \mu_i A_i}{\sum_1^n \mu_i}$$

$$B = \frac{\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots + \mu_n B_n}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n} = \frac{\sum_1^n \mu_i B_i}{\sum_1^n \mu_i} \qquad (4)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$M = \frac{\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 + \ldots + \mu_n M_n}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n} = \frac{\sum_1^n \mu_i M_i}{\sum_1^n \mu_i}\,.$$

Prin scăderea primelor două relații din (4) avem

$$A - B = \frac{\Sigma \mu_i A_i}{\Sigma \mu_i} - \frac{\Sigma \mu_i B_i}{\Sigma \mu_i} = \frac{\Sigma \mu_i (A_i - B_i)}{\Sigma \mu_i}$$

sau ținând seama de (3) avem:

$$A - B = (A_0 - B_0) \cdot \frac{\Sigma \mu_i K_i}{\Sigma \mu_i}$$

analog avem: (5)

$$B - C = (B_0 - C_0) \cdot \frac{\Sigma \mu_i K_i}{\Sigma \mu_i}$$

. . . . . .

$$L - M = (L_0 - M_0) \cdot \frac{\Sigma \mu_i K_i}{\Sigma \mu_i}\,.$$

Dacă notăm:

$$K = \frac{\sum_1^n \mu_i K_i}{\sum_1^n \mu_i}$$

sistemul (5) devine sistemul (2) şi proprietatea e demonstrată.

Observare: Dacă luăm $m = 3$ şi cele trei puncte A_i, B_i, C_i coplanare obţinem proprietatea D-lui GOORMAGHTIGH.

AURELIU PÂRVU.

38. *Proprietăţi în legătură cu cubica lui* DARBOUX.

Fie P un punct în planul triunghiului T de referinţă, situat pe cubica lui DARBOUX a lui T, T_1 triunghiul său podar şi T′ triunghiul antipodar al lui P. Triunghiurile T şi T_1 sunt omologice prin chiar definiţia cubicei D. Deasemenea sunt omologice triunghiurile T şi T′, cum uşor se poate demonstra. Rezultă de aici că P aparţine şi cubicei lui DARBOUX a triunghiului T′. Considerând pe $T_2, T_3 \ldots T_n$ ca podare ale lui P în triunghiurile $T_1, T_2 \ldots T_{n-1}$ şi pe $T'', T''' \ldots T^{(n)}$ ca antipodare ale lui P în triunghiurile $T, T'' \ldots T^{(n-1)}$, proprietatea se poate încă enunţa sub forma remarcabilă: Cubicele DARBOUX ale triunghiurilor $T, T_1, T_2 \ldots T_n, T', T'' \ldots T^{(n)}$ sunt concurente în P. Deci orice proprietate a grupei (T, P, T_1) se poate extinde la grupa (T', P, T) şi analoagele şi reciproc.

* * *

Proprietatea cunoscută: cevienele lui P în T, determină în T_1 picioarele a trei ceviene concurente, se poate transforma: cevienele lui P în T′ determină pe laturile triunghiului de referinţă, puncte de aceeaş natură. [Problema propusă 3646 — 2. „G. M.“ N. G. BOTEA].

Deasemenea găsim proprietăţile:

$\mathfrak{T}_2$ fiind izotomicul triunghiului T_2 înscris în T_{10} se proectează vârfurile triunghiului $\mathfrak{T}_2$ pe câte două laturi corespunzătoare ale triunghiului T; dreptele ce unesc proecţiile aceluiaş punct, formează un triunghiu omologic cu T_1.

Perpendicularele din vârfurile triunghiului T pe laturile corespunzătoare ale triunghiului T_1, taie cercurile trecând respectiv prin câte două vârfuri ale triunghiului T_1 şi prin simetricul lui P în raport cu mijlocul laturei triunghiului T_1 considerate, în puncte ale căror tangente formează un triunghiu omologic cu T_1.

[Deduse din articolul: „Demonstraţiuni geometrice pentru câteva proprietăţi găsite pe cale de transformare", R. M. T. IX—85: CEZAR COŞNIŢĂ].

* * *

Chestiunea nu este limitată la aceste câteva exemple.

N. N. MIHĂILEANU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ŞTIINŢE

Secţia Matematici

Sesiunea Octomvrie 1932

ANUL PREPARATOR

ALGEBRĂ ELEMENTARĂ

Algebră

Se dă ecuaţia:

$$(x - a)(x - b) - c^2 = 0.$$

1°. Să se arate că ea are rădăcinile reale oricare ar fi a, b, c (reali).

2°. Notând cu x_1 şi x_2 aceste rădăcini şi presupunând $a < b$ să se arate că avem $x_1 < a$ şi $x_2 > b$.

3°. Să se determine c în funcţie de a şi b aşa ca să avem

$$x_1 = a - 2c \quad \text{şi} \quad x_2 = b + 2c.$$

4°. Ca o aplicaţie la acest caz, să se găsească ce valori trebue să ia a şi b pentru ca să avem $x_1 = \frac{7}{3}$ şi $x_2 = \frac{2}{3}$.

5°. Să se formeze trinomul de gradul al doilea care se anulează pentru aceste valori şi să se construiască parabola ce o reprezintă grafic acest trinom.

Trigonometrie

Intr'un triunghiu isoscel ABC avem $\hat{B} = \hat{C}$. Se duce bisectoarea CD a unghiului C, precum şi înălţimea CE corespunzătoare laturii AB. Ştiind că avem CD = 3 cm şi că CE împarte unghiul DCB în două părţi egale să se rezolve triunghiul.

Mecanică

Două scânduri AB şi AC de aceeaş lăţime şi grosime sunt fixate solid una de alta în A unde formează un unghiu drept. In A se aplică o greutate P de 35 kgr. Intreg sistemul se reazimă pe un plan orizontal în B şi C.

1°. Să se determine presiunile verticale exercitate în B şi C asupra planului, ştiind că 1 m de scândură cântăreşte 5 kgr., AB = 4 m şi AC = 3 m.

2°. Să se determine poziţia centrului de greutate G al corpului format din cele două scânduri AB, AC şi de greutatea P situată în A.

GEOMETRIE ELEMENTARĂ

Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul cu centrul în O. Tangenta în A la acest cerc tae pe BC în M. Dreapta OM tae cercul O în B' şi C', iar cercul de diametru OA în M'.

1°. Să se arate că $MB' \cdot MC' = MO \cdot MM' = \overline{AM}^2$, şi că perechile de puncte (B', C') (O, M') formează o involuţie cu punctul central M.

2°. Din triunghiurile dreptunghice OAM' şi B'AC', să se deducă $M'O \cdot M'M = M'B' \cdot M'C'$.

3°. Să se arate că AM' este polara lui M în raport cu cercul O. Insemnând cu D intersecţia lui AM' cu BC, să se arate că (MM'C'B') = (MDCB) şi de aci că dreptele BB', CC', AM' sunt concurente.

MATEMATICI ELEMENTARE

Aritmetică

O persoană a pus la dobândă două capitaluri, unul cu 4,50% şi altul cu 5%; al doilea capital e 8/11 din cel dintâiu. Capitalurile cu dobânzile lor după 12 ani şi 7 luni formează suma de lei 98.000. Să se calculeze valorile capitalurilor cari au fost puse la dobândă.

Trigonometrie

1. Să se rezolve un triunghiu care are baza $a = 45$, suma celorlalte două laturi $b + c = 56{,}674$ şi înălţimea $h = 16$.

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

ANUL I

MATEMATICI GENERALE

Proba teoretică

1. Fiind date ecuațiile dreptelor

$$(D_1)\ \begin{cases} 3x + \alpha y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 5y + z - \alpha = 0 \end{cases}$$

$$(D_2)\quad \frac{x+1}{3} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+2}{5},$$

să se determine pentru cari valori ale parametrului α sunt aceste drepte concurente.

2. Să se desvolte în seria MACLAURIN funcțiunea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}.$$

3. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}\, y + e^x = 0.$$

Proba practică

Să se determine cu 3 zecimale exacte valoarea integralei definite

$$\int_{-1}^{+1} \frac{4x^3 + 11x^2 + 25x + 14}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx.$$

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

Proba teoretică

1. Să se determine polinomul de gradul al treilea de forma:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \frac{\alpha\beta}{11},$$

în care α și β sunt niște cantități reale, știind că ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile sale în progresie aritmetică, iar ecuația $P(x) = \frac{35}{216}$ are rădăcinile în progresie geometrică. Să se determine complect acele rădăcini.

2°. Polinomul fiind $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ să se arate pentru cari valori ale lui λ ecuația $P(x) = \lambda$ are 3 rădăcini reale.

Proba practică

Să se studieze variația funcției y definită de

$$xy^2 = x^3 + 2$$

și să se construiască curba reprezentativă.

GEOMETRIA ANALITICĂ

Proba teoretică

Se dau două axe perpendiculare Ox și Oy și punctul $A(o, a)$.

1°. Să se scrie ecuația generală a iperbolelor tangente în origină la bisectoarea unghiului xOy, trecând prin punctul A și având axa Ox ca direcție asimptotică.

2°. Să se găsească și să se construiască locul centrelor acestor iperbole.

3°. Să se scrie ecuația asimptotei neparalelă cu Ox a uneia din iperbolele considerate.

4°. Să se arate, că dacă iperbola variază, prin fiecare punct al planului rec două asimptote de felul acesta. Să se caute locul punctelor unde aceste două asimptote sunt perpendiculare și locul punctelor unde aceste două asimptote sunt confundate.

Proba practică

Să se construiască curba:

$$y^2 (x - 1) = x^3 + 2x.$$

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Să se determine intersecția cilindrului C_1 cu directoarea în planul orizontal cercul de centru γ_1 (118, 53, 0) și raza $R_1 = 38$, generatoarele fiind paralele cu dreapta ST $\{$ S (222, 196, 178), T (19, 87, 0) $\}$ cu conul C_2 cu vârful în S și cu directoarea în planul orizontal, cercul cu centrul în γ_2 (285, 62, 0) și raza $R_2 = 40$.

ANUL II

ANALIZĂ MATEMATICĂ p. I

Proba teoretică

1. Se consideră curba:

$$\rho = \theta^2 + a\theta + b.$$

1°. Să se determine constantele a și b în așa fel ca tangenta la curbă pentru $\theta = \pi$ să fie perpendiculară pe raza vectoare și staționară.

2°. Fie curba (c) astfel definită. Să se construiască.

3°. Să se determine centrul de curbură şi raza de curbură într'un punct oarecare al curbei (c).

2. Se consideră ecuaţia cu derivate parţiale

$$(1) \qquad x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

1°. Ce devine această ecuaţie când se face schimbarea de variabile

$$x = \frac{uv}{1+u} \quad , \quad y = \frac{v}{1+u}.$$

2°. Să se deducă integrala generală a ecuaţiei (1).

Proba practică

1°. Să se arate cum se poate calcula integrala:

$$\int \sqrt[n]{\frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}} \cdot \frac{dx}{\sin 2x}.$$

2°. Să se efectueze toate calculele în cazul:

$$n = 3,\ a = c = 1,\ b = -1,\ d = 8.$$

MECANICĂ RAŢIONALĂ p. I

Proba teoretică

I. Traectoria unui mobil M este curba (C) reprezentată în coordonate semi-polare prin ecuaţiile:

$$(C) \qquad r = a(1+\cos\theta) \quad , \quad z = 4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

1°. Ştiind că mişcarea punctului este uniformă să se determine legea mişcării. La momentul iniţial $t = 0$ poziţia mobilului este dată de $\theta = 0$. Viteza aste egală cu $8a$.

2°. Fie M' proecţia lui M pe planul xoy şi ON perpendiculara pe OM' situată în planul xoy dirijată în sensul în care θ creşte. Să se calculeze componentele vitezii şi acceleraţii lui M pe axele OM', ON, Oz în funcţie de θ.

3°. Din expresia acceleraţiei să se deducă raza de curbură în M în funcţie de θ.

II. Un punct material M de massă egală cu 1 este obligat să se mişte pe curba (C). El este atras de axa Oz cu o forţă $\frac{3a^5}{r^4}$. La momentul iniţial $t = 0$ poziţia este dată de $\theta = 0$, iar componentele vitezii iniţiale pe Ox, Oy, Oz sunt $0, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

1°. Să se determine legea mişcării.

2°. Să se calculeze componentele reacţiunii pe Ox, Oy, Oz.

3°. Să se calculeze reacţiunea normală.

Proba practică

Se consideră un sistem material, format dintr'o bară AB articulată în B cu un disc BCD. Se presupune că baza AB este infinit subţire, omogenă şi grea. Lungimea ei este a. Ea are extremitatea A fixă. Discul BCD are forma unui sector de cerc de rază a, unghiul dela vârf fiind de 120°. Se presupune că acest disc este infinit subţire omogen şi greu. Bara şi discul sunt aşezate într'un plan vertical. Discul se reazimă fără frecare pe o vergea a acestui plan, care face cu planul orizontal un unghiu de 30°. Această vergea este la depărtarea a de A. Poziţia ei faţă de bară şi de disc este indicată pe figură.

1°. Să se determine poziţia de echilibru a acestui sistem, precum şi reacţiunile.

2°. Să se găsească poziţia de echilibru a sistemului, aplicând teorema travaliului virtual.

Notă. Se va nota cu P greutatea barei şi cu Q greutatea discului.

ASTRONOMIE

1. Înălţimile aparente a două stele sunt egale respective cu 48°0'49" şi 70°34'9". Distanţa lor aparentă e 58°8'48", iar refracţia e dată de formula $\theta = 60'',6\,\mathrm{tg}z$. Să se calculeze diferenţa dintre azimutele acestor stele şi distanţa adevărată dintre ele.

2. Excentricitatea unei planete fiind egală cu $\frac{1}{4}$, să se calculeze anomalia adevărată şi anomalia mijlocie, care corespund la o anomalie excentrică egală cu 40°17'35".

ANUL III

ANALIZĂ MATEMATICĂ p. II

Proba teoretică

1. Se consideră o curbă (C) în planul xOy, într'un punct M al ei se duce tangenta MT la această curbă care tae pe ox în T, perpendiculara în T pe MT întâlneşte paralela la oy dusă din M în punctul P. Fie C centrul de curbură corespunzător lui M. Dreapta PC tae pe Ox în Q.

1°. Să se determine curba (C) astfel ca Q să fie fix de obscisă h.

2°. Să se determine curba (C) astfel ca abscisa lui Q să fie a^2x, x fiind abscisa lui M.

2. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$(1 + x^2)\,y' - 4xy^2 - 2x(4x^3 + 3)\,y - 4x^3(x^2 + 1) = 0.$$

Proba practică

1. Să se integreze ecuaţia :

$$2z = px - qy - q^2.$$

2. Să se calculeze volumul cuprins între planul xOy şi suprafeţele $z = y^2$ şi $x^2 + y^2 = 1$.

MECANICA RAŢIONALĂ p. II

Proba teoretică

Se consideră axele $Oxyz$ dreptunghiulare, Oz fiind verticala descendentă. Un sistem material este format din barele omogene şi identice AB şi BC de lungime l. Aceste bare sunt articulate în B, iar punctele A şi C sunt obligate să se mişte fără frecare pe Oz. Să se observe că acest sistem depinde de 3 parametrii, se pot alege parametrii u, φ, θ; $u = OD$, φ egal cu unghiul ABD, D fiind mijlocul lui AC, iar θ este unghiul pe care planul ABC îl face cu planul xOz

1°. Să se calculeze forţa vie a sistemului.

2°. Să se scrie ecuaţiile mişcării sistemului aplicându-se ecuaţiile lui LAGRANGE.

3°. Să se interpreteze aceste ecuaţii cu ajutorul teoremelor generale şi să se reducă integrarea lor la cuadraturi.

Proba practică

Se dă un solid omogen, care are forma unui tetraedru OABC ale cărui muchii $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ sunt dreptunghiulare.

1°. Să se determine elipsoidul de inerţie a acestui solid relativ la punctul O.

2°. Se presupune $a = b = c = 2\sqrt{2}$ şi că acest tetraedru este greu şi se roteşte în jurul dreptei OL presupusă orizontală. Această dreaptă are în raport cu axele OA, OB, OC cosinuşii directori $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$.

Să se calculeze lungimea pendulului sincron.

TEORIA FUNCŢIILOR

Proba teoretică

I. Se dă funcţiunea $f(z)$ meromorfă în domeniul (C). Să se arate că funcţiunea

$$\frac{f''(z)}{f(z)}$$

nu poate avea în (C) alte puncte singulare decât poli, cari sunt chiar polii şi în general zerurile funcţiunii $f(z)$ şi anume:

1°. Un pol al lui $f(z)$ este pol dublu pentru

$$\frac{f''(z)}{f(z)}.$$

2°. Un zero de ordin mai mare ca unu al lui $f(z)$ este şi el pol dublu pentru $\frac{f''}{f}$.

3°. Un zero simplu al lui $f(z)$ este pol simplu pentru $\frac{f''}{f}$, dacă nu anulează pe f''.

4°. Să se verifice rezultatul pentru $f(z) = z \sin z$.

5°. Să se calculeze în acest caz integrala:

$$\int_{(\Gamma)} \frac{f''(z)}{f(z)}\, dz$$

luată dealungul cercului (Γ) cu centrul în punctul 5π şi de rază $\frac{13\pi}{2}$.

II. $F(z)$ fiind o funcţie analitică să se arate că şi $\operatorname{Log} F(z)$ este o funcţie analitică punându-se în evidenţă partea reală şi cea imaginară a acestei funcţiuni.

2°. Ca aplicaţie să se determine funcţia analitică $F(z)$ când se dă modulul ei $|f(z)| = R(x, y)$.

3°. Să se aplice la cazul $|f(z)|^2 = (x^2 + y^2)\, e^{2(x^2 - y^2)}$.

4°. Să se figureze curba pe care o descrie $Z = f(z)$ când z descrie bisectoarea întâia a axelor de coordonate. Se va scrie ecuaţia acelei curbe în coordonate polare.

5°. Se duce o semidreaptă nedefinită trecând prin origine, de coeficient unghiular m. Se întreabă către ce valori tinde $f(z)$ când z se îndepărtează la infinit dealungul acestei drepte. Se va discuta rezultatul după diferitele valori ce le poate lua m.

Proba practică

Să se calculeze integralele definite

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z^3 - 1} \quad \text{şi} \quad \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{(z^3 - 1)^2}.$$

GEOMETRIE INFINITESIMALĂ

Raza de curbură. Studiu geometric.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVIII. No. 12. Decemvrie 1932. New York. Sumabilitatea lui CESARÒ a seriilor duble, de M. GURNEY. Rezultate şi probleme asupra *n* ţesături de curbe în plan, de W. BLASCKE. Soluţia problemei lui ZARANKIEWICZ, de E. W. MILLER. O proprietate relativă la complectabilitate, de J. H. ROBERTS. Exemple de funcţiuni armonice, de A. J. MARIA. Notă asupra relaţiunilor dintre integralele eliptice şi seriile lui SCHLÖMILCH, de W. R. BENNET. Asupra unui sistem dinamic cu puncte ale lui PEANO, de M. CHARPENTIER. Asupra a *n* ţesături de curbe în plan, de G. BOL. Asupra derivării condiţiunilor necesare pentru problema lui BOLZA, de G. A. BLISS şi I. J. SCHOEMBERG. Soluţiuni periodice ale ecuaţiilor diferenţiale lineare, de W. B. FITE. Transformări asociate cu liniile unui complex cubic, cuadratic sau linear, de I. O. HORSFALL. Notă asupra gradientului funcţiunii lui GREEN, de G. C. EVANS. Asupra soluţiunilor aproximative ale ecuaţiilor diferenţiale lineare cu condiţiuni de limite, de W. H. MC. EWEN. Formulă de adunare pentru funcţiunile hipereliptice, de W. V. PARKER. O corecţiune în lista numerelor prime *(List of primes,* publicată la 1914 de institutul CARNEGIE din Washington, în care trebue scris 628051 în loc de 628151), de D. N. LEHMER.

Mathesis. Tomul XLVII. No. 1 Ianuarie 1933. Gembloux. Asupra bicuadraticelor strâmbe, de CL. SERVAIS. Asupra numerelor terminate cu patrate şi cuburi, de V. THÉBAULT. Notă asupra tetraedrului, de F. BACKES. Asupra proprietăţilor infinitesimale ale afinităţii complexe, de R. GOORMAGHTIGH. Exerciţii de geometrie vectorială, de AD. M. Hipocicloida lui STEINER şi ortopolul, de R. GODEAU.

Journal de Mathématiques Élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 57. No. 8 Ianuarie 1933. Paris.

Idem. No. 9. Februarie 1933. Paris.

J. REY PASTOR. *Boletin del Seminario matematico.* Vol. III. (1932—1933) Decemvrie 1932. No. 11. Buenos Aires — Madrid. Diverse criterii de convergenţă ale integralelor simple şi câteva teoreme asupra integralelor duble, de C. BIGGERI. Câteva proprietăţi ale funcţiunilor determinante. Abscise de convergenţă, de C. BIGGERI. Singularităţi ale funcţiunii definite prin integrala D, de C. BIGGERI. Asupra unei familii de serii deduse din seria armonică, de J. BABINI.

Boletin Matematico. Anul V. No. 10. Decemvrie 1932. Buenos Aires. Determinarea analitică a încovoierii totale a unei curbe regulate, de J. VARELA GIL. Congresul internaţional al matematicianilor.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XVIII. Decemvrie 1932. Iaşi. EVARISTE GALOIS, de P. V. CAZANACLI.

Natura. Anul XXII. No. 2. Februarie 1933 Bucureşti. Din trecutul învăţământului matematic la Românii din Ardeal. O carte de aritmetică din anul 1822, de ASCANIU CRIŞAN.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XII. No. 12. Februarie 1933. Timişoara. Aplicaţiuni ale calculului vectorial, de D. V. IONESCU.

C. C. TEODORESCU. *La corrélation statistique.* (Extras din *«Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timişoara»).* Timişoara 1932.

M. GHERMANESCO. *Sur l'ecuation de Bessel.* (Extras din *«Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timişoara»).* Timişoara 1932.

PETRE V. CAZANACLI. *Evariste Galois.* (Extras din *Revista ştiinţifică «V. Adamachi»)* Iaşi 1932.

N. BOTEA. *Sur un théorème de* M. POMPEIU. (Extras din Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique „Roi Charles II"). Bucureşti 1933.

N. N. GANEA. *Calculul betonului armat.* Vol. III. Bucureşti 1933.

CERERI

Răspuns la cererea No. 53 din Anul XXIV pag. 117. NICOLAE CERCEL (din Meţovul Macedoniei) a studiat la început cu BALAN VLASOPOL şi apoi la Veneţia; a vizitat multe capitale europene. El ştia greceşte, latineşte, franţuzeşte şi italieneşte. A profesat mai întâiu 10 ani la Tricala, apoi la Muntele Athos şi în fine la Academia Domnească din Iaşi, unde a murit în 1773. Se zice că a fost şi Director al Academiei. Fiind în Iaşi, a colaborat la marea enciclopedie greacă *«Thesaurus linguae grecae»* (C. ERBICEANU. In Memoriile secţiunii istorice ale Academiei române. Tomul XXVII, pag. 159).

P. SERGESCU.

Răspuns la Cererea No. 106 din Anul XXIX pag. 96. Cred că epitetul *«gheometru»* aplicat lui DANTE de ANATOLE FRANCE e o figură literară: *«spirit geometric»* e un anume fel de a concepe lucrurile şi nu implică cunoştinţe propriu zise matematice.

P. SERGESCU.

Răspuns la Cererea No. 17 din Anul XXX pag. 298. Date despre I. PANDELE se găsesc în articolele publicate de regretatul TRAIAN LALESCU despre S. MARCOVICI în Anul XXII.

P. SERGESCU.

DIVERSE

Societatea Română de ştiinţe, Secţia matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 6 Februarie. A făcut o comunicare D-l inginer CRISTEA MATEESCU despre calculul plăcilor elastice în consolă şi D-l C. DRÂMBĂ despre curbe loxondrome pe o suprafaţă.

In şedinţa din seara de 20 Februarie, D-l N. CIORĂNESCU a făcut un referat asupra ultimelor lucrări de analiză, D-l V. VÂLCOVICI o comunicare asupra mişcării unui corp solid şi D-l LUCA TEODORIU asupra distribuţii iuţelelor şi acceleraţiilor în mişcarea unui corp solid.

D-l P. SERGESCU în timpul şederii la Bruxelles în cursul lunei lanuarie, a vorbit la *Institut des hautes études de Belgique* despre funcţiile univalente şi la Societatea matematică belgiană despre Desvoltarea matematicilor în anticitate şi evul mediu, unde a fost proclamat membru de onoare al Societăţii. In zilele de 24 — 26 lanuarie D-sa a fost la Poitiers, unde a vorbit despre matematicile contimporane în Franţa. Universitatea din acel oraş serbează anul acesta al cincilea centenar. La 1 Februarie D-l P. SERGESCU a vorbit la Institutul de Istoria ştiinţelor dela Sorbona despre matematicile în România în Secolul XVIII şi al XIX, unde a pus în evidenţă şi rolul pe care l'a avut *Gazeta Matematică* în desvoltarea matematicilor române. Mai adăogăm că D-l P. SERGESCU a fost ales membru străin al Academiei Massarik din Praga, secţia I ştiinţe pure.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3649. *Se consideră toate cercurile* (C) *care trec prin punctele fixe* F_1 *şi* F_2 *şi care taie în* M *o dreaptă fixă paralelă cu* F_1F_2. *Se cere învelitoarea tangentei în* M *la cercurile* (C).

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie geometrică, dată de D-nii: U. M. FLORESCU (Şc. Politecnică din Bucureşti); S.-LT. TH. N. PANAIT (Student, Bucureşti) şi P. IGNAT (Lc. militar, Iaşi).

Fie MT tangenta în M la (C). Se vede pe o figură că dacă N este a doua intersecţie a lui Δ cu (C), atunci

$$\sphericalangle NMF_1 = \sphericalangle MF_1F_2$$

ca alterne interne, şi

$$\sphericalangle MF_1F_2 = \sphericalangle F_2MT$$

ca având aceiaşi măsură. Deci

$$\sphericalangle NMF_1 = \sphericalangle F_2MT$$

de unde rezultă, după reciproca teoremei lui PONCELET, dreapta MT rămâne tangentă unei elipse cu focarele în F_1, F_2 şi tangentă la Δ. Această elipsă este învelitoarea căutată.

Soluţie analitică, dată de D-nii: E. M. CAŢICHI; I. C. VASILIU (Şc. Politecnică, Bucureşti); C. COŞNIŢĂ (Bârlad); A. ARŞAVSKI (Student); S.-Lt. I. C. SAVIN; N. T. DINULESCU (Dolj); I. Z. PANŢU (Bacalaureat, Bucureşti) şi N. N. MIHĂILEANU (Constanţa).

Luăm ca axe pe F_1F_2 şi perpendiculara în O, mijlocul lui F_1F_2. Fie C $(0, \lambda)$ centrul lui (C) şi F_1 $(c, 0)$, F_2 $(-c, 0)$ iar b distanţa dela O la Δ. Cu acestea ecuaţiile lui Δ şi (C) sunt

$$y - b = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - c^2 = 0.$$

Rezolvând acest sistem găsim M $[\pm \sqrt{c^2 + 2\lambda b - b^2}\ ,\ b]$ aşa că ecuaţia în M la (C) va fi

$$(1)\quad \varphi(\lambda) = \pm x\sqrt{c^2 + 2\lambda b - b^2} + y(b - \lambda) - b\lambda - c^2 = 0$$

$$\therefore\quad (2)\quad \varphi'_\lambda(\lambda) = \frac{\pm bx}{\sqrt{c^2 + 2\lambda b - b^2}} - (y + b) = 0.$$

Eliminând pe λ între (1) şi (2) se găseşte învelitoarea cerută. Pentru eliminare, împărţim pe (1) cu (2), după ce se trec în membrul II termenii care nu conţin radicali şi se găseşte

$$bx^2 = (y + b)[\lambda(y + b) + c^2 - by]$$

$$\therefore\quad \lambda = \frac{bx^2 + (by - c^2)(y + b)}{(y + b)^2}.$$

Ducând această valoare în (2) şi efectuând calculele găsim

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2)y^2 - b^2(b^2 + c^2) = 0,$$

sau notând pe $b^2 + c^2$ prin a^2 găsim că învelitoarea cerută este elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

având focarele în F_1, F_2 şi fiind tangentă la Δ.

Notă. 1°. D-l AD. C. GHEORGHIU a trimis o foarte frumoasă soluţie geometrică generalizând problema. D-sa înlocueşte cercul prin o conică care trece prin 2 puncte F_1, F_2 iar dreapta Δ prin o dreaptă care face un unghiu oarecare cu F_1F_2.

Problema se poate generaliza mai mult înlocuind dreapta Δ cu o curbă Γ.

Generalizarea D-lui Ad. C. Gheorghiu se va publica sub formă de notă sau articol, după ce se va publica soluţia problemei 2539 propusă la pagina 288 Vol. XXII.

2°. Un caz particular interesant este când F_1, F_2 se confundă într'un punct F. In acest caz $c = 0$ şi învelitoarea este cercul

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0,$$

ceeace se vede imediat şi geometric, căci, deoarece

$$\sphericalangle NMF = \sphericalangle FMT$$

FM este bisectoara unghiului NMT şi deci F este egal depărtat de Δ şi MT. Prin urmare MT rămâne tangentă cercului cu centrul în F şi cu raza b.

Gh. B.

PROBLEMA 3921. *Se cer fracţiile* $^m/_n$, *a căror rădăcină patrată cu aproximaţie de 0,001 prin adaos să fie* $^m/_{10}$.

M. P. Chiţu.

Enunţul ne conduce la rezolvarea în numere întregi a neegalităţilor :

$$(1) \qquad \frac{m}{10} - \frac{1}{1000} < \sqrt{\frac{m}{n}} < \frac{m}{10},$$

din care prin ridicare la patrat şi calcule elementare deducem :

$$(2) \qquad \frac{100}{m} < n < \frac{10^6 m}{(100\,m - 1)^2},$$

n fiind un număr întreg. Inegalitatea

$$\frac{10^6 m}{(100\,m - 1)^2} < 1$$

sau

$$(3) \qquad 10^4 m^2 - (200 + 10^6)\,m + 1 > 0$$

ne arată că nu putem avea soluţiuni pentru $m > 100$.

Să considerăm diferenţa :

$$(4) \quad d = \frac{10^6 m}{(100\,m - 1)^2} - \frac{100}{m} = \frac{2 \cdot 10^4 m - 100}{m(100\,m - 1)^2} < \frac{20000}{(100\,m - 1)^2}.$$

Dacă $m > 4$ avem : $d < 0{,}1$.

Deci pentru $m > 4$, n este un număr întreg, cuprins între două numere a căror diferenţă este mai mică decât 0,01.

Pentru $m = 1$ deducem :

$$100 < n < 102{,}03.$$

Deci vom avea soluțiunile:

$$\frac{1}{101}\ ,\ \frac{1}{102}$$

Dacă $m = 2$ avem: $50 < n < 50{,}5$.

Nu avem deci soluțiuni în acest caz. Aceleași concluzii se deduc în cazurile

$$m = 3 \quad \therefore \quad 33{,}3 < n < 33{,}5$$

$$m = 4 \quad \therefore \quad 25 < n < 25{,}1.$$

Pentru $100 > m > 4$, ținând seama că $d < 0{,}1$, vom putea scrie

$$\frac{100}{m} < n < \frac{100}{m} + \frac{1}{10}$$

și deci vom putea forma tabloul:

m	100	53	50	35	34	26	25	21	20
$\frac{100}{m}$	$\leqslant 2$		< 3		$\leqslant 4$		$\leqslant 5$		
$\frac{100}{m} + \frac{1}{10}$	< 2	< 3		< 4			< 5		< 6

m	20	17	16	15	14	13	12	11
$\frac{100}{m}$	< 6	< 7		7,1		7,6	8,3	9,0
$\frac{100}{m} + \frac{1}{10}$	< 6	< 7		7,2		7,7	8,4	9,1

m	10	9	8	7	6	5
$\frac{100}{m}$	10	11,1	12,5	14,2	16,6	20
$\frac{100}{m} + \frac{1}{10}$	10,1	11,2	12,6	14,3	16,7	20,1

Acest tablou ne arată că am mai putea avea soluțiuni, numai pentru

$$m = 51 \ , \ m = 52 \ , \ m = 34.$$

Găsim în aceste cazuri:

$$m = 51 \quad \therefore \quad 1{,}9\ldots < n < 1{,}9\ldots$$

$$m = 52 \quad \therefore \quad 1{,}9\ldots < n < 1{,}9\ldots$$

$$m = 34 \quad \therefore \quad 2{,}9\ldots < n < 2{,}9\ldots$$

Deci nu avem alte soluțiuni afară de cele două găsite mai sus.

Observare. D-l C. I. Năforniță a ghicit soluția $\frac{m}{n} = \frac{1}{101}$, iar D-l I. G. Popa, afirmă că problema admite o infinitate de soluții!

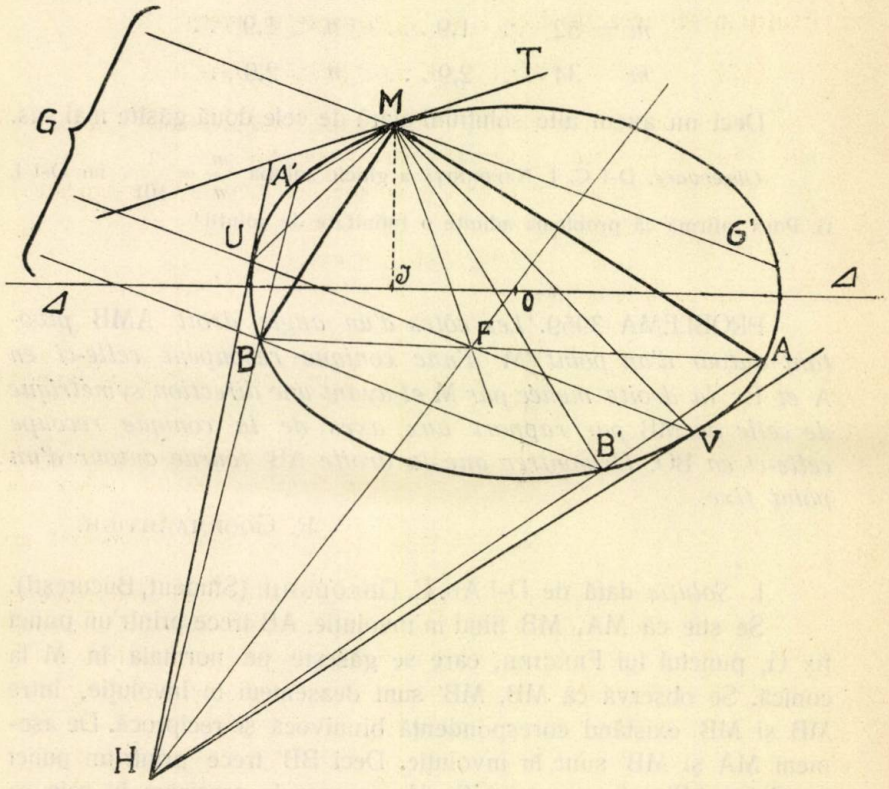
PROBLEMA 3959. *Les côtés d'un angle droit* AMB *pivotant autour d'un point* M *d'une conique recoupent celle-ci en* A *et* B; *la droite menée par* M *et ayant une direction symétrique de celle de* MB *par rapport aux axes de la conique recoupe celle-ci en* BO. *Démontrer que la droite* AB′ *tourne autour d'un point fixe.*

R. Goormaghtigh.

I. *Soluție* dată de D-l Ad. C. Gheorghiu (Student, București).

Se știe că MA, MB fiind în involuție, AB trece printr'un punct fix G, punctul lui Frégier, care se găsește pe normala în M la conică. Se observă că MB, MB′ sunt deasemeni în involuție, între MB și MB′ existând corespondență biunivocă și reciprocă. De asemeni MA și MB′ sunt în involuție. Deci BB′ trece printr'un punct fix G iar AB′ prin un punct fix H, pe care le precizăm în cele ce urmează. Conica (C) și dreptele MB, MB′ fiind simetrice față de perpendiculara MI la axa Δ a conicei, determină un fascicol punctual de conice conținând un cerc; M fiind pe conică (C), cercul e tangent în M la (C). Deci MB variind, punctul B′ e intersecția conicei (C) cu cercul trecând prin B, M și tangent în M la (C). Centrele acestor cercuri sunt pe normala în M la (C). La limită BB′ și tangenta în M la (C) au direcții simetrice față de MI, deci BB′ devine MG′ la limită. Prin urmare BB′ are o direcție fixă, simetrică tangentei în M la (C). Punctul fix G se găsește la infinit pe MG′.

Cercul cu centrul în F şi tangent în M la (C) taie conica în U şi V. Dacă A vine în U, B vine în V şi B′ vine tot în U; deci în acest caz AB′ este tangenta în U la (C). Analog tangenta în V la (C) este o dreaptă AB′. Prin urmare punctul H, intersecţia acestor tangente este punctul fix prin care trece AB′.



Se observă că FG este polara lui H şi cum HF trece prin centrul conicei, triunghiul FGH este conjugat faţă de (C).

II. *Soluţie* şi *generalizare,* date de D-l C. Coşniţă (Bârlad).

Consider cazul când Δ nu este o axă a conicei, ci este o dreaptă oarecare din plan. Fie *m, m′, k, n* coeficienţii unghiulari ai dreptelor MA, MB, Δ, MB′. Conform construcţiilor indicate de enunţ putem scrie următoarele relaţii

$$1 + mm' = 0$$

$$\frac{K - m'}{1 + Km'} + \frac{K - n}{1 + Kn} = 0.$$

Eliminând pe m' între aceste relaţii se găseşte

$$(1) \qquad (1 - K^2)\, mn - 2k\,(m + n) + K^2 - 1 = 0,$$

care este o relaţie involutivă între coeficienţii dreptelor MA, MB', deci după teorema lui FRÉGIER dreapta AB' trece prin un punct. Pentru precizarea lui facem în (1) $n = m$ şi avem

$$(2) \qquad (1 - k^2)\, m^2 - 4Km - (1 - K^2) = 0.$$

Tangentele în punctele unde razele duble retaie conica, se taie chiar în punctul fix H prin care trece AB'.

In cazul când Δ e o axă a conicei şi conica e raportată la axe atunci

$$k = 0 \quad \text{sau} \quad K = \infty$$

şi (2) se reduce la

$$m^2 - 1 = 0$$

care arată că razele duble sunt chiar bisectoarele axelor de simetrie ale conicei.

Observaţiuni. 1°. D-l G. ST. ROŞCA a trimis o foarte bună şi complectă soluţie geometrică şi generalizare cu ajutorul transformărei prin polare reciproce.

2°. D-l M. MARGULIUS (Bucureşti) a trimis o soluţie geometrică mai puţin riguroasă.

3°. Comparând soluţiile I şi II se vede că, în afară de generalizare, ele diferă numai prin aceea că în soluţia I se demonstrează geometric că dreptele MA, MB' sunt în involuţie, pe când în soluţia II această proprietate se demonstrează algebric.

GH. B.

PROBLEMA 4017. *Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei*

$$(1) \qquad \lambda^2 (\lambda^2 x^2 - 2x + 1)^2 - (1 - x)(1 - \lambda^2 x)^3 = 0$$

λ *fiind un parametru pozitiv mai mic ca unu.*

Ca o consecinţă să se discute ecuaţia

$$(2) \qquad \cos\theta + \frac{\lambda\,(\cos 2\theta + \lambda^2 \sin^4\theta)}{(1 - \lambda^2 \sin^2\theta)\,\frac{3}{2}} = 0.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

Au dat soluţii foarte bune D-nii: ALEXE ARŞAVSCHI, STELIAN E. OLTEANU, VASILE VASU.

Făcând calculele ecuaţia (1) se poate scrie,

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^4 x^3 - \lambda^2 x^2 - x + 1) = 0.$$

Prin urmare avem de discutat ecuaţia

$$(3) \qquad f(x) = \lambda^4 x^3 - \lambda^2 x^2 - x + 1 = 0.$$

Regula semnelor dată de DESCARTES ne arată că ecuaţia (3) are două sau zero rădăcini pozitive şi o rădăcină negativă.

Pentru a preciza să considerăm ecuaţia

$$f'(x) = 3\mu^2 x^2 - 2\mu x - 1 = 0$$

care are rădăcinile $-\frac{1}{3\mu}$ şi $\frac{1}{\mu}$. Au notat pentru prescurtare

$$\mu = \lambda^2.$$

Formând şirul lui ROLLE al ecuaţiei (3) obţinem tabloul

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3\mu}$	$\frac{1}{\mu}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5}{27\mu}+1$	$1-\frac{1}{\mu}$	$+\infty$

Avem deci două cazuri.

1°. $\mu > 1$. *Ecuaţia (1) are o singură rădăcină reală mai mică decât* $-\frac{1}{3\mu}$.

2°. $\mu < 1$. *Ecuaţia (1) are 3 rădăcini reale: două pozitive, una în intervalul (0,1) şi alta mai mare decât* $\frac{1}{4}$; *una negativă mai mică decât* $-\frac{1}{3\mu}$.

Acest din urmă caz dă răspunsul la prima parte a problemii propuse.

Trecem la discuţia ecuaţiei (2). Pentru aceasta dacă facem în ecuaţia (1)

$$x = \sin^2\theta,$$

se obţine ecuaţia

$$\cos^2 2\theta = \frac{\lambda^2(\cos 2\theta + \lambda^2 \sin^4\theta)^2}{(1 - \lambda^2 \sin^2\theta)^3}.$$

Rădăcinile ecuației (2) sunt printre rădăcinile ecuației trigonometrice

$$\sin^2\theta = a \tag{4}$$

a fiind rădăcina, cuprinsă în intervalul (0,1), a ecuației (1). Rădăcinile ecuației (4) sunt $2k\pi \pm \theta_1$ și $2k\pi + \pi \pm \theta_1$, unde θ_1 este cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$ și soluție a ecuației (4), iar k fiind zero sau un întreg pozitiv sau negativ oarecare.

Pentru a vedea care din soluțiile ecuației (4) convin ecuației (2) trebuie să vedem semnul expresiunii

$$\varphi(x) = \cos 2\theta + \lambda^2 \sin^4\theta = \lambda^2 x^2 - 2x + 1,$$

când facem în ea

$$x = a.$$

Numărul a fiind soluție a ecuației (3) se găsește

$$\varphi(a) = -\lambda^4 a^3 - a < 0.$$

Deci dintre soluțiile ecuației (4) vom lua pe acele pentru cari $\cos\theta > 0$. *Pentru ecuația (2) avem deci soluțiile* $2k\pi \pm \theta_1$.

Observare. Discuția ecuației (1) pentru λ pozitiv și mai mic decât unu se putea face profitând de forma ecuației și substituind rădăcinile trinomului

$$\lambda^2 x^2 - 2x + 1 = 0.$$

PROBLEMA 4058. *Să se discute ecuația*

$$\operatorname{tg} 2\theta = \lambda \operatorname{tg} 3\theta + 3 \operatorname{tg}\theta,$$

când parametrul real λ *variază.*

Să se afle θ *cu o eroare* $< 1''$ *când* $\lambda = -3$.

N. C.

Soluție dată de D-l Gh. Șt. Roșca.

Ţinând seama de formulele care dau pe $tg2\theta$ şi $tg3\theta$ în funcţie de $tg\theta$ vom scri ecuaţia sub forma:

$$\frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} = \lambda \frac{3tg\theta - tg^3\theta}{1-3tg^2\theta} + 3tg\theta$$

şi gonind numitorii:

$$2tg\theta(1-3tg^2\theta) = \lambda(1-tg^2\theta)(3tg\theta - tg^3\theta) + 3tg\theta(1-tg^2\theta)(1-3tg^2\theta)$$

sau în definitiv:

$$tg\theta[(\lambda+9)tg^4\theta - 2(2\lambda+3)tg^2\theta + 3\lambda + 1] = 0.$$

Prima ecuaţie ne dă soluţia:

$$\theta = k\pi,$$

şi rămâne de discutat, ecuaţia bipatrată:

$$(\lambda+9)tg^4\theta - 2(2\lambda+3)tg^2\theta + 3\lambda + 1 = 0,$$

care rezolvată în raport cu $tg^2\theta$ ne dă

$$tg^2\theta = \frac{2\lambda + 3 \pm \sqrt{(2\lambda+3)^2 - (3\lambda+1)(\lambda+9)}}{\lambda+9}$$

$$= \frac{2\lambda + 3 \pm \sqrt{\lambda(\lambda-16)}}{\lambda+9}$$

şi deci

$$tg\theta = \pm\sqrt{\frac{2\lambda + 3 \pm \sqrt{\lambda(\lambda-16)}}{\lambda+9}}.$$

Realizantul acestei ecuaţii, considerată de gradul doi în raport cu $tg^2\theta$, este

$$R = \lambda(\lambda - 16).$$

El este pozitiv pentru $\lambda > 16$ sau $\lambda < 0$ şi negativ pentru $0 < \lambda < 16$.

Produsul rădăcinilor $tg^2\theta$ este $P = \frac{3\lambda+1}{\lambda+9}$. El este negativ pentru $-\frac{1}{3} > \lambda > -9$, şi pozitiv pentru celelalte valori ale lui λ.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Suma rădăcinilor $S = \frac{2(2\lambda + 3)}{\lambda + 9}$ este negativă pentru $-\frac{3}{2} > \lambda > -9$ și pozitivă pentru celelalte valori.

Discuția ecuației este dată în următorul tablou :

λ	R $\lambda(\lambda-16)$	P $\frac{3\lambda+1}{\lambda+9}$	S $\frac{2(2\lambda+3)}{\lambda+9}$	$tg^2\theta$	$tg\theta$
$-\infty$					
	+	+	+	Răd. reale, ambele pozitive	Patru rădăc. reale
-9					
	+	−	−	reale, una pozitivă și una negativă	două reale, două imag.
$-\frac{3}{2}$					
	+	−	+	idem	idem
$-\frac{1}{3}$					
	+	+	+	reale, ambele pozitive	patru reale
0					
	−	+	+	imaginare	imaginare
16					
	+	+	+	reale, ambele pozitive	patru reale
$+\infty$					

Pentru $\lambda = -3$, expresiunea rădăcinii, găsită mai sus devine :

$$tg\theta = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{57}}{6}} = \pm\sqrt{\frac{4,5498344353}{6}}$$

$$= \pm\sqrt{0,7583057392}$$

$$tg\theta = \pm\ 0,8708075$$

și calculând cu ajutorul logaritmilor găsim soluția generală :

$$\theta = k\pi \pm 41^0\ 02'58''\ \frac{7}{13}$$

Soluție bună dela D-l St. Brădățan (Suceava). Discuție bună, însă au considerat $\lambda = 3$ ca'n primul enunț : D-ra Mariana Abramescu și D-l St. Olteanu.

PROBLEMA 4182. *Se dă un cerc, diametrul* AOA′ *coarda* BB′ *perpendiculară pe* AA′ *şi punctul* P *exterior cercului. Dreptele* PB *şi* PB′ *mai taie cercul în punctele* C *şi* C′. *Se cunosc: raza* r *a cercului, distanţa* d *dela centrul* O *la coarda* BB′, *distanţa* p *dela centrul* O *la proecţiunea* P′ *a lui* P *pe dreapta* AOA′P′ *şi depărtarea* p′ *a lui* P *de această dreaptă.*

Se cere să se exprime în funcţiune de r, d, p, p′ *distanţa* CC′.

I. IONESCU.

Soluţiune dată de D-nii: IANCU N. SAGER (Profesor de matematici, Râmnicul Sărat), AVRAM N. CONSTANTIN (Sublocotenent din Geniu), CEZAR IVĂNESCU (Student, Iaşi), COSTIN N. TRUFINESCU (Elev Liceul Bălţi, clasa VII), ZIFF S. MARTIN.

Presupunem că coarda BB′ e de aceeaşi parte a centrului O ca şi A; în caz contrariu vom considera distanţa d ca negativă şi formula găsită va conveni şi acestui caz.

Triunghiurile PBB′ şi PCC′ sunt asemenea căci au unghiul din P comun iar cele din B şi C′ egale ca fiind ambele suplimentare unghiului CC′B. Avem dar relaţiunea:

$$CC'/BB' = PC/PB', \quad \therefore CC' = PC \times BB'/PB'. \qquad (1)$$

Prin P ducem dreapta PO care mai taie cercul în R şi R′. Secantele PCB, PRR′ duse din P la cerc ne dau:

$$PC \times PB = PR \times PR' = (PO - OR)(PO + OR')$$
$$= (PO - r)(PO + r) = \overline{PO}^2 - r^2.$$

Dar din triunghiul dreptunghic POP′ deducem:

$$\overline{PO}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PP'}^2 = p^2 + p'^2.$$

Inlocuind în relaţia precedentă găsim

$$PC \times PB = (p^2 + p'^2 - r^2).$$

Scoatem de aci pe PC şi îl ducem în (1). Găsim:

$$CC' = BB' \times (p^2 + p'^2 - r^2)/(PB \times PB'). \qquad (2)$$

Trebue dar să evaluăm lungimile BB′, PB, PB′ în funcţiune de r, d, p, p'. Fie I intersecţia lui BB′ cu AOA′, şi Q proiecţia lui P pe BB′. Avem:

$$BB' = 2BI = 2\sqrt{OB^2 - OI^2} = 2\sqrt{r^2 - d^2}.$$

$$\overline{BB}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{IP'}^2 + (IB - IQ)^2 = (OP' + OI)^2 + (IB - PP')^2$$

$$\therefore BP = \sqrt{(p + d)^2 + (\sqrt{r^2 - d^2} - p')^2}.$$

In mod analog găsim :

$$BP' = \sqrt{(p + d)^2 + (\sqrt{r^2 - d^2} + p')^2}.$$

Ultimele două expresiuni presupun Q între I şi B ; altfel expresiunea lui BP se aplică lui BP' şi invers. Inlocuind pe BB', BP, BP' din (2) cu valorile aci găsite, obţinem :

$$CC' = \frac{2(p^2 + p'^2 - r^2)\sqrt{r^2 - d^2}}{\sqrt{(p+d)^2 + (\sqrt{r^2 - d^2} - p')^2}\,\sqrt{(p+d)^2 + (\sqrt{r^2 - d^2} + p')^2}},$$

sau făcând unele calcule şi transformări la numitor găsim

$$CC' = \frac{2(p^2 + p'^2 - r^2)\sqrt{r^2 - d^2}}{\sqrt{(p + d)^4 + 2(p + d)^2(r^2 - d^2 + p'^2) + (r^2 - d^2 - p'^2)^2}}.$$

Aceasta este formula generală căutată.

Dacă P e pe diametrul AOA' atunci $p' = 0$, şi formula devine :

$$CC' = 2(p^2 - r^2)\sqrt{r^2 - d^2} / [(p + d)^2 + (r - d)^2].$$

Dacă P este pe BB' atunci $p = -d$ şi găsim $CC' = 2\sqrt{r^2 - d^2} = BB'$.

Dacă P e pe diametrul perpendicular pe AOA', atunci $p = 0$ şi avem :

$$CC' = 2(p'^2 - r^2)\sqrt{r^2 - d^2} / \sqrt{d^4 + 2d^2(r^2 - d^2 + p'^2) + (r^2 - d^2 - p'^2)^2}.$$

PROBLEMA 4198. *Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei*

$$z^3 - (a^2 + a + 1)z^2 + (a^3 - 1)z + (a^2 + a + 1) = 0,$$

când a *variază dela* $-\infty$ *la* $+\infty$.

I. Ionescu.

Să punem :

$$f(z) = z^3 - (a^2 + a + 1)z^2 + (a^3 - 1)z + (a^2 + a + 1).$$

Inlocuind pe rând z cu $-\infty$, $-1, 0, +1, a, (a+1)$ şi $+\infty$, găsim :

$$z = -\infty, -1, \quad 0 \quad, +1, a, (a+1), +\infty$$

$$f(z) = -\infty, -a^3, (a^2+a+1), +a^3, 1, \quad -a^3, +\infty.$$

Cum (a^2+a+1) este totdeauna pozitiv ca fiind $\frac{1}{4}[(2a+1)^2+3]$, rezultă că ecuaţia dată are totdeauna o rădăcină negativă, mai mică decât -1, dacă a este negativ şi mai mare ca -1, dacă a este pozitiv.

Cum $z = 0$ şi $z = +\infty$ fac $f(z) > 0$, şi cum dacă a este negativ, $f(1)$ este negativ, reese că ecuaţia dată are două rădăcini pozitive separate prin 1. Dacă însă a este pozitiv, atunci $f(a+1)$ este negativ şi prin urmare ecuaţia dată are două rădăcini pozitive separate prin $(a+1)$.

Conchidem dar că ecuaţia dată are totdeauna rădăcinile reale, una fiind negativă şi două pozitive.

ST. E. OLTEANU.
(Elev-Inginer)

*EXERCIŢII

24 Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată, să se scrie trei numere de câte trei cifre a căror sumă să fie maximă sau minimă.

V. THÉBAULT.

R. In primul caz cifrele cele mari vor fi mai spre stânga celor mai mici, în al doilea invers. In primul caz avem de exemplu numerele 963, 852, 741 iar în al doilea 147, 258, 369. Se găsesc toate soluţiile permutând între ele sutele, zecile şi unităţile.

25. Să se simplifice fracţia

$$\frac{x^6 - 2x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 14x^2 - 13x - 6}{x^6 - 8x^5 + 21x^4 - 15x^3 - 16x^2 + 23x - 6}.$$

GH. TH. GH.

R. Căutând cel mai mare comun divizor al polinoamelor dela numărător şi numitor, se găseşte că este

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$$

şi fracţia simplificată este

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2-3x+1}.$$

PROBLEME PROPUSE

*4231. Cu numerele prime până la 100 să se formeze o progresiune aritmetică cât mai lungă.

I. Ionescu.

4232. Să se determine n astfel încât expresiunea:

$$E = (x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$$

să se dividă:

1) Prin x^2+xy+y^2

2) Prin $(x^2+xy+y^2)^2$.

Ion B. Florescu.

4233. Fie d_a, d_b, d_c lungimile mediatoarelor unui triunghiu de laturi a, b, c. Să se demonstreze că suma

$$E = ad_a^2 + bd_b^2 + cd_c^2$$

se divide exact prin valoarea perimetrului acelui triunghiu.

Col. Gh. Buicliu.

4234. Fie B', C', G mijloacele laturilor AC și AB, precum și centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se găsească condiția ca patrulaterul A'B'C'G să fie inscriptibil.

Să se deducă condiția ca și patrulaterele BA'C'G și CB'A'G să fie inscriptibile.

A. Pârvu.

*4235. Dreptele care unesc vârfurile unui tetraedru ABCD cu un punct P din spațiu străpung fețele opuse în A_1, B_1, C_1, D_1. Fie A_2, B_2, C_2, D_2 simetricele vârfurilor în raport cu aceste puncte.

Dacă se pune:

$$A_1P/PA = \alpha,\ B_1P/PB = \beta,\ C_1P/PC = \gamma,\ D_1P/PD = \delta,$$

și dacă cu V_1, V_2, V_3 însemnăm volumele tetraedrelor ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ și cu V_a, V_b, V_c, V_d ale tetraedrelor cu vârfurile în P având ca baze fețele tetraedrului ABCD, avem relația:

$$V_2 - V - 8V_1 = 2\Sigma\,[2(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) + (\beta + \gamma + \delta)]V_a.$$

V. Thébault.

*4236. Insemnând cu D_p determinantul:

$$\begin{vmatrix} C_p^1 & C_p^2 & \dots & C_p^n \\ C_p^2 & C_p^3 & \dots & C_p^{n+1} \\ C_p^n & C_p^{n+1} & \dots & C_p^{2n-1} \end{vmatrix}$$

şi cu $D_{p+1}^{(1)}$ minorul de ordinul întâi al primului element din linia întâi, a lui D_p, avem relaţiunea:

$$D_p = (-1)^{n-1} \cdot \frac{C_p^1}{C_n^1} D_{p+1}^{(1)} .$$

Să se calculeze D_p.

VALERIU NOVACU.

*4237. Să se calculeze cu o eroare $< 1''$ de arc unghiurile unui triunghiu în care mediana ce pleacă din un vârf şi bisectoarea altui vârf, taie laturile triunghiului sub unghiuri egale cu ale vârfurilor respective.

N. C.

*4238. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} = a.$$

Să se rezolve complet pentru $a = \frac{3}{2}$.

GH. TH. GHEORGHIU.

*4239. Care este forma ecuaţiunei de gradul III, pentru ca derivata întâia a acestei ecuaţiuni (care este o ecuaţie de gradul II) să fie o ecuaţie reciprocă ?

CPT. GH. NICULESCU.

4240. Se dau două sfere, una de aur şi alta dintr'un aliaj mai uşor care imită perfect aurul (cupro-aluminium), ambele având aceeaşi mărime şi aceeaşi greutate putând fi şi goale în interior. Cum s'ar putea deosebi sfera de aur de cealaltă de aliaj, utilizând numai o cale mecanică.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (4207); *Avram N. C. Subloc.* (4207, 08, 21, 29); *Bădescu Em. Subloc.* (4202); *Borza Al. N.* (4204, 17); *Cârstoiu D. I.* (P); *Ceauşescu F. V.* (4196, 207, 08, 17); *Chiriac C.* (4159, 204, 07, 08, 17, 21); *Cohn L. A.* (2643, 4204); *Coşniţă C.* (4039, 164, N); *Cristopol A. C.* (3491, 4204, P); *Fabius Dorina* (4207); *Godeanu I. V.* (4116, P); *Ionescu-Biss P. H.* (4156, 68, 228); *Ionescu-Ţiu D. C.* (4215); *Ivănescu C.* (4172, 97, 204); *Mănescu M.* (4186); *Mareş I. Em.* (4220, 22); *Margulius M.* (4145, 68); *Mavrodin D.* (4178, 81, 87, 204, 08, 17, 22); *Mazilu C. P.* (4211, 17, 22); *Mihăileanu N. N.* (3906, 4215, E); *Nubar Artaki-Acik* (4109); *Olteanu E. Şt.* (3639, 4000, 71, 158, 68, 97); *Panait C. M.* (4181); *Patraulea N.* (4204); *Petrescu I. I.* (4125, 45, 56, 96, 99, 204, 07, 17); *Roşca G.* (4168); *Salmu Ana* (P); *Sâmbotin G. Subloc.* (4109, 25); *Ştefănescu Ar.* (E); *Stoica D. A.* (4166); *Vasilescu-Popescu C.* (4217); *Ziff S. M.* (4186, 99, 204, 07, 08, 21).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, dvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMARUL 8. — APRILIE 1933

SUMARUL

1. Sur le théorème de Feuerbach . . . . . *V. Thébault*
2. Un vechiu manuscript de aritmetică . . *Petre V. Cazanacli*
3. Construcţia normalei la cuartica
$x^4 - y^4 = a^4$ . . . . . *Al. Şcodranu*
4. Regulamentul fondului „Anghel Saligny"
5. Note matematice: 39 — 42
6. Chestiuni de examen
7. Bibliografie
8. Cereri
9. Diverse
10. Probleme rezolvate: 3367, 3548, 3613, 4079, 4109, 4145, 4211, 4222
11. Exerciţii: 26 — 29
12. Probleme propuse: 4237, 4241 — 4250

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1933

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 54, 55, 63, 65, 67, 69, 70, 89, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 12, 13, 16, 19, 24, 25, 26, 30, 32, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQU DANS SON GENRE

DANS LE MONDE ENTIER

Abonnem nts 1 an: Belgique, 30 fr.; France 25 fr.

Etranger, 7 belgas

ADMINISTRATION:

SPHINX, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel : 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338
Paris No. 160061

SUR LE THÉORÈME DE FEUERBACH

1. Notations. Soient un triangle ABC, (BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$; $a > b > c$), A_1, B_1, C_1 et A′, B′, C′, les milieux des côtés et les pieds des hauteurs; (O), (O_q), (I), (I_a), (I_b), (I_c), les cercles circonscrit, des neuf points et tritangents; R, r, les rayons des cercles (O) et (I); D, E, F, les contacts de ce dernier cercle sur BC, CA, AB.

Nous avons résolu récemment ce problème:

Trouver, sur la circonférence circonscrite à un triangle donné, un point dont, la distance à l'un des sommets du triangle soit égale à la somme des distances aux deux autres sommets [1]).

Quatre points Φ, Φ_a, Φ_b, Φ_c, du cercle circonscrit répondent, en général, à cette question et sont définis par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \Phi\ B &= \Phi\ A + \Phi\ C \quad , \quad \Phi_a B = \Phi_a A + \Phi_c C, \\ \Phi_b C &= \Phi_b A + \Phi_b B \quad , \quad \Phi_c C = \Phi_c A + \Phi_c B. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Désignons par φ, φ_a, φ_b, φ_c, les quatre points du cercle (O_q) des neuf points du triangle ABC, tels que leurs distances à un sommet du triangle complémentaire $A_1B_1C_1$, soient égales à la somme de leurs distances aux deux autres sommets, c'est-à-dire tels que

$$\begin{aligned} \varphi\ B_1 &= \varphi\ A_1 + \varphi\ C_1 \quad , \quad \varphi_b C_1 = \varphi_b A_1 + \varphi_b C_1 \\ \varphi_a B_1 &= \varphi_a A_1 + \varphi_a C_1 \quad , \quad \varphi_c C_1 = \varphi_c A_1 + \varphi_c B_1. \end{aligned}$$

Ces points φ, φ_a, φ_b, φ_c, sont les orthopôles de quatre diamètres Δ, Δ_a, Δ_b, Δ_c, du cercle circonscrit (O) au triangle ABC, pour lesquels on a, par exemple,

$$\frac{\varphi A_1}{\cos\alpha} = \frac{\varphi B_1}{\cos\beta} = \frac{\varphi C_1}{\cos\gamma} = R, \tag{2}$$

α, β, γ, étant les angles de même sens déterminés par l'axe Δ avec les côtés BC, CA, AB, cette relation s'appliquant d'ailleurs à un diamètre quelconque du cercle (O) et à son orthopôle [2]).

Puisque, dans le cas que nous envisageons,

$$\varphi B_1 = \varphi A_1 + \varphi C_1,$$

en vertu de (2), on a aussi, en grandeur et en signe,

$$\cos\beta = \cos\alpha + \cos\gamma,$$

et réciproquement.

1) *Mathesis*, 1932 — 361.

2) R. Goormaghtigh, *Journal de Vuibert*, 40e — A — 149.

Le diamètre Δ *coïncide donc avec la droite* OI *des centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle* ABC ; *le point* φ *est l'orthopôle du diamètre* OI, *par rapport au triangle* ABC.

Par analogie, les diamètres Δ_a, Δ_b, Δ_c, sont respectivement confondus en directions avec des axes qui passent par le centre O et chacun des centres I_a, I_b, I_c, des cercles tritangents.

3. Des relations évidentes

$$\cos\alpha = \frac{b-c}{OI}, \quad \cos\beta = \frac{a-c}{OI}, \quad \cos\gamma = \frac{a-b}{OI},$$

et de (2), on tire

$$\varphi A_1 = \frac{R(b-c)}{OI}, \quad \varphi B_1 = \frac{R(a-c)}{OI}, \quad \varphi C_1 = \frac{R(a-b)}{OI}. \qquad (3)$$

Désignons x la distance du point φ à BC, il vient

$$\varphi A_1 \cdot \varphi A' = Rx = \varphi B_1 \cdot \varphi C_1 + \frac{bc}{4},$$

d'où, en vertu de (3), et, après réductions,

$$\varphi A' = (b-c)(p-a) : a\sqrt{1 - \frac{2r}{R}}.$$

Alors,

$$\frac{\varphi A_1}{\varphi A'} = \frac{a}{2(p-a)} = \frac{A_1 D}{DA'}\ ^{1}).$$

La bissectrice intérieure de l'angle $A_1\varphi A'$ *rencontre donc le côté* BC *en son contact* D *avec le cercle inscrit.*

4. Cette bissectrice φD coupe le cercle (O_q) des neuf points au milieu M de l'un des arcs A_1A', et, comme la tangente en M à (O_q) est parallèle à BC, la droite φD passe par l'un des centres de similitude des cercles inscrit et des neuf points.

Par analogie, les droites φE, φF, contiennent le même centre de similitude qui, par suite, est l'orthopôle φ, du diamètre OI. Le centre φ de similitude des cercles (O_q) et (I) appartenant à l'un deux (O_q), ces deux cercles sont tangents en φ, ce qui établit le théorème de Feuerbach sur le contact des cercles inscrit et des neuf points d'un triangle.

Ce raisonnement est applicable aux trois autres points φ_a, φ_b, φ_c, qui sont par conséquent les points de Feuerbach relatifs aux cercles exinscrits (I_a), (I_b), (I_c).

V. Thébault
Le Mans — France.

1) Nous avons déjà obtenu autrement cette relation, G. M., XXXVI—364. (V. T.).

UN VECHIU MANUSCRIPT DE ARITMETICĂ

Defunctul profesor de Geometrie analitică dela Universitatea din Iaşi, CONSTANTIN CLIMESCU, a publicat sub titlul de mai sus, în *Gazeta Matematică*, Anul XXVII, pag. 12, 41 şi 74, un studiu interesant tratând despre un manuscript din colecţia sa. Intrebuinţând o cale indirectă, dânsul ajunge la concluzia că manuscriptul este o traducere a Aritmeticii lui BÉZOUT. Totuşi dovada directă nu se putea face, de oarece Volumul I al operelor lui BÉZOUT, Aritmetica, lipseşte din Biblioteca centrală a Universităţii din Iaşi, şi CLIMESCU nu l'a văzut niciodată.

Mai târziu, D-l G. NICHIFOR a publicat o lucrare despre un manuscript asemănător care se găseşte în Biblioteca Seminarului VENIAMIN COSTACHI din Iaşi: *„O Aritmetică manuscrisă"* în *„Revista Critică"*, Iaşi 1929. D-sa a întrebuinţat o metodă foarte ingenioasă; a comparat manuscriptul cu acele părţi ale altor volume (Algebra, Geometria) unde se citează volumul I, şi a afirmat că manuscriptul este o traducere a Aritmeticii lui BÉZOUT.

Studiind în anii din urmă manuscriptul descris de CLIMESCU, care se găseşte acuma în Biblioteca Seminarului Matematic al Universităţii din Iaşi, am avut posibilitatea să-l compar cu Volumul I al operelor lui BÉZOUT: *Cours de Mathématiques, à l'usage de la marine et de l'artillerie"* par BÉZOUT. *Première partie: „Eléments d'Aritmétique"*. A Paris. An. VII — 1798.

Am găsit astfel că într'adevăr, manuscriptul este o traducere fidelă, scrisă într'o limbă curată şi frumoasă, a cărţii lui BÉZOUT. Având în vedere că chestiunea prezintă un mare interes pentru studiul primelor cărţi matematice apărute în limba românească, îmi permit să transcriu aici o serie de fragmente din cartea lui BÉZOUT, urmate de fragmente corespunzătoare din manuscript, înlocuind cirilicele autorului cu caractere latine.

BÉZOUT	MANUSCRIPTUL
§ 1. On appelle, en général, quantité tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc., sont des quantités. Tout ce qui est quantité est de l'objet des Mathé-	§ 1. Tot cea ce poate fi adăogit sau împuţinat, în de obşte se numeşte *câtime*. Intinderea, curgerea timpului, greutatea, ş. al., sunt câtimi. Şi tot ce iaste câtime, iaste obiectul matimaticei însă Aritmetica

matiques ; mais l'Arithmétique, qui fait partie de ces sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

§ 2. L'Arithmétique est donc la science des nombres ; elle en considère la nature et les propriétés ; et son but est de donner des moyens faciles, tant pour représenter les nombres, que pour les composer et décomposer, ce qu'on appelle calculer.

§ 3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité*.

§ 4. L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espéce ainsi, lorsqu'on dit, un tel corps pése *cinq livres*, la livre est l'unité ; c'est la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps ; on aurait pu également prendre l'once pour unité, et alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingt.

§ 18. Un nombre qui est composé de parties rapportées, ainsi, à différentes unités, s'appelle nombre *complexe*, et par oposition, celui qui ne renferme qu'une seule espèce d'unités, s'appelle *nombre incomplexe*. 8 l ou 8 livres sont un nombre incomplexe. 8 l 17 s 8 d ou 8 livres 17 sols 8 deniers, sont un nombre complexe.

§ 19. Chaque art subdivise à sa manière l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celles de la livre; celles de la livre, différentes de cel-

care iaste o parte a acestii ştiinţi, ia aminte numai la acele câtimi care sunt tâlcuite prin numere.

§ 2. Aşa dar Aritmetica iaşte ştiinţa numerelor, ea ia aminte la firea şi însuşirile lor, şi sfârşitul ei iaste de a da chipuri lesnicioase atât pentru insemnarea numerelor cât şi pentru alcătuirea şi dezalcătuirea lor, care se numeşte a calcului adică a socoti.

§ 3. Pentru ca să-şi poată neşitne a-şi face o deplină idee despre numere, trebue a şti dintâi cea ce se înţelege prin unime.

§ 4. Unimea este o câtime care se ia (mai totdeauna nehotărâtă) pentru ca să fie hotar de alăturare la toate câtimele a aceluiş feliu, aşa dar dacă se zice că un trup iaste greu de cinci *ocă*, atuncea oca iaste unime, şi iaste câtimea la care se alăturează greutatea acestui trup. S'ar fi fost putut lua şi dramul în loc de unime, însă atuncea greutatea acestui trup s'ar fi insemnat prin doă mii.

§ 18. Un număr alcătuit din părţi carele atârnă dela deosebite unimi se numeşte număr *complex*, şi dinprotivă acela carele nu cuprinde în sine afară numai un feliu de unimi se numeşte număr *incomplex*. Opt ocă sunt un număr incomplex, opt ocă şi trei litre şi cincizeci de dramuri sunt un număr complex.

§ 19. Fieşte care meşteşug subîmpărţeşte după al său chip unimea fruntaşă care s'au ales, suptîmpărţirile stânjenului sunt osebite de a ocii, a ocii deosebite de a zilei ; de

les du jour, de l'heure ; celles-ci différentes de celles du marc, et ainsi de suite : nous les feront connaître, lorque nous traiterons des nombres complexes.

§ 20. Mais de toutes les divisions et subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales, c'est-à-dire, en partageant l'unité en partie de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans les calculs. Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques ; la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers : nous allons les faire connaître.

§ 31. Ajouter, soustraire, multiplier, et diviser, sont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres se réduisent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il est donc important de se les rendre familières, et d'en bien saisir l'esprit.

§ 32. Le but de l'Aritmétique est, comme nous l'avons déjà dit, de donner de moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens consistent à reduire le calcul des nombres les plus composés, à celui de nombres plus simples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres possibles. C'est ce qu'il s'agit d'exposer actuellement.

§ 40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ceux deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre trois fois le nombre 4.

a ceasului, şi acestea deosebite de ale dramului, ş. al. Noi le vom arăta atuncea când vom vorbi de numerele complexe.

§ 20. Insă din toate împărţirile şi subimpărţirile care se poate să se facă din unime acea care se face prin zecimale, adecă împărţind unimea în părţi de zece ori mai mici, iaste negreşit cea mai lesnicioasă în toate calcurile. Ea este foarte întrebuinţată în practica matematicii. Alcătuirea şi calculul zecimalelor sunt cu totul acelea ce şi pentru numerile obicinuite, sau întregi, care noi le vom arăta.

§ 31. A aduna, a suptrage, a înmulţi, şi a împărţi sunt acele patru lucrări temeinice a Aritmeticii, toate cererile care se pot înainpune pentru numere se închee cu vreuna din acestea, sau în toate acestea lucrări. Iaste dar de trebuinţă de a şi le face bine cunoscute şi de a pătrunde puterea lor.

§ 32. Ifârşitul Aritmeticii iaste precum am mai zis de da chipuri a calculului numerilor cu înlesnire. Aceste chipuri se dovedesc prin reducerea calculului numerilor celor mai alcătuite la a numerilor celor mai simple, sau tâlcuite prin cel mai mic număr putincios de ţifre, şi aceasta iaste care se va arăta acum.

§ 40. A înmulţi un număr prin altul iaste de a lua pe cel dintâi din aceste doă numere de atâtea ori câte unimi se află în celalalt. De pildă a înmulţi 4 prin 3 iaste de a lua de trei ori numărul 4.

41. Le nombre qu'on doit multiplier, s'appelle *multiplicande ;* celui par lequel en doit multiplier, s'appelle le *multiplicateur*, et le résultat de l'opération s'appelle *produit.*

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue; mais nous avertisons expressément que nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplictation. Le multiplicande et le multiplicateur se nomment aussi *facteurs* du produit ; ainsi 3 et 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

(Va urma)

41. Numărul carile are să se înmulţească se numeşte *înmulţitul* acela prin care trebuie a înmulţi se numeşte *înmulţitorul,* şi rezultatul lucrării se numeşte *product.*

42. Zisul product tâlcuieşte îndeobşte multe alte înţelegeri, însă noi înştiinţăm cu inadinsul că nu-l vom întrebuinţa de cât numai de a însemna rezultatul înmulţirii. Înmulţitul şi înmulţitorul se numesc şi *făcători* a productului, şi aşa 3 şi 4 sunt făcători de 12, pentrucă trei ori 4 fac 12.

PETRE V. CAZANACLI.
Iaşi.

CONSTRUCŢIA NORMALEI LA CUARTICA

$$x^4 - y^4 = a^4$$

I. Se dau axele dreptunghiulare OX, OY, care sunt tăiate în N şi N′ de normala în punctul P la o curbă Γ. Se construeşte trapezul OPNQ dreptunghic în O şi Q. Se cere să se găsească curba Γ, astfel încât diagonalele trapezului OPNQ să fie dreptunghiulare.

Fie x, y coordonatele lui P. Coordonatele x_Q, y_Q ale lui Q se obţin din rezolvarea sistemului

$$X = x \quad , \quad Y = -\frac{x}{y}X$$

care reprezintă ecuaţiile dreptelor PQ şi OQ. Găsim

$$x_Q = x \quad ; \quad y_Q = -\frac{x^2}{y} \cdot$$

Ecuaţia dreptei QN, paralelă cu OP, va fi

$$Y + \frac{x^2}{y} = \frac{y}{x}(X - x).$$

Intersecţia ei cu axa OX dă abscisa punctului N

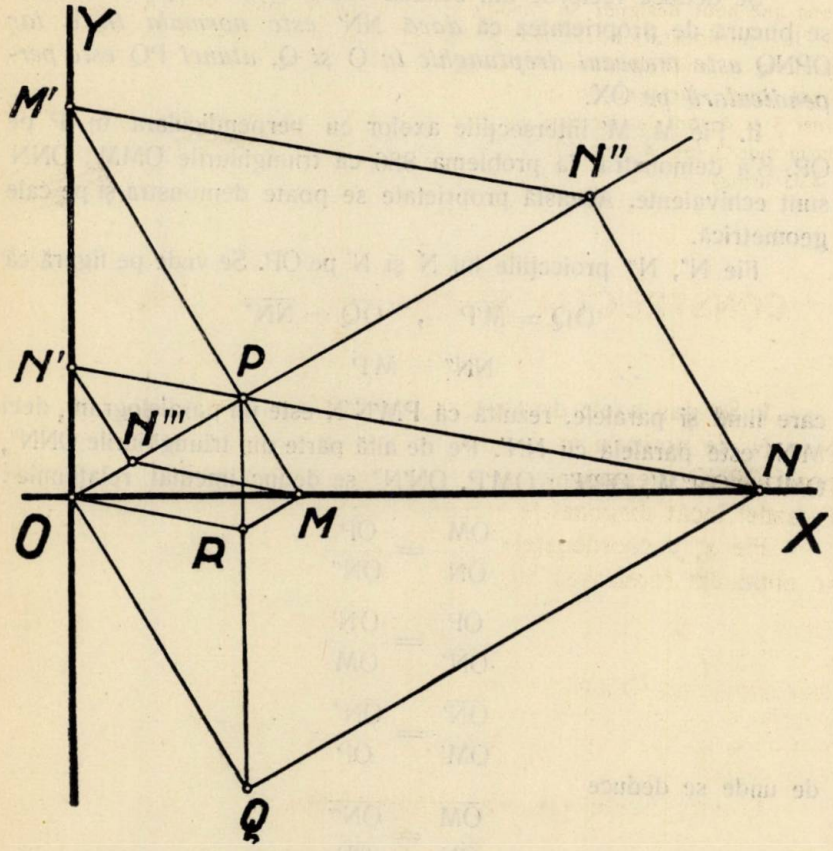
$$x_N = \frac{x^2 + y^2}{y^2}x.$$

Coeficientul unghiular al dreptei PN va fi

$$m = \frac{y}{x - x_N} = -\frac{y^3}{x^3}.$$

Pe de altă parte se știe că coeficientul unghiular al normalei în P (x, y) la Γ este

$$m' = -\frac{dx}{dy}$$



așa că, pentru ca NP să fie această normală, trebuie ca

$$-\frac{y^3}{x^3} = -\frac{dx}{dy}$$

$$\therefore \quad x^3 dx - y^3 dy = 0.$$

Integrând această ecuație, găsim că curba Γ este cuartica

$$x^4 - y^4 = a^4$$

în care a este o constantă arbitrară. Aceasta este tocmai una din ecuațiile cuarticelor, care fac obiectul problemei 886, rezolvată la pagina 141, Vol. XXXIV, *Gazeta Matematică.*

Construcția normalei la această curbă rezultă imediat din construcțiile precedente.

Se deduce reciproc din ecuația cuarticei că un punct al ei P se bucură de proprietatea că *dacă* NN′ *este normala în* P *iar* OPNQ *este trapezul dreptunghic în* O *și* Q, *atunci* PQ *este perpendiculară pe* OX.

II. Fie M, M′ intersecțiile axelor cu perpendiculara în P pe OP. S'a demonstrat la problema 886 că triunghiurile OMM′, ONN′ sunt echivalente. Această proprietate se poate demonstra și pe cale geometrică.

Fie N″, N‴ proiecțiile lui N și N′ pe OP. Se vede pe figură că

$$\overline{OQ} = \overline{M'P} \quad , \quad \overline{OQ} = \overline{NN''}$$

$$\therefore \qquad \overline{NN''} = \overline{M'P}$$

care fiind și paralele, rezultă că PM′N″N este un paralelogram, deci M′N″ este paralelă cu NN′. Pe de altă parte din triunghiurile ONN″, OMP ; ON″M′, OPN′ ; OM′P, ON′N‴ se deduc imediat relațiunile :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{ON''}}$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{ON''}} = \frac{\overline{ON'}}{\overline{OM'}}$$

$$\frac{\overline{ON'}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{ON'''}}{\overline{OP}}$$

de unde se deduce

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{ON'''}}{\overline{OP}}$$

care arată că MN‴ este paralelă cu NN′. Cum N′N‴ e paralelă cu MM′, ca fiind perpendiculare pe OP, rezultă că MPN′N‴ e un paralelogram și deci

$$\overline{N'N'''} = \overline{PM}.$$

Triunghiurile OPM', OPN având aceiași bază OP și înălțimile M'P, NN'' egale, sunt echivalente. De asemenea triunghiurile OPM și OPN' sunt echivalente ca având baza OP comună și înălțimile MP, N'N''' egale. Rezultă că triunghiul ONN' este echivalent cu OMM'.

III. Paralela dusă din M la OP taie pe PQ în R. Triunghiurile PRM și N'ON''' fiind dreptunghice și având

$$\overline{PM} = \overline{N'N'''} \quad ; \quad \sphericalangle RPM = \sphericalangle ON'N'''$$

sunt egale. Rezultă că

$$\overline{PR} = \overline{ON'} \quad ; \quad \overline{RM} = \overline{ON'''}$$

ceeace arată că OR și NN' sunt paralele.

Rezultă o nouă construcție a normalei în P la l'.

IV. Dacă, în condițiunile construcțiilor dela I, s'ar cere să se determine curba (C) astfel ca PN să-i fie tangentă, se găsește cuartica

$$x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$$

care este așa numita *stavroidă* (curba crucii). Ea reprezintă locul punctelor ale căror proecțiuni ortogonale pe două axe dreptunghiulare sunt pe o tangentă la un cerc cu centrul în origină și cu raza *a*.

AL. ȘCODRANU
Inginer

REGULAMENTUL FONDULUI „ANGHEL SALIGNY"

Art. 1. — Societatea «Gazeta Matematică» primind donațiunea D-lui I. IONESCU, constitue — în conformitate cu dorința donatorului — un fond denumit fondul «ANGHEL SALIGNY» al cărui venit să servească la publicarea de cărți technice conform art. 6 din actul de donație și în consecință înființează o «Bibliotecă technică a Gazetei Matematice».

Art. 2. — Toate cărțile tipărite din acest fond vor purta pe copertă în frunte, următoarea titulatură: «Biblioteca tehnică a Gazetei Mathematice« (tipărită din fondul «Anghel Saligny»).

Art. 3. — Biblioteca va avea formatul 120 × 185 sau 175 × 260 mm., după felul şi întinderea manuscriselor. Dimensiunile se înţeleg pentru cărţile broşate şi tăiate.

Art. 4. — Volumele se vor da în comerţ legate în pânză de culoare cenuşiu închis şi vor avea imprimate în auriu, inscripţiunile ce se vor stabili pentru fiecare publicaţiune în parte.

Art. 5. — Manuscrisele se adresează delegaţiunii, care convoacă o adunare generală extraordinară pentru a alege o comisiune de 3 membri, care se completează cu casierul şi care dă în mod definitiv avizul dacă lucrarea poate să fie tipărită din fondul «ANGHEL SALIGNY»; aceasta atât din punct de vedere financiar cât şi din punct de vedere al valorli ştiinţifice a lucrării.

Art. 6. — Comisiunea nu ia în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate, sau cu cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Art. 7. — Dacă la prezentarea manuscrisului nu sunt sume disponibile din venitul fondului «ANGHEL SALIGNY» pentru tipărire şi dacă Comisiunea însărcinată cu cercetarea lui opinează că e bine să fie tipărit, atunci delegaţiunea Societăţii va putea împrumuta cu dobândă de 5%, cu aprobarea unei adunări generale, suma necesară tipăririi, din numerarul disponibil al «Gazetei Matematice».

Art. 8. — Odată cu depunerea manuscrisului, autorul este obligat să declare în scris că se va supune dispoziţiilor acestui regulament şi ale actului de donaţie al fondului şi că nu va tipări o a doua ediţie, înainte de epuizarea ediţiei tipărită în această bibliotecă.

Art. 9. — In regulă generală se preferă lucrările membrilor Societăţii «Gazeta Matematică».

Art. 10. — Comisiunea pentru cercetarea lucrării, hotărăşte pentru fiecare ediţiune tipărită conform acestui regulament numărul volumelor, formatul (conform art. 3), inscripţiunile (conform art. 4) şi preţul. Deasemenea comisia va urmări tipărirea şi va lua la timp dispoziţii speciale necesare.

Art. 11 (art. 4 din actul de donaţie al fondului «ANGHEL SALIGNY»). — Sumele ce se încasează din vânzarea cărţilor, după ce se scot din ele cheltuelile de cost, comision şi expediţie, se distribue în modul următor:

a) 10% autorului respectiv;

b) 20% Societăţii «Gazeta Matematică» pentru sporirea capitalului ei;

c) 20% fondului «ANGHEL SALIGNY» pentru sporirea lui continuă, şi

d) 50% drept venit al fondului «ANGHEL SALIGNY», întrebuinţându-se prin urmare pentru noui publicaţiuni.

Art. 12. — Autorul primeşte gratuit câte 10 volume din lucrările lui, la fiecare ediţie.

NOTE MATEMATICE

39. *Asupra problemei 3872.* In legătură cu problema 3872, rezolvată la pagina 194 din acest an, voi rezolva în cele ce urmează următoarea problemă:

Când raportul între numărul szu *şi una din cifrele sale este patrat perfect?*

Ecuaţiile problemei sunt:

(1) $szu = uN^2$; (2) $szu = zN^2$; (3) $szu = sN^2$.

Cazul (1) a fost studiat la pagina 194. Il voi relua totuşi aici. Din (1) se scoate:

(4) $$sz0 = u(N^2 - 1).$$

Dacă $u = 0$, atunci $s = z = 0$ şi avem 9 soluţiuni formale

$$\frac{00u}{u} = 1^2$$

pentru u de o cifră.

Dacă $u \neq 0$ se deduce din (4) că N^2 se termină cu 1, deci N se termină cu 1 sau 9 şi cum $N \leqslant 31$ putem avea pentru N valorile 1, 9, 11, 19, 21, 29, 31. Dând lui N pe când aceste valori în (2) se găsesc cele 32 soluţii dela pagina 194.

Cazul (2) conduce la ecuaţia:

(6) $$s0u = z(N^2 - 10)$$

în care se vede că trebue luat $22 \leqslant N^2 \leqslant 961$ pentru ca produsul $z^2(N^2 - 10)$ să fie de 3 cifre. Dând lui N^2 valoarea 25 avem din (6)

$$s0u = z \cdot 15$$

Dintre cifrele z suma 7 este aceea care înmulțită cu 15 să dea un număr de forma $s0u$.

Căutând la fel pentru celelalte valori ale lui N^2 se găsesc următoarele 5 soluțiuni pentru ecuația (2):

$$\frac{175}{7} = 25 \; ; \quad \frac{144}{4} = \frac{288}{8} = 36 \; ; \quad \frac{432}{3} = \frac{864}{6} = 144.$$

A doua și a treia din aceste soluțiuni sunt comune și cazului (1).

Cazul (3) conduce la

$$(7) \qquad zu = s(N^2 - 100)$$

$$\therefore \qquad 100 < N^2 < 225 - 16^2,$$

căci pentru $N > 15$ diferența $N^2 - 100$ este de 3 cifre.

Dând în (7) lui N pe rând valorile 11, 12, 13, 14, 15 se găsesc următoarele 8 soluțiuni pentru cazul (3):

$$\frac{121}{1} = \frac{242}{2} = \frac{363}{3} = \frac{484}{4} = 121$$

$$\frac{144}{1} = \frac{288}{2} = 144$$

$$\frac{169}{1} = 169 \qquad \text{și} \qquad \frac{196}{1} = 196.$$

Primele 4 soluțiuni sunt comune cazurilor (1) și (3) iar următoarele 2 se întâlnesc și la cazul (2).

Col. Gh. Buiculiu.

40. *Asupra articolelor „Proprietăți ale triunghiului" din G. M. XXXVIII, 1933 p. 206 și p. 241.*

Teoremele stabilite în aceste două articole sunt cazuri particulare ale următoarei teoreme generale:

Fie în același plan un triunghiu ABC, *două puncte* M, N *și o dreaptă* Δ. *Pe dreapta* Δ *se consideră două diviziuni omografice (1 și 2). Dreptele* AM, BM, CM, AN, BN, CN *întâlnesc pe* Δ *în* A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. *Fie* A'_1 B'_1 C'_1 *punctele din diviziunea (2), omoloage punctelor* A_1, B_1, C_1, *considerate ca făcând parte din diviziunea (1) și fie* A'_2 B'_2 C'_2 *punctele din diviziunea* (1), *omoloage punctelor* A_2, B_2, C_2 *considerate ca făcând parte din diviziunea (2). Perechile de drepte* (A'_1N, A'_2M) (B'_1N, B'_2M),

(C'_1N, C'_2M) *întâlnesc respectiv laturile* BC, CA, AB *în punctele* A', A'', B', B'', C', C'', *care se găsesc pe o aceiași conică.* Γ.

Demonstrația se face imediat, ca și în articolele citate. Luând un sistem de axe dreptunghiulare, astfel ca Δ să fie axa ordonatelor, și alegem origine astfel ca relația omografică să se scrie:

$$yy' - by - cy' = 0.$$

Trecerea dela diviziunea (2) la diviziunea (1) se face prin relația:

$$y' = \frac{by}{y - c}$$

iar trecerea dela diviziunea (1) la diviziunea (2) se face prin relația:

$$y = \frac{cy'}{y - b}.$$

Fie (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3 y_3)$, (x_m, y_m), (x_n, y_n) coordonatele punctelor A, B, C, M, N. Un calcul elementar ne conduce la relația:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{d\,(m,\ 2,\ n,\ 1,\ b,\ c)}{d\,(m,\ 3,\ n,\ 1,\ b,\ c)}$$

unde s'a notat:

$$d\,(m,\ i,\ n,\ j,\ b,\ c) = x_m y_n x_j y_i + x_n y_m x_i y_j - x_m x_n y_i y_j$$

$$- y_m y_n x_i x_j + b\,(y_m x_i x_j + x_m x_n y_i - x_m y_i x_j - y_m x_n x_i)$$

$$+ c\,(y_n x_i x_j + x_m x_n y_j - x_m y_n x_j - x_n x_i y_j)$$

și se verifică imediat relația:

$$d\,(m,\ i,\ n,\ j,\ b,\ c) = d\,(n,\ j,\ m,\ i,\ c,\ b).$$

Din relațiile analoage deducem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$$

care demonstrează teorema.

Generalizări mai largi pe care le-am dat acestei teoreme, vor fi publicate ulterior.

N. G. Botea.

41. *Asupra unei teoreme de geometrie.*

In «G. M.» Vol. XXIII, pag. 187, D-l L. HAMBURGER stabileşte o teoremă:

„Un triunghiu ABC *circumscris triunghiului dat* $A_1B_1C_1$ *şi omologic cu el, este omologic şi cu un* Δ*-iu* $A'B'C'$ *omologic şi înscris în* $A_1B_1C_1$*“.*

Acestei teoreme i se poate da o demonstraţie cu ajutorul unei transformări pe care subsemnatul a stabilit-o în G. M. Vol. XXXV, pag. 289 — 294.

Fie $A''B''C''$ punctele unde cevienele AA_1 , BB_1 , CC_1 taie laturile Δ-ului $A_1B_1C_1$. Se ştie, după o teoremă a lui CARNOT, că punctele $A'A''B'B''C'C''$ sunt coliniare pe o conică (Γ). Printr'o transformare proectivă se poate substitui acestei conice (Γ) un cerc (Γ_1).

Să considerăm acum polara triliniară (D_0) a punctului M centrul de omologie al Δ-urilor ABC şi $A_1B_1C_1$. In supoziţia existenţii cercului (Γ_1) să aplicăm configuraţii (D_0, Γ_1) transformarea menţionată: $(C, D_0 \longleftrightarrow C, D_\infty)$. Triunghiul $A_1B_1C_1$ devine triunghiul median al Δ-ului ABC, M centrul său de greutate; Δ-urile $A''B''C''$ $A'B'C'$ se transformă respectiv în triunghiurile median şi ortic ale Δ-ului $A_1B_1C_1$. Ori pe figură se vede atunci că ceviana AA', de pildă, taie latura BC într'un punct A_2, isotomic piciorului înălţimii coborîte din A pe BC. Rezultă imediat că dreptele AA', BB', CC', sunt concurente.

ALEXANDRU NICULESCU
Giurgiu.

42. *Asupra articolului „Chestiuni din geometria triunghiului“ de* M. NICULESCU *(G. M. XXXVIII, 1933, pag. 163).*

O parte din rezultatele acestui articol sunt cunoscute mai de mult şi au apărut în articolele *„Asupra unor puncte colineare»* de DAN NESTOR (Curierul Matematic I. 1926, p. 182) şi *„Asupra unor puncte colineare“* de TIB. POPOVICIU (Curierul Matematic II. 1926, p. 65). In aceste articole se mai studiază şi alte proprietăţi interesante ale configuraţiei D-lui NICULESCU. Deasemenea se pot găsi alte proprietăţi ale configuraţiei în articolele *„Asupra unor puncte colineare“* de N. BOTEA. (Foaia Matematică II. 1925, p. 123 şi III. 1926, p. 167).

N. B.

CHESTIUNI DE EXAMEN

FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN BUCUREŞTI

Sesiunea Octomvrie 1932

ANUL I

ALGEBRĂ

I. n fiind un număr întreg mai mare ca 2, să se arate că polinomul

$$P(x) = 3(2x-1)^n - 2(3x-2)^n - 1$$

este divizibil cu : $(x-1)^2$.

II. Să se găsească natura seriei cu termenul general : $u_n = \frac{\log n}{2^n}$.

III. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \log \frac{x^2+1}{x^2+2x+3} + 2\,\text{arctg}\,x$$

şi să se facă reprezentarea grafică.

IV. Să se determine numărul complex : $a+ib$ aşa fel ca : $b+ia$ să-i fie rădăcină pătrată.

V. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

şi să se determine modulul şi argumentul fiecărei rădăcini.

GEOMETRIA ANALITICĂ

I. Se dă conica :

(1) $$8x^2 - 10xy - 3y^2 + 8x + 2y - 2 = 0.$$

Să se determine coordonatele centrului, direcţiile asimptotelor, infine diametrul conjugat coardelor paralele cu dreapta :

(2) $$x + 2y - 1 = 0.$$

Se va arăta că şi dreapta (2) este un diametru.

II. Să se scrie ecuaţia planului dus prin punctul $A(0,0,1)$ şi care să fie perpendicular pe dreapta :

(3) $$x = z + 1\ ,\quad y = -z + 2,$$

precum şi a planului dus prin axa Oz şi care să fie paralel cu dreapta (3).

III. Dreapta (3) e supusă unei rotaţii în jurul axei Oz. Să se găsească ecuaţia suprafeţei născute.

GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

Cadrul epurei: 450 : 270 mm. Axa Ox paralelă cu latura mică şi la 200 mm de jos. Se consideră hiperboloidul de rotaţie cu axa verticală $z'O'$, O punctul O fiind definit prin coordonatele: O (125,90,0) şi generat de dreapta AB:

$$A\,(55{,}75{,}0) \quad ; \quad B\,(145{,}40{,}130).$$

Se cere:

1. A se figura 6 generatoare de acelaşi sistem cu AB rotaţii de câte 60^0 a acesteea şi a se trasa conturul aparent vertical.

2. Să se ducă plane tangente la hiperboloid paralele cu $P'\alpha P$, α fiind la extremitatea dreaptă a lui Ox şi: $\sphericalangle P'\alpha O = 60^0$ iar $\sphericalangle O\alpha P = 45^0$.

3. Să se caute punctele comune suprafeţei şi cu *frontala* dusă prin punctul hh' (80,135,0) şi făcând 45^0 cu planul orizontal de proiecţie.

MATEMATECI ELEMENTARE

I. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin(a + x)\,\sin(b + x) = \sin a \sin b.$$

II. Se dă patrulaterul convex: $A_1A_3A_2A_4$ ale cărui laturi opuse sunt: A_1A_3 , A_2A_4 şi A_3A_4 , A_1A_2 şi se întâlnesc respectiv în punctele I şi J. Se transformă vârfurile patrulaterului în două inversiuni de prima speţă, una de pol I şi modul h, alta de pol J şi modul k. Fie $B_1B_2B_3B_4$ şi $C_1C_2C_3C_4$ corespunzătoarele vârfurilor $A_1A_2A_3A_4$ respectiv în cele două inversiuni. Se cere:

1°. Să se demonstreze că pe o latură a patrulaterului dat, ordinea punctelor A este inversă faţă de ordinea punctelor B şi C;

2°. Fie A_0, B_0, C_0 intersecţiile diagonalelor A_1A_4 şi A_2A_3, B_2B_3 şi B_1B_4, C_1C_4 şi C_2C_3. Să se arate că avem următoarele grupuri de triunghiuri asemenea:

$$\Delta\, C_0C_1C_2 \sim \Delta\, A_0A_3A_4 \sim \Delta\, B_0B_3B_4 \; ; \; \Delta\, C_0C_2C_3 \sim \Delta\, A_0A_2A_3 \sim \Delta\, B_0B_4B_1$$

$$\Delta\, C_0C_3C_4 \sim \Delta\, A_0A_1A_2 \sim \Delta\, B_0B_1B_2 \; ; \; \Delta\, C_0C_4C_1 \sim \Delta\, A_0A_4A_1 \sim \Delta\, B_0B_2B_3.$$

3°. Să se deducă din rezultatul precedent că patrulaterele $C_1C_2C_3C_4$ şi $B_3B_4B_1B_2$ sunt asemenea între ele, dar nu sunt asemenea cu $A_1A_2A_3A_4$.

4°. Să se determine raportul $h : k$ astfel încât patrulaterele $C_1C_2C_3C_4$ şi $B_3B_4B_1B_2$ să fie chiar egale.

ANUL II

ALGEBRĂ

1. Se consideră transformarea

$$z_1 = \frac{z}{1 + iz}.$$

Când z descrie cercul cu centrul în origină şi de rază egală cu unitatea, ce va descrie punctul z_1? (Se va putea considera transformarea auxiliară: $u = \frac{1}{z_1}$).

2. (Chestiune de curs) *Teorema lui* ABEL. Fiind dată o serie întreagă: $\Sigma a_n z^n$ dacă pentru o valoare: $z = z_0$ a variabilei putem scrie

$$| a_n z_0^n | < M$$

pentru toate valorile lui n, M fiind un număr pozitiv, atunci seria considerată va fi absolut convergentă pentru toate valorile lui z aşa fel ca: $| z | < | z_0 |$.

TEORIA NUMERELOR

1. Să se demonstreze că orice număr prim $p > 2$ se poate pune într'un singur fel sub forma de diferenţă de două pătrate de numere întregi pozitive.

2. Reciproc: un număr impar care se poate pune într'un singur fel sub forma de diferenţă de două pătrate este un număr prim.

ANUL III

GEOMETRIE SUPERIOARĂ

1. Fie M un punct pe o curbă (C). Se consideră triedrul mobil $Mxyz$ în aşa fel ca Mx să fie tangenta în M la curba (C). Dacă presupunem că rotaţiile triedrului p, q, r rămân proporţionale cu trei numere fixe l, m, n, să se arate că dreptele caracteristice ale feţelor triedrului fac unghiuri constante cu axele.

2. Să se determine liniile de curbură şi liniile asimptotice ale suprafeţei

$$x = u \cos v \quad , \quad y = u \sin v \quad , \quad z = \sqrt{u^2 - 1}.$$

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXIX. No. 1. Ianuarie 1933. New York. Adunarea din Octomvrie din New York, de T. FORT. Adunarea din Ames, de M. H. INGRAHAM. ERNEST IULIUS WILCZYNSKI, in memoriam, de E. P. LANE. Extrase din memorii.

The Mathematical Gazette. Vol. XVI. No. 221. Decemvrie 1932. Londra. Congresul dela Zürich, de G. N. W. Figuri asemenea, de A. VAN DER MEERSCH. HENRY JAMES PRIESTLEY, de J. P. MC CARTY. Ce e rău în învăţământul aproximaţiunilor, de S. INMAN. Aria cercului, de C. H. HARDINGHAM. Asupra necesităţii de a pune semnul $\times$ înaintea înmulţitorului, de SARADAKANTA GANGULI. Teoreme privitoare la coardele focale ale unei conice, de E. P. LEWIS. Matematicile în şcoală. Două replice D-lui A. N. HINCKLING, de E. H. LOCKWOOD şi H. W. OLDHAM. Pregătirea profesorilor de matematici.

Idem. Vol. XVII. No. 222. Februarie 1933. Londra. Adunarea anuală a Asociaţiunii matematice, — Birou pentru soluţiunea problemelor. — Marchizul şi îngrijitorul de moşie ; o poveste din secolul XVIII, de G. N. WILSON. Căi laterale în matematicile elementare, de F. C. BOON. O extindere a teoremei lui VANDERMONDE şi câteva aplicaţiuni, de N. R. C. DOCKERAY. Matematica şi psicologia, de H. T. H. PIAGGIO. Demonstraţii operaţionale ale unor identităţi, de W. H. MCCREA. Transportabilitatea cadranului solar, de D. M. Y. SOMMERVILLE. Unghiurile triunghiurilor pedale, de C. O. TUCKEY.

Mathesis. Tomul XLVII. Anul 1933. No. 2. Februarie. Gembloux. Câteva proprietăţi ale conicelor şi cuadricelor, de D. V. IONESCU. Asupra triunghiurilor ortogonal înscrise în trei drepte ale spaţiului, de R. DEAUX. Deslegarea grafică a unei ecuaţii trigonometrice, de M. DEWECK. Notă de geometrie infinitesimală asupra cosoidei drepte, de R. GOORMAGHTIGH.

Boletin Matematico. Anul V. No. 11. Ianuarie 1933. Buenos Aires. Asupra sistemelor lineare de neegalităţi, de F. LA MENZA. Determinarea conicelor prin mijlocul elementelor proprii, de J. C. ABRUTI.

Boletin Matematico Elemental. Anul III. No. 11. Ianuarie 1933. Buenos Aires.

Journal de Mathématiques Élémentaires publié par H. VUIBERT. Paris. Anul 57. No. 10. Februarie 1933.

Idem. No. 11. Martie 1933.

Idem. No. 12. Martie 1933.

Bulletin Mathématique de la Societé Roumaine des Sciences. No. 33—34. Bucureşti. Asupra polinoameler care formează un şir APPEL, de T. POPOVICIU. Asupra unei aplicaţiuni a teoremei lui LANDAU de G. CĂLUGĂREANU. Sur la meilleure valeur à posteriori d'une variable aléatoire, de N. GEORGESCU. Sur la définition fonctionelle des polynomes et quelques formules à deux et à trois niveaux, de N. CIORĂNESCU. Une équation fonctionelle rencontrée dans l'intégration de l'équation $s = f(x, y)$ avec certains conditions initiales, de N. CIORĂNESCU. Sur le couple de congruences stratifiables, par AL. PANTAZI. Sur le deplassement affine, par O. ONICESCU. Les applications de la loi normale dans le cas des variables interdépendantes, par G. MIHOC.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. Martie 1933. Timişoara. O teoremă relativă la conice, de C. COŞNIŢĂ.

Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932.

I. BAND. Bericht und Allgemeine Vorträge. II. BAND. Section-Vorträge, von Dr. WALTER SAXER. Zürich 1933.

Primul volum de 335 pagini conţine lucrările pregătitoare ale Congresului, Darea de seamă a şedinţelor Congresului cu lista participanţilor, procesele-verbale ale şedinţelor, cuvântările şi conferinţele generale ţinute de

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Fueter, Caratheodory, Julia, Tschebotarow, Cartan, Bierbach, Morse, Noether, Bohr, Severi, Nevanlinna, Wavre, Alexander, Riesz, Valiron, Sierpinsku, Bernstein, Menger, Stenzel.

Al doilea volum conţine comunicările făcute în secţiunile de Algebră cu Teoria numerelor; Analiză; Geometrie; Calculul probabilităţilor cu matematica asigurărilor şi cu statistica; matematica technică cu Astronomia; Mecanica cu fizica matematică; Filosofia cu istoria: Pedagogia cu dările de seamă ale şedinţelor Comisiunii internaţionale a învăţământului matematic; care toate ocupă 367 pagini. Printre comunicări găsim şi pe cele ţinute de matematicianii români R. Badescu, M. Nicolescu, R. Raclis, P. Sergescu, G. Ţiţeica, G. Vrânceanu. Comunicările sunt publicate în rezumate foarte scurte.

Din răsfoirea acestor volume se poate vedea că multe din cele ce am spus în 1908 în *Gazeta Matematică* Anul XIII pag. 257 cu ocaziunea Congresului al IV-lea dela Roma se aplică şi acum. Prea puţine chestiuni de interes internaţional faţă de cele de interes personal sau naţional. In cele două volume nu sunt chestiuni de ordin internaţional de cât vreo 10 pagini! Nici un rezultat în privinţa unificării nomenclaturii şi notaţiilor, în privinţa uşurării cercetărilor istorice şi bibliografice, în privinţa învăţământului matematicilor în privinţa unificării metodelor în matematica tecnică, în privinţa formării archivelor de matematică, etc. De aceia Congresele nu au deseori alt rezultat de cât a stabili cunoştinţe şi relaţiuni între cei ce se ocupă cu aceleaşi discipline însă ele nu pot fi „un preludiu la acea fraternitate universală, pe care ştiinţa o cunoaşte, şi pe care politica azi o ignorează şi o suspectează", cum spunea primarul Romei în 1908.

I. Ionescu.

Gustave Juvet. *Leçons d'analyse vectorielle. Première parte : Géométrie différentielle de courbes et des surfaces. Théorie mathématique des champs.* Lausanne. Librairie F. Rouge & Gauthier-Villars et C-ie. Paris, 1933.

Acesta e cursul pregătit de autor pentru Şcoala de ingineri din Lausana, în care se expune elementar analiza vectorială, presupunând însă primele cunoştinţe de analiză matematică. Primul Capitol tratează despre algebra vectorială, următorul despre Geometria infinitezimală şi curbele în spaţiu, care se continuă şi în Cap. III împreună cu chestiuni referitoare la suprafeţe. In Cap. IV şi V se dă teoria câmpurilor, operatorii diferenţiali şi transformarea integralelor multiple. Aci se tratează din punct de vedere pur matematic chestiuni care în alte tratate se găsesc lăsate pe lângă chestiunile de fizică la care se refer. Aplicaţiunile de această natură autorul le-a lăsat pentru un al doilea volum. Capitolele însă conţin aplicaţiuni şi au la fine exerciţii cu care se pot lămuri chestiunile tratate.

Cartea este scrisă clar şi elementar şi poate folosi studenţilor în ştiinţe şi elevilor ingineri care vor să se pună în curent şi să aprofundeze metoda vectorială.

I. I.

R. Risser & C. E. Traynard. *Les principes de la statistique mathématique.* Paris, 1933. Gauthier-Villars et C-ie. 80 fr.

Acest volum de 338 pagini este fascicola IV din Tomul I al colecţiunii: *Les principes de la théorie des probabilités*, care apare sub direcţiunea D-lui E. Borel, Volumul se ocupă cu aplicarea calculului probabilităţilor la interpretarea rezultatelor statistice şi la deducerea unor legi din ele. După o scurtă introducere, volumul este împărţit în două părţi.

Partea I conţine următoarele capitole: 1. Clasări. Tabele de numere. Reprezentări grafice. 2. Medii şi momente. 3. Poligon binomial. Curbele lui Pearson. 4. Preciziunea constantelor calculate. Caractere ale unei distribuţiuni normale. Variaţiuni seculare. 5. Împărţirea curbelor de frecuenţă.

Partea II care se ocupă de corelaţiuni şi covariaţiuni cuprinde capitolele: 1. Dependenţă şi corelaţiune. Metode vechi pentru calculul indicelui de dependenţă a două serii statistice. 2. Legături stocastice şi dependenţă funcţională între mărimi variabile. Examinarea procedeurilor destinate determinării şi reprezentării legăturii stocastice. Cazul a două variabile accidentale, legate într'un mod stocastic. 4. Serii statistice cu dublă intrare şi datele observaţiunii. 5. Alegerea mărimilor a priori după materialul empiric sau datele experienţei. 6. Legea Laplace-Gauss. Desvoltări mai apropiate. Generalizare. Introducerea corelaţiunii totale şi a coeficienţilor de corelaţie parţială. 7. Revenire asupra coeficienţilor de covariaţiune. Curbe medii şi utilizarea metodei diferenţelor.

La fine este o *notă complimentară* asupra unui nou indice de măsura dependenţei în corelaţiune, după Steffensen şi alta asupra seriilor statistice şi criteriilor care servă de a deduce funcţiunile de frecuenţă din aceste serii. Volumul se închee cu o *Concluziune*. In ea autorii arată că metodele expuse permit studiul în totalitate a problemelor de ordin statistic şi cercetări în domenii noi. Experienţele trebuiesc corect interpretate, apoi deduşi coeficienţii şi rapoartele din cifrele culese, fără a pierde din vedere obiectul primordial al studiului, şi a supune rezultatele unei critice severe. Statistica matematică nu e un aparat automatic în care se introduc elementele observate şi de unde să iasă, după unele operaţiuni, soluţia problemei. Statistica cere serioase studii pregătitoare; statisticianul trebuie să rămâie necontenit în contact cu faptele, şi când nu le poate discerne în realitatea lor obiectivă să cerceteze terenuri mai proprii. El trebuie să unească spiritul de finetă cu cel geometric; el nu trebuie să fie înăbuşit de cifre nici influenţat de mirajul rigoarei aparente a rezultatelor. Numai astfel se poate avea un statistician de calitate capabil, de a utiliza metodele moderne.

Modul cum se pot atinge aceste rezultate e arătat în opera autorilor cu toate desvoltările şi cu exemple numeroase.

I. I.

Anuarul Liceului şi Şcoalelor Comerciale „M. Kogălniceanu“, pe anii 1922 — 1932. *Zece ani din viaţa unei Instituţii particulare cu drept de publicitate*. Iaşi. 1932.

N. Botea. *Sur quelques équations aux dérivées partielles.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* din Paris). Paris 1932.

JEAN CHAZY. **Cours de Mecanique Rationnelle. Tome I. Dynamique du point materiel.** Este o parte a cursului făcut de D-l CHAZY la Facultatea de ştiinţe din Paris. Coprinde următoarele capitole :

Cap. I. Despre vectori, un studiu destul de desvoltat al vectorilor, în special în ceeace priveşte operaţiile algebrice cu vectorii şi sistemele de vectori, introduce şi noţiunea de vector derivat şi diferenţiale de vectori; sensul care îl consideră direct, este invers de cel ce se ia obişnuit, deasemenea notaţiunele relative la înmulţiri vectoriale şi scalare sunt deosebite. Cap. II tratează despre *Principiile mecanicei,* presupunând cinematica cunoscută ; discută amănunţit sensul acestor principii, în special în ceeace priveşte forţele relative, indicând ordinul de mărime al forţelor complimentare în mişcarea relativă pe suprafaţa Pământului. Cap. III se referă la *Teoremele generale în mişcarea punctului material,* în care face larg uz de metodele vectoriale. In Cap. IV studiază *Mişcarea rectilinie a punctului material,* punând în evidenţă că rezultatele se aplică în genere la mişcarea unui punct a cărei poziţie depinde de un singur parametru; studiază amănunţit cazurile când forţa depinde numai de o variabilă: timp, spaţiu sau iuţeală. Cap. V tratează despre *Mişcarea curbilinie a punctului,* cu aplicaţii speciale la mişcarea corpurilor grele în vid şi în aer, precum şi la mişcarea corpurilor din sistemul solar. In Cap. VI şi VII se studiază *Mişcarea unui punct pe o curbă şi pe o suprafaţă,* discută amănunţit cazul pendulului circular, cicloidal, sferic, etc ; în mişcarea punctului pe o suprafaţă introduce ecuaţiile lui LAGRANGE. In Cap. VIII studiază *Echilibru şi mişcarea unui punct în raport cu Pământul,* arătând care e influenţa forţelor centrifuge şi centrifuge compusă. Intr'un capitol complimentar se dă enunţurile chestiunelor propuse în ultimii ani (1928 — 1932) la facultatea de ştiinţe din Paris, pentru certificatul de Mecanică raţională.

Lucrarea se citeşte cu uşurinţă. Este expusă clar şi în spirit universitar, adică chestiunile sunt discutate mai ales din punctul de vedere analitic şi al principiilor; ea poate fi citită cu folos şi de cei care studiază mecanica în vederea aplicaţiilor practice.

A. G. I.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 2. Anul XXI, pag. 24.

Cercetând un studiu al lui C. ERBICEANU am fost condus să cred că GHEORGHE CONSTANDA e matematicianul român de care vorbeşte DR. C. ISTRATI. O lucrare a D-lui N. BĂNESCU ; *«Viaţa şi opera lui* DANIEL PHILIPPIDE» (Cluj 1924) şi *Anuarul Institutului de Istorie naţională,* dau lămuriri preţioase despre CONSTANDA. De fapt el se numia GRIGORE, cum spunea DR. C. ISTRATI şi era rudă cu PHILIPPIDE. In 1791 PHILIPPIDE şi GR. CONSTANDA tipăresc la Viena o *«Geografie modernă»* în greceşte, pe care o dedică lui POTEMCHIN. CONSTANDA fusese chemat în 1790 să ocupe catedra lui NEOFIT CAVSOCALIVITUL la *«Academia Domnească»* din Bucureşti, dar părăseşte principatele pentru studii la Viena. In 1803 îl găsim că părăseşte o catedră pe care o avea în *Ambelalakis*..

In acest din urmă an apare la Viena traducerea grecească a Astronomiei lui LALANDE, cu cheltuiala lui GAZI, creatorul unei *«Academii de ştiinţe»* efemere la Iaşi. Traducerea e semnată de D. PHILIPPIDE, dar e probabil că şi CONSTANDA a colaborat cu ruda sa.

PHILIPPIDE, CONSTANDA şi GAZI erau din Milies, la poalele muntelui Bolion. Scopul *«Academii»* lui GAZI era să întemeieze o şcoală (Academie) de filologie greacă şi latină, de fizică şi matematică în Tesalia, lângă Pelion, Turcii neincuviinţând această şcoală, găsim pe CONSTANDA către 1810 profesor în Mânăstirea Sf. Nicolae de lângă Milies.

D. PHILIPPIDE a trăit mult în Austria şi în Elveţia; a făcut studii de ştiinţe exacte în Franţa, dar cea mai mare parte din viaţa lui a trăit-o în Moldova, murind lângă Bălţi în 1832. El a scris o *«Geografie a României»*. foarte însemnată, publicată, în părţile ei esenţiale de D-l N. BĂNESCU. Cât despre CONSTANDA, îl mai întâlnim în luptele Eteriei în Peloponez.

P. SERGESCU.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 6 Martie. D-l D. BARBILIAN a făcut un referat asupra unei chestiuni de geometrie, D-l P. POPOVĂŢ a vorbit despre o aplicaţiune a afinităţii în cinematică. D-l M. GHERMĂNESCU a depus o lucrare de analiză.

In şedinţa dela 20 Martie D-l L. TEODORIU a făcut un referat asupra unor lucrări de mecanică relativă la turbulenţe, D-l AL. PANTAZI o comunicare asupra unor congruenţe speciale şi D-l M. GHERMĂNESCU asupra unor ecuaţii cu diferenţe finite.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3367. *Se împart laturile triunghiului* ABC *în acelaş raport* m : n, *mergând în acelaş sens. Fie* A_1, B_1, C_1 *punctele astfel căpătate respectiv pe laturile* BC, CA, AB. *Procedăm la fel cu triunghiul* $A_1B_1C_1$ *împărţind laturile sale tot în raportul* m : n, *Fie* S, S_1, S_2, S_3, . . . *ariile triunghiurilor* ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, *etc. Se cere să se afle în funcţie de* S, m, n *limita sumei:*

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots + Sp + \ldots$$

EUG. BALAN.

Fără să mai facem figura se știe că toate triunghiurile astfel căpătate sunt asemenea între ele și asemenea lui ABC.

Raportul de asemănare a laturilor fiecăruia din ele cu a celuilalt următor este $\frac{m}{n}$. Să exprimăm suprafața triunghiului ABC în funcție de laturi; este următoarea:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Să exprimăm suprafața triunghiului A, B, C, în funcție de suprafața triunghiului ABC și avem:

$$S_1 = \frac{m^2}{n^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

Deci suma a cărui limită voim s'o aflăm este o progresie geometrică care are ca rație $\frac{m^2}{n^2}$;

$$\Sigma_{p+q} = S\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{m^4}{n^4} + \frac{m^6}{n^6} + \dots\right)$$

$$= S\left(\frac{\frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{m^2}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{Sm^2}{n^2 - m^2}$$ c. c. t. d.

NICOLAU V. GH.
Cl. VII R Liceul „Codreanu" Bârlad.

---

*PROBLEMA 3548. *Cari sunt patratele sub 1.000.000 cu ale căror cifre putem forma o progresie aritmetică ?*

GH. GH. VASILIU.

Soluție dată de D-nii: GHEORGHE TH. GHEORGHIU (Galați), I. I. ILIUȚĂ-DĂBULENI (Lic. Caracal), I. MURĂROIU (Lic. Brașov), I. Z. PANȚU (Lic. Lazăr) și N. ALDEA (M-rea Dealu).

Deoarece o progresie aritmetică are minimum trei termeni, pătratele căutate vor fi de trei, patru, cinci şi şease cifre.

Pentru a rezolva problema, vom utiliza tabelul ultimelor trei cifre cu care se termină un patrat perfect dat în G. M., XXXIII, pag. 138.

Patrate de trei cifre. Conform enunţului patratele căutate se pot forma cu grupele de cifre:

(0, 1, 2) ; (1, 2, 3) ; (2, 3, 4) ; (3, 4, 5) ; (4, 5, 6) ; (5, 6, 7) ; (6, 7, 8) ; (7, 8, 9).

(0, 2, 4) ; (1, 3, 5) ; (2, 4, 6) ; (3, 5, 7) ; (4, 6, 8) ; (5, 7, 9).

(0, 3, 6) ; (1, 4, 7) ; (2, 5, 8) ; (3, 6, 9).

(0, 4, 8) ; (1, 5, 9).

Orice număr format cu un grup din aceste numere este M3, deci fiind şi patrat perfect va trebui să fie M9, ceeace ne face să eliminăm grupele a căror număr nu este M9. Ne rămâne astfel numai grupele:

(2, 3, 4) ; (5, 6, 7) ; (1, 3, 5) ; (4, 6, 8) ; (0, 3, 6) şi (3, 6, 9).

Ţinând seamă de ultimele trei cifre cu care se termină un patrat perfect, sau chiar numai de ultimele două, observăm că putem forma numai numerile:

$$324 = 18^2 \quad ; \quad 576 = 24^2 \quad \text{şi} \quad 036 = 6^2$$

cari constituesc soluţiuni.

Patrate de patru cifre. Grupele de patru cifre ce se pot forma, conform enunţului problemei, sunt:

(0, 1, 2, 3) ; (1, 2, 3, 4) ; (2, 3, 4, 5) ; (3, 4, 5, 6) ; (4, 5, 6, 7) ; (5, 6, 7, 8) ; (6, 7, 8, 9).

(0, 2, 4, 6) ; (1, 3, 5, 7) ; (2, 4, 6, 8) ; (3, 5, 7, 9).

(0, 3, 6, 9).

Din aceste grupe eliminăm pe acele a căror sumă a cifrelor este M3 fără să fie M9 şi ne rămân grupele:

(1, 2, 3, 4) ; (2, 3, 4, 5) ; (3, 4, 5, 6) ; (4, 5, 6, 7) ; (5, 6, 7, 8).

(1, 3, 5, 7) ; (2, 4, 6, 8).

(0, 3, 6, 9).

Ținând seamă de ultimele trei cifre cu cari se termină un patrat perfect, vom forma numerele :

Grupul de cifre	Numerile ce se pot forma	Numerile cari sunt patrate perfecte
1, 2, 3, 4	4321 , 3241 , 3124 , 1324	—
2, 3, 4, 5	5324 , 3524	—
3, 4, 5, 6	5364 , 3564 , 5436 , 4356, 3456	$4356 = 66^2$
4, 5, 6, 7	7564 , 5764 , 7456 , 4756, 5476 , 4576	$5476 = 74^2$
5, 6, 7, 8	8756 , 7856 , 8576 , 5876	—
1, 3, 5, 7	—	—
2, 4, 6, 8	8624 , 6824 , 8264 , 2864, 6284 , 2684	—
0, 3, 6, 9	9036 , 0936 , 3096 , 0396, 3609	—

Patrate de cinci cifre. Grupele de câte cinci cifre în progresie aritmetică sunt :

(0, 1, 2, 3, 4) ; (1, 2, 3, 4, 5) ; (2, 3, 4, 5, 6) ; (3, 4, 5, 6, 7) ; (4, 5, 6, 7, 8) ; (5, 6, 7, 8, 9).

(0, 2, 4, 6, 8).

(1, 3, 5, 7, 9).

Eliminând grupele a căror sumă a cifrelor este M3 fără să fie M9 ne mai rămâne :

(0, 1, 2, 3, 4) ; (2, 3, 4, 5, 6) ; (3, 4, 5, 6, 7) ; (5, 6, 7, 8, 9).

(0, 2, 4, 6, 8).

(1, 3, 5, 7, 9).

Ţinând seamă de ultimele trei cifre cu cari se termină un patrat perfect, vom forma deasemenea numerele:

Grupul de cifre	Numerele ce se pot forma	Numerele cari sunt patrate perfecte
0, 1, 2, 3, 4	34201 , 23401 , 04321 , 23041 43201 , 32401 , 40321 , 32041	$32041 = 179^2$
	03241 , 23104 , 13204 , 12304 30241 , 32104 , 31204 , 21304	$23104 = 152^2$
	13024 , 03124 , 01324 31024 , 30124 , 10324	
2, 3, 4, 5, 6	56324 , 36524 , 35624 , 35264 , 25364 65324 , 63524 , 53624 , 53264 , 52364	—
	23564 , 34625 , 45236 , 25436 , 24536 32564 , 43625 , 54236 , 52436 , 42536	
	34256 , 24356 , 23456 43256 , 42350 , 32456	
3, 4, 5, 6, 7	57364 , 37564 , 35764 , 57436 , 47536 75364 , 73564 , 53764 , 75436 , 74536	—
	45736 , 45376 , 35476 , 34576 54736 , 54376 , 53476 , 43576	
5, 6, 7, 8, 9	89756 , 79856 , 78956 , 89576 , 59876 98756 , 97856 , 87956 , 98576 , 95876	—
	58976 , 78596 , 58796 , 57896 , 78569 85976 , 87596 , 85790 , 75896 , 87569	
	58769 , 57689 85769 , 75689	
0, 2, 4, 6, 8	68204 , 28604 , 26804 , 68024 , 08624 86204 , 82604 , 62804 , 86024 , 80624	—
	06824 , 28064 , 08264 , 02864 , 26084 60824 , 82064 , 80264 , 20864 , 62084	
	06284 , 02684 60284 , 20684.	

Cu ultima grupă a cifrelor *1, 3, 5, 7, 9,* fiind toate impare nu se poate forma patrate perfecte.

Patrate de şease cifre. Grupele de şease cifre în progresie aritmetică sunt:

(0, 1, 2, 3, 4, 5) ; (1, 2, 3, 4, 5, 6) ; (2, 3, 4, 5, 6, 7) ;

(3, 4, 5, 6, 7, 8) ; (4, 5, 6, 7, 8, 9).

Eliminând grupele cari sunt M3 fără a fi M9 ne rămâne numai grupa:

2, 3, 4, 5, 6, 7.

Ultimele trei cifre ale patratului format poate fi deci:

324, 524, 624, 724, 264, 364, 564, 764, 625, 236, 436, 536, 736, 256, 356, 456, 756, 276, 376, 476 şi 576.

Numerele ce putem forma vor fi:

567324, 576324, 756324, 765324, 675324, 657324; 367524, 376524, 736524, 763524, 673524, 637524; 357624, 375624, 735624, 753624, 573624, 537624; 356724, 365724, 635724, 653724, 563724, 536724; 357264, 375264, 735264, 753264, 573264, 537264; 257364, 275364, 725364, 752364, 572364, 527364; 237564, 273564, 723564, 732564, 372564, 327564; 235764, 253764, 523764, 532764, 352764, 325764; 347625, 374625, 734625, 743625, 473625, 437625; 457236, 475236, 745236, 754236, 574236, 547236; 257436, 275436, 725436, 752436, 572436, 527436; 247536, 274536, 724536, 742536, 472536, 427536; 245736, 254736, 524736, 542736, 452736, 425736; 347256, 374256: 734256, 743256, 473256, 437256; 247356, 274356, 724356, 742356, 472356, 427356; 237456, 273456, 723456, 732456, 372456, 327456; 234756, 243756, 423756, 432756, 342756, 324756; 345276, 354276, 534276, 543276, 453276, 435276; 245376, 254376, 524376, 542376, 452376, 425376; 235476, 253476, 523476, 532476, 352476, 325476; 234576, 243576, 423576, 432576, 342576, 324576.

Dintre cari nici unul nu este patrat perfect.

Avem în total soluţiunile:

$036 = 6^2$; $324 = 18^2$; $576 = 24^2$; $4356 = 66^2$

$5476 = 74^2$; $23104 = 152^2$ şi $32041 = 179^2$

adică *şapte soluţiuni.*

Observaţiuni :

1) D-l Vladimir Crivăţ a dat toate soluţiunile, însă cu un raţionament mai sumar.

2) Idem D-l H. P. Ionescu, care a dat numai cinci soluţii.

3) Celelalte soluţiuni primite constituiau numai vagi indicaţiuni de rezolvare a problemei.

4) Dacă s'ar fi pus condiţiunea ca cifrele să fie în progresie aritmetică cu raţia întreagă şi > 1 am găsi numai grupul de cifre *(1, 2, 4, 8)* şi *(1, 3, 9)* cu care nu se poate forma nici un patrat perfect, nici de 3 nici de 4 cifre. Dacă raţia ar fi fost fracţionară $\left(\frac{2}{3}\right)$ sau $\left(\frac{3}{2}\right)$ aveam micul grup de cifre *(4, 6, 9)* cu care nu se poate forma nici un patrat perfect.

I. L.

PROBLEMA 3613. *Se cere patratul* dmszu *în care* dm *şi* zu *sunt patrate, iar* s *rădăcina unuia din aceste din urmă patrate.*

P. N. Theodor.

Cazul 1: s este rădăcina lui dm. Admiţând şi soluţiile formale în care *d* este zero, numerele *dmszu* cerute se vor găsi printre numerele

$$000zu\ ;\ 011zu\ ;\ 042zu\ ;\ 255zu\ ;\ 366zu\ ;\ 497zu\ ;$$
$$648zu\ ;\ 819zu.$$

Este evident că $000zu$ este patrat perfect, soluţie formală a problemei, pentru toate valorile lui *zu* care sunt patrate perfecte. Avem astfel următoarea serie de 10 soluţii formale neinteresante

$$00000\ ;\ 00001\ ;\ 00004\ ;\ 00009\ :\ 00016\ ;\ 00025\ ;$$
$$00036\ ;\ 00049\ ;\ 00064\ ;\ 00081.$$

Să caut acum care din numerele $11zu$ sunt patrate perfecte. Fac extragerea rădăcinei acestui număr după regulile cunoscute, dispunând calculile astfel

$$\begin{array}{r|l} 11.zu & 3 \\ \hline 9 & 6 \\ \hline 2z.u & \end{array}$$

6 în $2z$ poate intra de 3 sau de 4 ori. Continuând operaţia extragerei rădăcinei avem respectiv

$$63 \times 3 = 189 \quad \text{sau} \quad 64 \times 4 = 256$$

de unde rezultă

$$2zu = 256 \quad \therefore \quad zu = 56$$

care nefiind patrat perfect, nu e admisibil pentru soluţia problen ei.

Examinând la fel pe 042*zu* se găsește a 11-a soluție formală

$$04225 = 65^2.$$

Să mai repetăm aici operația extragerii de rădăcină pentru primul din celelalte numere:

2 . 55 . *zu*	159, . . .
1	2 . 5 × 5 = 125
15 . 5	30 . 9 × 9 = 2781
12 . 5	
30*z* . *u*	
278 1	

Cum diferența 30*zu* − 2781 nu poate fi zero pentru nici o valoare a lui *zu* rezultă că 255*zu* nu poate fi patrat perfect. La fel se arată, că nici unul din celelalte numere rămase nu sunt patrate perfecte.

Cazul II. s este rădăcina patrată a lui zu.

Avem:

$s = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9$

$zu = 00 ; 01 ; 04 ; 09 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81$

deci numărul căutat poate fi între numerele

*dm*000 ; *dm*001 ; *dm*204 ; *dm*309 ; *dm*416 ;
*dm*525 ; *dm*636 ; *dm*749 ; *dm*864 ; *dm*981.

*dm*000 nu poate fi patrat perfect, fiind terminat cu 3 zeruri.

De asemeni nu sunt patrate perfecte numerele *dm*101, *dm*309, *dm*525, *dm*749, *dm*981 conform notei Col. Gh. Buicliu dela pag. 137, Vol. XXXIII, *Gazeta Matematică*.

Să examinăm celelalte numere rămase. Pentru ca *dm*204 să fie patrat perfect, trebue ca

$$dm204 = (500n \pm 198)^2 = N^2 \qquad (1)$$

conform articolului *Asupra ultimului grup de* p *cifre ale patratelor perfecte* al D-lui I. V. Mătieș, publicat la pagina 366, Vol. XXXVII, *Gazeta Matematică*. Ținând seamă că pentru ca N^3 să fie de 5 cifre trebue ca

$$100 \leqslant N \leqslant 316$$

nu se poate lua în (1) decât

$N = 198$ pentru $n = 0$

$N = 500 - 198 = 302$ pentru $n = 1$

dar $198^2 = 39204$; $302^2 = 91204$

nu răspund celorlalte condițiuni ale problemei.

Urmând pe această cale se găseşte că singura soluţie a cazului II este

$$36864 = 192^2$$

care este în realitate singura soluţie a problemei.

Observaţiuni. 1°. Problema se poate rezolva şi în felul următor. Pentru cazul I trebuie să avem

$$s^2 \times 1000 + s \times 100 + zu = N^2$$

$$99 < N < 317$$

$$\therefore \qquad 100s\,(10s + 1) = N^2 - zu.$$

Se dau lui *zu* pe rând toate valorile pe care le poate avea, şi se rezolvă ecuaţia ce rezultă, în numere întregi după metodele întrebuinţate în numeroasele probleme analoage.

2°. Au rezolvat problema găsind rezultatul exact prin numeroase ridicări la patrat şi încercări D-nii : N. Aldea, P. Almăjan, I. N. Aliman, A. V. Angelescu, T. G. Baciu, G. P. Boerescu, D. V. Bolgar, I. P. Bucur, A. Burichovici, C. Coşniţă, N. Costache, I. N. Craiu, V. I. Crivăţ, T. Curcubătă, Hr. Şt. Dăscălescu, M. S. Davidsohn, O. C. Diaconu, V. Gh. Drăguţ, I. P. Gheorghe, P. I. Ghişoiu, Gr. I. Gruberman, C. Hamerak, E. St. Iacob, I. Iliuţă-Dăbuleni, C. D. Ionescu-Ţiu, H. P. M. Ionescu, D. Iovănescu, Z. Jumanca, Gr. Mareş, M. Margulius, D. V. Melinte, M. Mirică, I. C. Mocănescu, M. D. Motoc, I. Murăroiu, I. Z. Panţu, N. A. Paraschiv, V. Pârvu, G. M. Păun, N. Pavel, I. Gh. Popa, D. M. Popescu, Gh. Gh. Popescu, St. D. Popescu, V. C. Popescu, I. C. Râmniceanu, N. Gr. Rentea, D. Roşanu, I. V. Sassu, A. Savin, I. C. Savin, O. A. Schor, D. V. Şerban, A. I. Stan, C. M. Stănescu, R. Tomescu, M. I. Ungheanu, I. N. Vâlceanu, N. Velicescu, T. Velicescu, N. Gh. Voicu, I. C. Wassermann, N. O. Zaharia şi Gh. O. Zamfirescu.

3°. D-l V. Gh. Drăguţ a găsit şi soluţia formală 04225.

Gh. B.

PROBLEMA 4079. *Se consideră un cerc* (C) *cu raza variabilă şi cu centrul în centrul elipsei*

$$a(x^2 + y^2) - bxy + (b^2 - 2a^2)\,x - aby + a^3 - 1 = 0.$$

Se cere ecuaţia fascicolului de drepte care unesc centrul elipsei cu punctele ei de intersecţie cu cercul (C) *şi să se deducă apoi suprafaţa elipsei.*

V. C. Popescu.

I. Ecuaţia redusă a elipsei, se găseşte uşor că este :

$$(1) \qquad (2a - b)\,x^2 + (2a + b)\,y^2 - 2 = 0.$$

Fie

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

un cerc de rază variabilă R și concentric cu elipsa. Conica care trece prin intersecția curbelor (1), (2) este:

$$(3)\quad (2a-b)x^1+(2a+b)y^3-2+\lambda(x^2+y^2-R^2)=0.$$

Știind că (3) trece prin centrul (0, 0) al elipsei (1) se găsește:

$$\lambda=\frac{-2}{R^2}$$

așa că conica (3) devine:

$$(4)\quad \left(\frac{2a-b}{2}-\frac{1}{R^2}\right)x^2+\left(\frac{2a+b}{2}-\frac{1}{R^2}\right)y^2=0$$

care este ecuația sistemului de drepte cerut în enunț.

II. Pentru a afla suprafața elipsei (1), îi pun ecuația sub forma clasică

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{2a-b}}\right)^2}+\frac{y^3}{\left(\sqrt{\frac{2}{2a+b}}\right)^2}-1=0$$

punând în evidență valoarea mărimei axelor. Cu aceasta suprafața cerută, S, este dată de:

$$S=\Pi\sqrt{\frac{2}{2a-b}}\sqrt{\frac{2}{2a+b}}=\frac{4\Pi}{4a^2-b^2}.$$

III. Discuție. Elipsa (1) este reală numai dacă:

$$(5)\qquad 2a-b>0.$$

$$(6)\qquad 2a+b>0.$$

Din (6) se vede că nu se poate avea simultan $a<0$, $b<0$ iar din (5) se vede că nu se poate avea $a<0$ căci aceasta ar antrena $b<0$, ceeace nu se poate. Deci avem de considerat numai următoarele 2 cazuri:

Cazul I. $a>0$, $b>0$. In acest caz

$$0<2a-b<2a+b$$

și

$$\frac{1}{2a+b}<\frac{1}{2a-b}$$

așa că pentru ca (C) să taie elipsa în 4 puncte reale, trebuie să avem:

$$(7)\qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2a+b}}<R<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2a-b}}.$$

Cazul II. $a > 0$, $b < 0$. In acest caz $b = -b' < 0$ şi

$$\begin{aligned} 2a - b &= 2a + b' > 0 \\ 2a + b &= 2a - b' > 0 \end{aligned} \qquad \therefore \quad 2a + b' > 2a - b'$$

aşa că condiţia de realitate a celor 4 puncte devine:

$$(8) \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2a - b}} < R < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2a + b}} .$$

In definitiv dreptele (4) sunt reale numai dacă R satisface neegalităţile (7) în cazul I sau neegalităţile (8) în cazul II.

Observaţiuni. — 1°. Au rezolvat problema foarte bine, fără a discuta valorile lui R, D-nii: S-LT. I. C. SAVIN şi M. MARGULIUS (Lic. Sp. Haret Buc.),

2°. D-l V. C. POPESCU, proprietarul problemei, a rezolvat-o fără a reduce ecuaţia la centru şi axe, ci numai reducând-o la centru.

3°. Partea întâi a problemei se poate rezolva cu uşurinţă în cazul unei conice oarecare, dată prin ecuaţia:

$$F(x, y) = 0.$$

Fie (a, b) centrul acestei conice, determinat de sistemul:

$$F'_x = 0 \quad ; \quad F'_y = 0$$

şi

$$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - \lambda^2 = 0$$

ecuaţia unuia din cercurile concentrice cu conica dată.

Fie în fine

$$F(x, y) + \mu f(x, y) = 0$$

ecuaţia uneia din conicele Γ care trece prin intersecţiile cercului f cu conica F. Se ştie şi se poate demonstra uşor că punctele A, B, C, D, de intersecţie a cercului f cu conica F sunt pe 2 diametri ai acestei conice. Prin urmare o conică Γ, care trece prin A, B, C, D şi centrul conicei F se reduce la 2 diametri ai acestei conice, adică la fascicolul cerut în enunţul problemei 4079. Deci pentru a găsi acest fascicol vom impune ecuaţiei Γ condiţia că trece prin centrul lui F, adică:

$$F(a, b) + \mu f(a, b) = 0$$

$$\therefore \qquad \mu = -\frac{F(a, b)}{f(a, b)}$$

aşa că se poate enunţa următoarea teoremă:

Ecuaţia

$$F(x, y) f(a, b) - F(a, b) f(x, y) = 0$$

este fascicolul de drepte care trece prin intersecţia conicei

$$F(x, y) = 0$$

de centru (a, b), *cu cercul*

$$f(x, y) = (x, - a)^2 + (y - b)^2 - \lambda^2 = 0.$$

COL. GH. BUICLIU.

PROBLEMA 4109. *Să se rezolve ecuația*

$$8\cos^3 x - 4(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)\cos^2 x + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6})\cos x - \sqrt{6} = 0.$$

I. C. SAVIN.

Soluție dată de D-rele: A. HORTOPAN, M. LEBER, M. ȚERNA și D-nii: N. N. ALDEA, A. BĂDESCU, I. CURCHI, HAR. P. IONESCU-BISS, C. IVĂNESCU, M. MĂNESCU, M. MARGULIUS, M. L. NEGREA, NUBAR ARTAKI, ST. OLTEANU, EM. PĂNOIU, I. PAREPEANU, N. PATRAULEA, M. POPESCU-STĂNEȘTI, G. ROȘCA, SUBLT. GH. SÂMBOTIN, I. C. ȘOVA-GRIGORENI, P. VARLAM și N. ZANE.

Ecuația se mai poate ușor scrie

$$(2\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$$

de unde soluțiile

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3},\quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4},\quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

PROBLEMA 4145. *Se consideră cercul circumscris triunghiului* ABC *și fie* D *mijlocul arcului* ABC, *iar* E *mijlocul arcului* BC. *Se descrie cercul* γ *cu centrul în* D *și trecând prin* A *și* C *și fie* F *punctul unde acest cerc e tăiat din nou de* AE.

1°. *Să se arate că punctele* B, D, F *sunt în linie dreaptă.*

2°. *Perpendiculara în* B *pe* BDF *taie pe* AF *în* G, *iar cercul* γ *în* M *și* N. *Să se arate că patrulaterul* BGCF *este inscriptibil în cercul cu centrul în* E.

3°. *Să se arate că* MN *este bisectoarea unghiului* ABC.

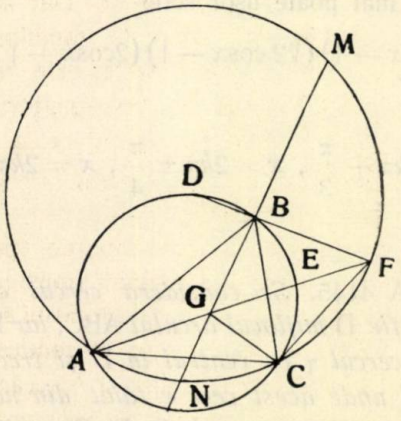
N. ABRAMESCU.

Soluție dată de D-ra M. DRĂGUȚ și D-nii: A. GEJER, MARIUS MARGULIUS, N. N. MIHĂILEANU, I. I. PETRESCU, I. C. PAREPEANU, IANCU N. SAGER.

1°. In cercul ABC, avem $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$, ca având aceeași măsură jumătatea arcului BC. Dar E fiind mijlocul arcului BC, $\sphericalangle FAC = \sphericalangle EAC = \sphericalangle \frac{1}{2} BAC$. In cercul ($\gamma$), unghiul FAC este tot înscris, deci măsura arcului FC este măsura unghiului BAC. Dar în acest cerc, unghiul FDC este la centru, are ca măsură arcul

FC, deci FDC $=$ 2 $\sphericalangle$ FAC $=$ $\sphericalangle$ BAC. Aşa dar $\sphericalangle$ BDC $=$ $\sphericalangle$ FDC, ceeace probează că punctele B, D, F sunt în linie dreaptă.

2^0. $\sphericalangle$ BEA $=$ $\sphericalangle$ BCA $=$ $\sphericalangle$ C, ca având aceeaşi măsură, $\frac{1}{2}$ măs arc ADB. Apoi măs $\sphericalangle$ BFA $=$ $\frac{1}{2}$ [măs arc AD $-$ măs arc BE] $=$ $\frac{1}{2}$ [$(180^0 - \hat{B}) - \hat{A}$] $=$ $\frac{1}{2}\hat{C}$. Deci, în cercul de diametru GF, în care este înscris triunghiul dreptunghic GBF cu unghiul drept GBF, avem $\sphericalangle$ BFG $=$ $\frac{1}{2}$ $\sphericalangle$ BEG; de unde urmează că pe diametrul GF punctul E este centrul acestui cerc, adică BE $=$ GE $=$ EF. Cum BE $=$ EC, rezultă că patrulaterul BGCF este inscriptibil în cercul cu centrul în E.



3^0. $\sphericalangle$ CBE $=$ $\frac{1}{2}$ A. Apoi $\sphericalangle$ GBC $=$ $\sphericalangle$ GBE $-$ $\sphericalangle$ CBE $=$ $(90^0 - \sphericalangle$ EBF$) - \frac{1}{2}$ A $= (90^0 - \sphericalangle$ EFB$) - \frac{1}{2}$ A $= (90^0 - \sphericalangle$ BFA$)$ $- \frac{1}{2}$ A $= 90^0 - \frac{1}{2}$ C $- \frac{1}{2}$ A $= 90^0 - \frac{1}{2}$ (A $+$ C) $= 90^0 - (90^0 - \frac{1}{2}$ B), $\sphericalangle$ GBC $=$ $\frac{1}{2}$ B, de unde rezultă că BG sau MN este bisectoarea unghiului ABC.

Observare. Această problemă mi-a fost sugerată cu ocazia expunerii de către studenţi în Seminarul nostru de Matematici dela Cluj, a unei probleme a D-lui Auric *(Nouvelles Annales de Math.*, 1905, p. 514), *Rezolvarea grafică a ecuaţiei* $x^2 - px + q = 0$, p şi q *fiind oarecare.* Anume se construiesc vectorii $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}p$, $\overrightarrow{OB} = 2\frac{q}{p}$; se ia pe cercul ce trece prin O, A, B mijlocul C al arcului OAB; se descrie din acest punct ca centru un cerc ce trece prin O şi se duce bisectoarea interioară a unghiului OAB, a cărei intersecţie cu cercul cu centrul în C sunt punctele M şi N; rădăcinile ecuaţii sunt OM şi ON.

PROBLEMA 4211. *Să se găsească o fracţie ireductibilă cu numitorul 21 şi alta, iarăşi ireductibilă, cu numărătorul 55, ştiind că suma lor este tot una cu diferenţa dintre îndoitul celei d'întâi şi a doua.*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: S.-Lt. Avram C. Constantin, E. I Mareş (Elev Şc. Politechnică din Bucureşti), P. C. Mazilu (Lic. Internat, Iaşi), M. Mănescu (Lic. Eminescu, Buc.), Martin S. Ziff.

Indoitul primei fracţii micşorată cu a doua este suma primei fracţii cu diferenţa dintre prima şi a doua. Dar acest rezultat este şi suma celor două fracţii; deci diferenţa fracţiilor este tot una cu fracţia cea mică. Reese de aci că aceasta este jumătatea primei. Dacă dar acestei din urmă fracţii îi dăm numitorul $2 \times 21 = 42$ fracţiile devin egale. Chestiunea dar se reduce la următoarea:

Două fracţii egale au una numitorul 42 şi alta numărătorul 55. Se cer acele fracţii.

Aceste două fracţii formează o proporţie, prin egalarea lor. Acestei proporţii îi cunoaştem doi termeni opuşi: 42 şi 55 şi nu cunoaştem pe ceilalţi doi. Ştim însă că produsul acestora trebuie să fie $42.55 = 2.3.5.7.11$. Chestiunea se reduce a descompune acest produs în doi factori primi cu 21 şi 55, căci fracţiile cerute sunt ireductibile. Numărătorul primei fracţii nu poate avea factorii 3 şi 7, iar numitorul celei de a doua nu poate avea factorii 5 şi 11. Deci factorii 5 şi 11 aparţin primei fracţii, iar 3 şi 7 celei de a doua. Factorul 2 poate fi dat oricărei din ele, căci e prim şi cu 21 şi cu 55. Reese de aci că numărătorul primei fracţii poate fi $5 \times 7 = 21$ sau $5 \times 7 \times 2 = 110$ şi numitorul celei de a doua respectiv $3 \times 7 \times 2 = 42$ sau $2 \times 7 = 21$.

Fracţiile căutate sunt dar 55/21 cu 55/42 sau 110/21 cu 55/21. Avem în adevăr:

$$\frac{55}{21}+\frac{55}{42}=2\left(\frac{55}{21}-\frac{55}{42}\right), \quad \frac{110}{21}+\frac{55}{21}=2\left(\frac{110}{21}-\frac{55}{21}\right).$$

PROBLEMA 4222. *Laturile unui dreptunghiu sunt în raportul 1 : 1,5129, iar aria lui este echivalentă cu a unui patrat de 7, 925 m. latură. Care este raportul dintre perimetrul dreptunghiului şi al patratului? Rezultatul se va da cu două zecimale exacte.*

I. Ionescu.

In enunţul problemei, atât la pagina 239 cât şi la pag. 141, unde a fost dată ca una din chestiunile de aritmetică ce am propus la examenul de admitere în anul preparator al Şcoalei Politechnice „Regele Carol II" din Bucureşti, s'a pus din eroare raportul 1 : 5,5129 în loc de 1 : 1,5129, aşa cum a fost dat la concursul amintit. Voi da soluţia cu raportul rectificat.

Fie a şi b laturile dreptunghiului şi p latura patratului. După enunţ avem :

$$a = 1{,}5129\, b \quad , \quad a \times b = p^2.$$

$$\therefore \quad 1{,}5129\, b \times b = 1{,}5129\, b^2 = p^2,$$

$$\therefore \quad \sqrt{1{,}5129}\, b = 1{,}23\, b = p. \qquad (1)$$

Raportul r cerut este :

$$r = (2a + 2b)/4p = (a + b)/2p = (1{,}5129\, b + b)/2p,$$

$$\therefore \quad r = 2{,}5129\, b/2p = 1{,}25645\, b/p.$$

Dacă aci înlocuim pe p cu valoare dată de relaţia (1) găsim :

$$3 = 1{,}25645/1{,}23 = 1{,}02,$$

cu aproximaţiune prin lipsă.

Se vede de aci că latura dată de 7,925 m. a patratului nu intervine la calcule şi că raportul căutat depinde numai de raportul dintre laturile dreptunghiului.

I. I.

Au dat soluţii bune problemei aşa cum a fost propusă D-nii : E. I. Mareş, D. Mavrodin, I. Şor, C. Pârvulescu şi P. C. Mazilu.

*EXERCIŢII

26. Să se simplifice expresiunea:

$$E=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\sqrt{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}-\sqrt{3}\sqrt[3]{3}.$$

ŞTEFAN E. OLTEANU.

R.

$$E=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\sqrt{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^2}-\sqrt{3}\sqrt[3]{3}$$

$$(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=3$$

deci:

$$E=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\sqrt{3(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}-\sqrt{3}\sqrt[3]{3}$$

$$E=\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\sqrt{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}-\sqrt[3]{3}\right)$$

să punem

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\sqrt{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}=\varepsilon\ ;\quad E=\sqrt{3}(\varepsilon-\sqrt[3]{3})$$

$$\varepsilon^6=(\sqrt[3]{2}-1)^2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^3$$

$$(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)=1$$

$$\varepsilon^6=(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^3\quad(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^3=9(\sqrt[3]{2}-1)$$

$$\varepsilon^6=9(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)$$

$$\varepsilon^6=9\qquad\varepsilon^3=3\qquad\varepsilon=\sqrt[3]{3}$$

$$E=\sqrt{3}(\varepsilon-\sqrt[3]{3})=\sqrt{3}(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3})=0.$$

27. Se dau în plan punctele fixe A, B şi dreapta fixă Δ pe care se mişcă punctul M. Fie Δ′ simetrica lui MA faţă de Δ. Se cere locul proecţiei lui B pe Δ′.

I. C. PARHEPEANU.

R. Δ′ trece prin simetricul A′ al lui A faţă de Δ. Dacă P este proecţia lui B pe Δ′ atunci unghiul BPA′ fiind drept iar B şi A′ fiind fixe, locul lui P este cercul de diametru BA′.

28. Să se rezolve ecuaţia:

$$m^{px} + m^{px-1} + \ldots + m^{px-k} = \frac{m^{k+1} - 1}{m - 1} .$$

Gh. Vasiliu-Leoben.

R. Ecuaţia dată se poate scrie:

$$m^{px-k}(m^k + m^{k-1} + \ldots + 1) = m^{px-k} \cdot \frac{m^{k+1} - 1}{m - 1}$$

deci:

$$m^{px-k} = 1 \quad {}^{*}_{*} \quad (px - k) \log m = 0 \quad \text{de unde} \quad x = \frac{k}{p} .$$

Pentru cazul particular $m = p = k = 5$ avem ex. 32, pag. 197 din G. M. Vol. XXXIII.

29. Să se stabilească că:

1°. $$\frac{1}{(p-a)^n} + \frac{1}{(p-b)^n} + \frac{1}{(p-c)^n} = \frac{r_a^n + r_b^n + r_c^n}{S^n} .$$

2°. $$\frac{1}{(p-a)^n (p-b)^n} + \frac{1}{(p-b)^n (p-c)^n} + \frac{1}{(p-c)^n (p-a)^n} = \frac{r_a^n r_b^n + r_b^n r_c^n + r_c^n r_a^n}{S^{2n}}$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

Gh. Vasiliu-Leoben.

R. Ţinând seama că:

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b r_c} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r_a : (p-a) = \text{etc...}$$

putem imediat scrie că:

(1) $$(p-a)^n \cdot (p-b)^n \cdot (p-c)^n = p^n r^{2n}$$

(2) $$(p-a)^n (p-b)^n + (p-b)^n \cdot (p-c)^n + (p-c)^n \cdot (p-a)^n = r^n (r_a^n + r_b^n + r_c^n)$$

şi

(3) $$(p-a)^n + (p-b)^n + (p-c)^n = \frac{1}{p^n} (r_a^n r_b^n + r_b^n r_c^n + r_c^n r_a^n).$$

Împărţind pe (2) şi (3) cu (1) avem relaţiile din enunţ care generalizează relaţiile (7), (8) şi (9) din nota 6* pag. 51, G. M., Vol. XXXVII.

PROBLEME PROPUSE

4237 [1]). Să se rezolve inegalitatea următoare în care $I(n)$ este indicatorul lui n;

$$I(n) < \sqrt{n}.$$

Ion B. Florescu.

4241. Care sunt numerile scrise cu cifre diferite la care cifrele sunt proporţionale cu rangul lor dela dreapta spre stânga?

I. Ionescu..

4242. Se cer patratele de 6 cifre care sunt de una din formele *aabcbc* şi *aabccb*.

V. Thébault.

4243. Să se găsească 2 cuburi consecutive de câte 9 cifre ştiind că numerele de 3 cifre cu care încep ambele cuburi sunt consecutive şi că numărul de trei cifre cu care se termină unul din aceste cuburi este egal cu numărul de 3 cifre cu care începe celălalt cub.

Col. Gh. Buicliu.

*4244. Dacă B, C, B, C', A sunt punctele în care o dreaptă taie două cercuri şi axul lor radical, să se demonstreze relaţiile:

$$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AB'}{AC'}=\frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2}\quad,\quad\frac{AB}{AC}:\frac{AB'}{AC'}=\frac{\overline{BC'}^2}{\overline{CB'}^2}.$$

N. Botea.

*4245. Dacă însemnăm cu A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor unui triunghiu oarecare ABC, să se demonstreze relaţia:

$$\frac{\overline{B'C'}^2}{(b+c)^2}+\frac{\overline{C'A'}^2}{(c+a)^2}+\frac{\overline{A'B'}^2}{(a+b)^2}=\frac{4S_{abc}(2r+11R)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}.$$

Gh. Th. Gheorghiu.

---

1) Problema publicată sub acest număr fiind identică cu problema Nr. 4200, se înlocueşte cu prezenta.

4246. Să se determine numerele α, β, α', β' cari satisfac egalităţile următoare:

$$\alpha\,\bar{\alpha} + \beta\,\bar{\beta} = 1$$
$$\alpha\,\bar{\alpha}' + \beta\,\bar{\beta}' = 0$$
$$\alpha'\,\bar{\alpha}' + \beta'\,\bar{\beta}' = 1.$$

Numerele $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}'$, $\bar{\beta}'$ sunt imaginarele conjugate respectiv ale numerelor α, β, α', β'. Să se deducă cazul particular când numerele sunt reale.

TH. ANGHELUŢĂ.

*4247. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\begin{vmatrix} 2a_1(a_1+x) & a_1a_2+(a_1+x)(a_2+x) & a_1a_3+(a_1+x)(a_3+x) \\ a_1a_2+(a_1+x)(a_2+x) & 2a_2(a_2+x) & a_2a_3+(a_2+x)(a_3+x) \\ a_1a_3+(a_1+x)(a_3+x) & a_2a_3+(a_2+x)(a_3+x) & 2a_3(a_3+x) \end{vmatrix} = 0$$

Să se arate că, dacă a_1, a_2, a_3 sunt trei numere pozitive, ecuaţiunea are două rădăcini imaginare.

GH. D. SIMIONESCU.

*4248. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}^2(\alpha + x) + \operatorname{tg}^2(\beta - x) = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$$

α şi β fiind daţi.

N. C.

4249. Din trei puncte situate pe o dreaptă se duc tangente la un cerc, care determină triunghiul $A_i\,B_i\,C_i$ înscris şi triunghiul $M_i\,N_i\,P_i$ circumscris cercului.

1. Să se demonstreze că dreptele $A_i\,M_i$, $B_i\,N_i$, $C_i\,P_i$ sunt concurente într'un punct R_i.

2. Să se găsească locul lui R_i când punctele iniţiale se deplasează pe dreapta dată, păstrând aceleaşi distanţe între ele.

3. Prin construcţia indicată se obţin opt perechi de triunghiuri, deci opt puncte R_i. Să se examineze dacă aceste puncte se găsesc pe aceeaşi conică.

M. GHERMĂNESCU.

4250. In un plan vertical două bare AB şi BC articulate în B, de aceeaş lungime şi greutate neglijabilă formează un sistem deformabil punctele A şi C deplasându-se dealungul unei bare orizontale XX.

Un disc circular de rază R, şi greutate G reazemă pe barele AB şi BC.

1) Să se găsească poziţia de echilibru.

2) Să se caute condiţia pentru ca în poziţia de echilibru discul să fie înscris triunghiului ABC.

A. PÂRVU.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (4207); *Avram N. Const. Subloc.* (4178, 217, 27, 31, 34, 38, 39, P); *Chiriac Const.* (4180); *Curchi I.* (4215, 38, 39); *Drăguţ Maria* (4215, 23); *Fabius Dorina* (4196, 207, 23); *Florescu I. B.* (A, N, P); *Geier H. Alfred* (4196, 204, 17, 23, 28); *Ghiocel V. V.* (4228); *Ionescu-Ţiu D. C.* (4217); *Mănescu Mircea* (4173, 204, 07, 11, 17, 39); *Mareş I. Em.* (4178, 87, 90, 215, 38, 39); *Margulius M.* (3760, 4167, 200, 17, 18, 34, 39, A); *Mavrodin D. D.* (4197, 207); *Mereuţă Em.* (4204, 17, 29, 33, 38, 39); *Mihăileanu N. N.* (4214, 23); *Miu I.* (P); *Moise Eliza* (4223, 28); *Olteanu E. Şt.* (N, P); *Pârvulescu C.* (4204, 17, 29); *Petrescu I. Ioan* (4207); *Răşcanu I. R.* (4187, 239); *Stoica D. Alex.* (4223, 39); *Thébault V.* (A, P); *Velicescu N. N.* (4072, 75, 196, 207); *Ziff S. M.* (4178, 227, 29, 31, 34, 39).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani compleți broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMARUL 9. — MAI 1933

BIBLIOTECA CENTRALĂ A ASOCIAȚIUNII

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1933. . . . . *G. Țițeica*
2. Un vechiu manuscript de aritmetică (urmare) *Petre V. Cazanacli*
3. Premiul „Inginer H. Capriel"
4. Regulamentul fondului „Inginer H. Capriel"
5. Note matematice: 43 — 48
6. Chestiuni de examen
7. Bibliografie
8. Cereri
9. Diverse
10. Probleme rezolvate: 3491, 3602, 3751, 3782, 4131, 4142, 4204
11. Exerciții: 30 — 32
12. Probleme propuse: 4251 — 4260

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAȚIONALĂ

1933

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 54, 55, 63, 65, 67, 69, 70, 89, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 16, 24, 25, 26, 30, 35, 36, 37, 40, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XXXVIII *SUPLIMENT* No. 9

DAREA DE SEAMĂ

Asupra mesei comune a Concursului Soc. „Gazeta Matematică" din Anul 1933

Anul acesta Societatea „Gazeta Matematică" a reluat cu noui speranţe seria concursurilor anuale, întrerupte în ultimul timp ca o consecinţă a noilor programe ale învăţământului matematicilor în liceele noastre şi a altor greutăţi de altă natură.

Intr'adevăr, cu tot respectul ce Societatea îl dă tradiţiunii, ea s'a găsit silită la un moment dat şi din motivele arătate mai sus să sacrifice tradiţia în faţa realităţii, horărînd întreruperea concursului, întrerupere care bine că nu a fost de mai lungă durată.

Şi în acest răstimp atât Societatea „Gazeta Matematică" prin impulsul exprimat fie prin revistă, fie prin membrii săi profesori la licee cât şi unii din elevi cu înclinare naturală şi atracţie pentru matematici — au căutat să învingă nouile greutăţi şi au grăbit astfel reinceperea concursurilor.

Fie ca nădejdea ce-şi pune Societatea să se realizeze şi cât de curând numărul candidaţilor să egaleze pe acelea dela concursurile din trecut.

S'au scurs 22 ani de când în raportul „Rezultatul concursului Gazetei Matematice" Domnul PROFESOR G. ŢIŢEICA scria:

„S'au înscris să ia parte la concurs 75 de candidaţi, dintre cari au „fost aleşi, potrivit activităţii lor la Gazetă 36 de candidaţi" . . . . . .

Şi pe atunci, în 1911, aveam o ţară mult mai mică, licee mult mai puţine.

Nădejdea este deci justificată.

Şi în anul acesta ca şi în trecut concursul „Gazetei Matematice" s'a terminat prin o masă comună.

Criza generalizată era pe punctul să influenţeze şi asupra acestui capitol, dar stăruitorul şi convinsul conservator al bunelor obiceiuri ale societăţii noastre a răuşit ca să nu lipsească din program această manifestare. Este vorba de D-l M. SARIAN, care la optimismul său a adăugat şi energia necesară ca banchetul să aibă loc.

Şi astfel am ajuns să ne întâlnim în seara de 22 Aprilie, la ora 21, la restaurantul „Palermo".

In treacăt, găsesc de cuviinţă să aduc la cunoştinţa actualilor corespondenţi că în trecut aceste mese comune, au avut loc la Manufactura de Tutun „Belvedere" şi apoi la acea de Chibrituri „Filaret", locuri unde azi — *din păcate* — nu ne-am mai putea simţi ca la noi acasă.

Deci şi din acest punct de vedere iar am fost siliţi ca să ne abatem dela tradiţie. Cu o consolare însă: de „Palermo" este legat un mare nume

românesc, acela care a slăvit pe primul înfăptuitor al idealului național. Unde găsim însă legătura cu societatea noastră? Să ne întoarcem puțin înapoi și să ne referim la banchetul societății din Aprilie 1914 și o vom descoperi.

Iată ce scrie cronicarul de pe atunci decedatul Lt. I. S. Teodorescu:

„La șampanie a toastat primul Domnul inginer A. G. Ioachimescu, *„închinând pentru* M. S. Regele, *căruia îi urează ca în curând în capul „tuturor Românilor să isbutească să creieze unitatea neamului Românesc.....*

„D-l A. G. Ioachimescu *continuă exprimând dorința ca la viitoarele „concursuri să avem reprezentanți între candidați din toate ținuturile ro- „mânești dela Nistru până la Tisa“.*

Ca atare Soc. „Gazeta Matematică“ a fost printre primele care și-a manifestat tot optimismul și și-a arătat toată încrederea în realizarea definitivă a idealului nostru național.

Acestea fiind amintite, rămânem convinși că nici la Palermo nu ne-am găsit prea departe de „noi“.

Aci ni s'a rezervat o sală despărțită, de cea principală, a localului numai printr'o perdea plușată, care când se trăgea în lături lăsa ca din pereții acestei săli să se desemneze un G. Același aranjament la avut și masa. Trăgând perdeaua catifelată, rând pe rând au intrat prin gura lui G membrii și candidații așezându-se:

La baza și spre baza lui G membrii fondatori și în același timp *stâlpii societății*, precum și membrii mai cu greutate;

La vârf și spre vârful lui G candidații;

Pe părțile laterale membrii mai tineri făcând legătura strânsă între trecutul prezent și prezentul viitor.

Au fost prezenți la banchet cei trei stâlpi ai societății: Domnii: A. G. Ioachimescu, Ion Ionescu și G. Țițeica; apoi Domnii: N. Botea, N. Ciorănescu, N. I. Georgescu, M. Ghermănescu, G. A. Ioachimescu, Maior I. Linteș, Colonel Gh. Liteanu, C. Mititelu, Cpt Gh. Niculescu, Miron Niculescu, C. Orășeanu, A. Pârvu, Al. Pantazi, M. Sarian, O. Țino și C. vasiliu, membrii ai societății și candidații cari au luat parte la concurs: I. Bogdan, N. Burcea, V. Ceaușescu, C. Chiriac, V. Cosma, I. Enache, D. Lebădă, M. Mănescu, M. Margulius, Tr. Popa, Gh. Stănculescu și I. Zaharescu.

Se servește masa. Nu mai e cazul, ca altă dată, să împodobim cu adjective alese nici prezentarea menu-ului și nici conținutul lui, mai puțin răușite la această masă comună.

Dar o paranteză. S'a observat desigur că am întrebuințat până aci două denumiri: *masă comună* și *banchet*.

Aceasta pentru a împăca pe toți înaintașii și odată cu ei și tradiția, căci unii au întrebuințat în dările lor de seamă o denumire, alții pe cealaltă. Nu știu pe ce considerente și-au bazat preferința; în ceeace mă privește, de n'ar fi fost tradiția mai puternică decât toate, n'aș fi greșit o singură dată, ca să scrim pe aceste vremuri: *Ban-chet*. Masă comună, da. Convine pentru cum a fost, iar cum a fost a corespuns timpurilor.

Acestea fiind, cu ușurință își poate oricine închipui că n'a trecut prea mult ca seria toasturilor să înceapă.

Domnul A. G. Ioachimescu ia cel dintâi cuvântul. Domnia Sa face acest lucru de mulți ani, ca cel mai în vârstă dintre *stâlpii* societății. Închină pentru M. S. Regele, căruia îi urează sănătate deplină și viață îndelungată.

Intreaga adunare, asociindu-se, se ridică în picioare la urările oratorului.

După o scurtă pauză, obicinuita nerăbdare cu care se așteaptă cuvântarea Domnului Profesor G. Țițeica începe să se simtă tot mai mult. Dar D-sa se ridică. Ca un adânc iubitor al bunelor tradiții se adresează ca și în trecut tineretului reprezentat prin candidații la concursul *Gazetei Matematice*, cărora le-a servit cu o rară măestrie prețioasele D-sale sfaturi.

Adânc înfipt în temelia tradiției, D-sa privește cu multă seninătate, cu toată râvna și încrederea numai către progres. Și de aceea, în cuvântările D-sale morale, e o bună vreme, de când a părăsit un fel de a se exprima tineretului îmbrățișând și rămânând la cel actual. Astfel, încă în 1923, cu ocazia mesei comune a concursului din acel an — D-sa spunea:

„Altădată când țineam această cuvântare, recurgeam la artificii, de „pildă făceam să vorbească un spirit din antichitate..... astăzi îmi permit „ca să atac direct chestiunea, căci toată lumea, până și copiii sunt pătrunși „de simțul realității".

Adresându-se deci direct tineretului, D-l Profesor G. Țițeica începe:

Prin tradiție sunt nevoit ca să țin obicinuita cuvântare morală.

„Cultura voastră matematică, la care ajutăm cu tot ceeace **Gazeta „Matematică** *vă oferă și încă cu concursurile ei, trebuiește privită ca un „adaus de cultură și de disciplină în același timp.*

„Și aceste adausuri și de cultură și de disciplină sunt folositoare, „ele trebuiesc căutate; contribuiesc la desăvârșirea unei disciplini morale, „necesară în mod incontestabil **țării**".

Continuând, D-l Prof. G. Țițeica, dă ca exemplu, tinerilor candidați, pe D-nii: O. Țino, C. Mititelu, Al. Pantazi și M. Sarian, foști premiul întâi ai concursurilor trecute ale *«Gazetei Matematice»* și aflați în acea seară printre noi, ca unii ce s'au adăpat dela aceeași disciplină.

Intr'o atmosferă înălțătoare și acoperită cu prelungite aplauze se termină cuvântarea D-lui Prof. G. Țițeica.

Din capul mesei se ridică apoi Domnul Profesor I. Ionescu, membru fondator și tot atât de vechi *stâlp* al *Gazetei Matematice*.

«Observ că se lucrează puțin și deci să se și vorbească puțin.

«De aceea simțeam o oarecare amărăciune. Și nu aș fi vorbit, dar «am făcut-o numai la îndemnul stăruitor al tinerilor membri din jurul meu.

«Și tot tinerilor membri se datorește petrecerea de astă seară.

«De aceea în sănătatea lor închin, sănătate ce urez s'o aibă la fel «cu a mea. Cu mine doctorii n'au avut prea multă... treabă, căci din anii «copilării și până acum n'am consultat vre'unul».

După care, D-l C. Orășeanu în mod spontan adaugă:

«Deci luați aminte, să nu vă faceți doctori decât în.... matematici».

Amărăciunea D-lui Profesor I. Ionescu găsise repede și cu drept cuvânt ecou în întreaga sală. Dar tot D-sa a adus înseninarea prin urările ce le-a făcut tinerilor membrii arătând prin aceasta nădejdea ce-o pune D-sa

în aceştia. De aceea cuvântarea D-lui PROFESOR I. IONESCU s'a sfârşit în vii şi prelungite aplauze, cu frunţile complet descreţite, rămânând în grija D-lui C. ORĂŞEANU netezirea ultimelor cute întârziate.

Vine rândul D-lui N. CIORĂNESCU. D-sa vorbeşte din partea membrilor gazetei cari nu sunt nici prea bătrâni nici foarte tineri. Se adresează tinerilor concurenţi cu următoarele cuvinte:

„Noi suntem aceia ce am petrecut tinereţea într'o epocă de războiu şi „de criză. Deci putem face morală celor mai mici ca noi. Primele serii ale „noului liceu au trecut prin mâna mea. Toate aceste serii au fost slabe. „Dv. veţi fi noi nuclee de matematică. Dv. să duceţi dorinţa de a activa şi „a continua seria tinerilor ce se vor ocupa serios".

După D-l N. CIORĂNESCU ia cuvântul D-l O. ŢINO. D-sa mulţumeşte tinerilor ingineri membri ai Gazetei, cari fac partea technică a apariţiei revistei la dată fixă şi în condiţii ireproşabile. Remarcă pe D-l INGINER GH. ILIESCU (aplauze) care de 11 ani împlineşte una din aceste grele sarcini.

Face aluzie apoi la D-nii corespondenţi ca aceştia să aducă drept contribuţie întrecerea care să le fie în acelaşi timp şi o recreaţie.

Intreaga sală subliniază cu aplauze cuvintele bine îndreptate ale D-lui O. ŢINO.

D-l M. GHERMĂNESCU se ridică foarte decis pentru a continua seria toasturilor. Să-l lăsăm să vorbească:

„Societatea „Gazeta Matematică" trăieşte bazându-se pe patru stâlpi: „D-nii profesori: A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU, G. ŢIŢEICA şi repauzatul V. „CRISTESCU.

„Să facem o clipă de tăcere în memoria aceluia care a fost inginerul „V. CRISTESCU.

O linişte desăvârşită cuprinde întreaga adunare. In atmosfera de pioasă amintire aveai impresia că pluteşte sufletul aceluia ce a fost atât de legat de „Gazeta Matematică".

Născociri ale unor înşelătoare şi scurte închipuiri l'au adus printre noi — uşurându-ne pentru o clipă regretul de a nu-l mai avea alături şi mai ales la astfel de manifestări. — Deodată D-l M. GHERMĂNESCU ne aduce la realitate:

„Asemăn *Gazeta Matematică* cu o placă dreptunghiulară, rezemată pe „patru stâlpi până acum câtva timp şi rămasă să se sprijine numai pe trei.

„Aceşti stâlpi suportă acum o sarcină mai mare, o sarcină mai grea.

„Avem o datorie de conştiinţă faţă de aceşti stâlpi şi lor li se cuvine „întregul nostru respect.

„Preocupaţi cu multe alte îndatoriri au venit totuşi în tot timpul „concursului.

„Trebuie să nu încetăm o clipă de a-i considera ca un simbol.

„Să ridicăm paharul şi să urăm stâlpilor Gazetei, din toată inima, o „viaţă lungă şi plină de sănătate până la cele mai adânci bătrâneţi".

Ovaţiuni furtunoase subliniază această caldă cuvântare. Voci repetate de „să trăiască", „să trăiască" se aud din toate colţurile mesei. Rând pe rând membrii Gazetei se apropie de *«stâlpi»* arătându-şi sentimentele lor

față de aceste energii inepuizabile, față de aceste puternice exemple de viață închinată.

Urmează un moment de tăcere și de restabilire a echilibrului, după care D-l A. G. Ioachimescu ia din nou cuvântul:

«Recunosc că m'am îndepărtat de «Gazeta Matematică». Timpurile «eroice s'au dus.

«Elementele noi acum sunt elementele din armată, care ne-a dat cea «mai mare parte din colaboratori.

«Închin pentru ei».

La aceste frumoase sentimente — adresate de D-l A. G. Ioachimescu elementelor din armată și într'un stil cu adevărat ostășesc, Domnul Colonel Gh. Liteanu răspunde:

«Pentru armele speciale trebuiesc cunoștințe de matematici superioare «celor din liceu. In aceste ordine de idei, liceele militare pregătesc pe viitorii «ofițeri de arme speciale.

«Iar elementele au corespuns, lucru ce s'a constatat și în concurs.

«Și în viitor, vom lucra, noi militarii, ca să fim mereu la înălțimea «cerințelor.

«Gazeta Matematică» a servit necontenit și dela începuturile ei la «desăvârșirea acestor cerințl — în dubla sa calitate: ca element de educație, «ca element de stimulație.

«Pentru «Gazeta Matematică» închin acest pahar, pentru continua ei «prosperare, pentru trăinicia ei».

Aplauze puternice acoper cuvântarea Domnului Colonel Gh. Liteanu și ovațiuni prelungite par a asigura „Gazetei" viață fără margini. Așa să fie!

Dar iată că Domnul Profesor G. Țițeica este din nou dator și în legătură cu ultimile cuvântări, D-sa reamintește comesenilor că pe vremuri concursurile *Gazetei Matematice* se țineau în diferite centre ale țării.

«Ei bine, prima vizită pe care am făcut-o, cu ocazia concursurilor a «fost la Școala Militară din Iași.

«Chestie veche...

Apoi D-sa continuă:

«Și D-l Ghermănescu a fost militar.

«Actualii stâlpi ai «Gazetei Matematice» fac acum oficiu catalitic: «păstrăm tradiția: Să nu ne îndepărtăm de ea.

«Ne facem, astfel, datoria până la capăt. Intervenim numai atunci când «găsim nevoia ca să corectăm.

«Și-acum ridic paharul în sănătatea tineretului care păstrează tradiția».

Și tineretul răspunde cu riguroase aplauze și energice ovațiuni în timp ce D-l M. Ghermănescu urează ca să rămână cât mai mult stâlpii spre a face și mai de parte oficiul catalitic.

Domnul Profesor I. Ionescu se ridică din nou și cu paharul plin, închină, pentrucă nu mai sunt decât puține minute până la începutul zilei următoare, în sănătatea membrilor prezenți ce-și sărbătoresc onomastica la *Sf. Gheorghe*. Ciocnește cu D-l Profesor G. Țițeica și apoi pe rând cu ceilalți sărbătoriți.

Gestul D-sale este repede imitat de restul membrilor.

Seria toasturilor o încheie elevul CHIRIAC I. CONSTANTIN. Se consideră îndrăsneț, își dă seama de acest lucru în calitatea sa de elev candidat, dar dragostea pentru concurs și pentru *Gazeta Matematică* îi dă curaj.

Mulțumește acelora, cari lucrează desinteresat și asigură că vor urma întocmai bunele sfaturi primite.

Și cu acestea, prima parte a mesei comune, cuvântările, s'a terminat. Tradiția cere însă ca ea să fie continuată de o a doua, de cea artistică, de cea glumeață, la care contribuiau în trecut și cei mai în vârstă și cei tineri.

D-l C. ORĂȘEANU nu întârzie s'o anunțe și chiar D-sa face intrarea citind versurile ce urmează :

NOUL REGULAMENT ȘCOLAR

1

La Ministerul de instrucție
O comisiune ce-i în funcție
Studiază la ordinar
Un nou regulament școlar.

2

Se vorbește cu mister
De regulamentul giuvaer
Căci acest nou regulament
Va fi un reviriment.

3

Se va produce minuni,
Va fi redus la două luni
Un an întreg de școală,
Printr'o măsură radicală

4

Un elev la curs absent
Se va considera prezent
Deci chiar dacă absentează
Absențele se motivează.

5

Interzis e riguros
Să-și ia rolul în serios
Vre-un elev, sau profesor
Ori al școalei director.

6

Tezele nu se suprimă
Rămân pe linia primă
Dar se statuază strict
Copiatul nu-i delict.

7

Și'încă o importantă normă
După ultima reformă
Teza se compune acasă
Fără surmenaj în clasă.

8

Prin radio difuziunne
Avem chiar și o minune
Elevul instalat în pat
Va fi interogat la aparat.

9

Și dacă-o fi chinez sau mut
Poate răspunde-un substitut
Nota mică-i suprimată
Trecerea-i asigurată.

10

Programul suferă și el prin lege
Mari transformări se înțelege
Logica izbită'n mir
Va fi trimeasă'n cimitir.

11

In materie de chimie
Intr'un local de berărie
Va fi studiat exclusiv
Doar alcoolul intensiv.

12

Poate chiar să mă înșel
De mă opresc numai la el
Nu se uită încă unul
Planta — dracului tutunul.

13

Şi dacă ai luat luleaua
Nu-i departe nici cafeaua
Restul de ştiinţă în foi
Se aruncă la gunoi.

14

Adevărata magie
Va fi în filologie
Greaca pleacă la plimbare
Chineza-i limbă de rigoare.

15

Iar principala teză
Să fii chinez la engleză
Căci la bacalaureat
Chinezul va fi premiat.

16

Sportul e pe primul plan
Sport în fiecare an
Tenis, schiuri, box în ring
Şi excursii în şleping.

17

Sport fac şi eu ce nu-s poet
Şi spun versuri ca din caiet
De ar şti vre-un poet-fasonel
El m'ar provoca la duel.

18

Şi'n loc d'un agreabil sport
Mi-ar arăta cum să mă port
M'ar trage în ţeapă de necaz
Să-mi piară al versului haz.

C. O.

şi cari au avut darul să'nveselească întreaga sală.

Dar D-l C. Orăşeanu n'a fost continuat şi ca atare D-sale îi revine tot meritul de vigilent al tradiţiei noastre în această privinţă.

Nici un candidat nu s'a produs pe tărâmul artistic.

Au vrut oare aceşti candidaţi — 12 la număr la masa comună — să-şi ia de pe acum sarcina grea de *apostoli,* de provăduitori ai matematicilor, pătrunşi de cuvântarea D-lui N. Ciorănescu ?

Au fost surprinşi de programul mesei comune a concursului, din cauza întreruperii acestuia în ultimul timp ?

Au ţinut ei oare să marcheze această întrerupere, manifestându-se numai pe tărâmul matematic ?

Sau n'au îndrăsnit să bănuiască că alături de matematici nu pot sta nici muzica, nici poezia, nici jocul şi nici gluma ?!

Deşi nu cred acest lucru, reamintesc totuşi cuvintele lui *«Archimede»* adresate *Gazetei Matematice,* da, ale lui *«Archimede»* prin glasul D-lui Prof. G. Ţiţeica.

«Gazeta Matematică», cu problemele ei din fiecare lună şi cu con-«cursurile ei din fiecare an, are ca scop să formeze cultura voastră mate-«matică, fără să împiedice însă de a vă desăvârşi pe alte căi cultura voastră «generală, căci **nimic din ce interesează omenirea şi mai ales nimic din «ce atinge neamul vostru nu trebuieşte să vă fie străin".**

Ca atare partea artistică a fost redusă. Nu au fost coruri, nu s'a cântat nicio arie. Nici măcar o Siciliană...

Instrumentele, în sala noastră şi ele au lipsit. Le-am auzit însă pe acelea ale orchestrei din sala vecină şi mi-a venit în minte — în timp ce sunetele ajungeau la noi, istorioara din copilărie cu mirosul de friptură plătit de judecător numai cu sunetul de monedă.

Nu s'au jucat nici hore şi nici sârbe. O adevărată doină! Şi au lipsit

încă multe alte lucruri cu cari eram obişnuiţi la concursurile trecute. Reamintim vizitele dela fabrica de tutun şi cea de chibrituri, filmele de cinematograf arătând diferite industrii, taraful de lăutari, invitaţii, da invitaţii cari veneau mosafiri şi plecau gazde! — Flori, ghirlande, steguleţe, apoi ţigările... chibriturile...

Este adevărat că multe din acestea nu se puteau avea la Palermo, dar tot a mai lipsit ceva, ceva ce se putea avea. Şampania! De ce-o fi lipsit oare şi şampania?

Răspund repede: acea rezervată nouă nu era gata.

Să vă explic. Cu ajutorul repauzatului Al. Roşu, bine înţeles. El a definit ţuica ca *derivata întâia* a prunelor. Şi aceasta nu a lipsit din program. Şi tot el a definit şampania ca *derivata a doua* a strugurilor. Şi acum se înţelege uşor de ce am fost siliţi s'o rezervăm pentru mai târziu. Trebuie să aşteptăm ca ea să fermenteze şi să frapeze, căci altfel nu e bună.„

Dar să ne mai întoarcem pentru scurtă vreme în mijlocul mesei noastre comune, pentru a permite membrilor să-şi zică „noapte bună" şi pentru ca împreună să se adreseze candidaţilor cu „la revedere".

Şi puţin după miezul nopţii, cei cari părăseau sala o apucau care încoace, care încolo, după o şi mai veche tradiţie.

Cptan Gh. Niculescu.

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1933

Cel dintâi concurs între corespondenţii *Gazetei Matematice,* s'a ţinut în anul 1902, adică acum 31 ani. S'a dat atunci un premiu unui elev de liceu sau şcoală militară, abonat la *Gazetă,* care în interval de 3 luni, hotărîte dinainte, a trimis cele mai bune soluţiuni la problemele propuse în revistă. Rezultatele concursului au fost foarte interesante.

De atunci şi până în timpul din urmă, bine înţeles afară de timpul Războiului, concursurile s'au ţinut sub diferite forme cu rezultate de cele mai multe ori foarte bine.

Din cauza desfiinţării secţiei reale la licee şi, prin urmare, a scăderii nivelului de pregătire matematică a elevilor, se renunţase la ţinerea concursului.

Membrii tineri ai Societăţii noastre, plini de ardoare, de avânt şi de amintiri plăcute de sforţările produse de concursuri, au cerut stăruitor să se facă anul acesta o încercare.

Ca şi altă dată concursul s'a anunţat din vreme. S'au făcut înscrieri şi s'au făcut admiteri şi apoi concursul s'a ţinut în zilele de 21 şi 22 Aprilie a. c.

Din 26 candidaţi înscrişi s'au prezintat numai 14, iar din cei 12 absenţi unul singur s'a scuzat de absentare. Asta dovedeşte că în acelaş timp cu scăderea nivelului matematic a scăzut şi disciplina morală.

Dintre candidaţii care s'au prezintat 8 sunt elevi ai *Liceului Militar* din Iaşi, unde s'a păstrat statornic legătura cu *Gazeta Matematică* de mai bine 30 de ani, 3 dela Liceul *Ioan Maiorescu* din Giurgiu, 1 dela Liceul *M. Eminescu* din Capitală, 1 dela Liceul *Fraţii Buzeşti* din Craiova şi 1 elev în Anul preparator al Şcoalei Politechnice. Distribuţia geografică a candidaţilor la concurs poate fi pentru mulţi din cititorii acestei reviste subiect interesant de meditare.

Concursul s'a desfăşurat potrivit normelor anunţate din vreme. S'au dat probe scrise şi probe orale. Comisiunea pentru pregătirea problemelor, pentru cercetarea lucrărilor scrise şi pentru examinarea orală a fost compusă din D-nii: N. G. Botea pentru Geometrie

elementară, G. T. GHEORGHIU pentru Algebră elementară, Colonel G. LITEANU şi Căpitan G. NICULESCU pentru Trigonometrie, CRISTEA MATEESCU pentru Mecanică, C. ORĂŞANU pentru Astronomie, N. CIORĂNESCU pentru Algebră superioară şi O. N. ŢINO pentru Geometrie Analitică.

La supravegherea probelor scrise şi la trecerea probelor orale au asistat, punând unii şi întrebări la examenul oral, pe lângă membrii comisiunii de examen şi următorii membri ai Societăţii *Gazeta Matematică:* D-nii I. S. ANTONIU, Colonel G. BUICLIU, I. CHIŢULESCU, M. GHERMĂNESCU, G. ILIESCU, A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, Maior I. LINTEŞ, AL. NICULESCU, G. NICHIFOR, AL. PANTAZI, A. PÂRVU, M. SARIAN, D. VASILIU, G. VASILIU-LOEBEN şi subsemnatul.

Fără să fie un concurs strălucit, cum erau altă dată concursurile *Gazetei,* ţinând mai ales seama de împrejurările actuale, concursul a dat rezultate mulţumitoare. Au fost lucrări scrise foarte bune şi probe orale cu adevărat excelente. Iată acum şi clasificarea:

1. — In rândul întâi a fost clasificat D-l CEAUŞESCU VASILE elev în clasa V-a la Liceul Militar din Iaşi pentru proba scrisă de Geometrie excelentă, pentru răspunsurile foarte bune şi sigure la Geometria elementară şi Algebră elementară. Afară de lucrarea scrisă de Algebră unde sunt oarecare umbre, candidatul a făcut, mai ales la oral, o excelentă impresie.

2. — In rândul al doilea am clasificat pe D-l MĂNESCU MIRCEA, elev în clasa VI la Liceul M. Eminescu din Capitală pentru probele sale scrise şi orale foarte bune de Algebră elementară. Comisiunea a stat multă vreme la cumpănă între acest candidat şi cel precedent, singurul element nefavorabil candidatului de faţă fiind faptul că s'a înscris la o singură materie.

3. — In al treilea rând vine D-l COSMA VICTOR, elev în clasa IV-a la Liceul Militar din Iaşi, pentru probele de Geometrie elementară, amândouă foarte bune şi pentru proba orală de Algebră elementară iarăşi foarte bună. Lucrarea scrisă din această din urmă materie a lăsat mult de dorit.

4. — In al patrulea rând am clasificat pe D-l POPA TRAIAN, elev în clasa VI la Liceul Ioan Maiorescu din Giurgiu pentru cele două probe orale foarte bune. Lucrarea scrisă din Trigonometrie a fost bună, pe când cea de Algebră a avut multe lacune.

Ca şi în alte concursuri au fost candidaţi care s'au semnalat prin unele din probele lor scrise sau orale, celelalte nefiind mulţumitoare spre a-i trece în clasificarea principală. Ţinem să menţionom pe următorii candidaţi: ENACHE IORDACHE şi pentru Algebră şi pentru Geometrie, LEBĂDĂ D. pentru lucrările sale scrise, CHIRIAC I. C. pentru lucrarea scrisă de Algebră şi GHIOCEL V. V. pentru lucrarea scrisă de Trigonometrie.

E o chestie care se ridică în mod natural. Faţă cu rezultatele precedente, încurăjătoare ca fond, dar slabe ca număr de candidaţi, mai trebuesc continuate concursurile Gazetei? Răspunsul nu e imediat şi nu e uşor. El depinde în bună parte de activitatea la *Gazetă* a corespondenţilor noştri, activitate pe care o dorim mai intensă şi mai spornică.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE:

G. ŢIŢEICA.

UN VECHIU MANUSCRIS DE ARITMETICĂ

(Urmare)

Din cele arătate la pag. 283 — 286, precum şi din faptul că numerotarea paragrafelor este aceeaşi (246), iar exactitatea traducerii (am controlat-o în întregime) se menţine până la sfârşit, dovedesc suficient că manuscrisul este într'adevăr o traducere a Aritmeticii lui BÉZOUT. Exemplele cu numere complexe, după cum s'a văzut, sunt *localizate,* măsurile franceze fiind înlocuite cu măsuri moldoveneşti. Iată încă câteva exemple de asemenea localizări.

BÉZOUT

§ 117. Exemple I. On propose d'ajouter:

227^l	14^s	8^d
2549	18	5
184	11	11
17	10	7
2979^l	15^s	7^d

MANUSCRIPTUL

§ 117. Pilda I. Să aibă a se aduna:

++	π	b
345	30	2
2851	24	1
38	19	2
3235	34	2

In locul unităţilor *„livres-sols-deniers"* avem aici unităţile *„lei-parale-bani"*.

BÉZOUT	MANUSCRIPTUL
§ 121. Exemple IV. Si l'on a	§ 121. Pilda IV. Să fie:
$72^{l}\ 6^{s}\ 6^{d}$	$\overset{+}{45}\ \ \pi\ 26\ \ b\ 1$
à multiplier par	să se înmulţească prin
$27^{T}\ 4^{P}\ 8^{P}$	$24^{s}\ \ 5\pi'\ \ 4\pi''$.

Aici în locul unităţilor *„toises-pieds-pouces"*, avem unităţile *„stânjeni-palme-palmace"*.

In toate problemele făcute, traducătorul, deşi schimbă datele numerice şi introduce măsurile moldoveneşti, totuşi caută să fie cât mai aproape de original, potrivind ca explicaţiile să fie la fel.

Traducerea a fost făcută, după părerea lui CLIMESCU şi a D-lui NICHIFOR, pe la începutul secolului XIX. Am putut stabili în mod sigur că a fost făcută după ediţia a doua a operelor lui BÉZOUT, ceeace îi fixează oarecum o *„limită inferioară"*, de oarece se ştie că Volumul I al acestei ediţii a apărut la 1798.

Autorul necunoscut al manuscrisului a dovedit că are multă ingeniositate în găsirea cuvintelor cu care să traducă diferite expresiuni matematice. Fac aci un mic vocabular, subliniind totdeodată că multe expresiuni de acum o sută şi mai mult de ani, s'ar putea întrebuinţa foarte bine şi azi. Multe alte expresiuni sunt de sigur învechite.

VOCABULAR

(Cifrele din paranteze indică paragrafele)

abrégé. (l'—). — scurtare. (148).
abstrait. — neînţeles, abstract. (59).
addition. (l'—). — adunare, somare. (33).
agit. (on s' —). — iaste vorba. (45).
aliquote. (partie—).—parte câte-ore, parte alicvotă. (120).
alliage. (l'—). — legătură. (203).
antécédent. — înainpăşitoriu. (165).
approché. — apropietă. (158).
arbitrairement. — nehotărât, (4).
artifice. (l'). — meşteşug. (12).
attention. (faire—). — a face luare aminte. (44).
billions. (les —). — dilioane. (14).
borner. (je veux—).— mă îndestulez, (55).
carrer. — a cvădrui. (131).
cas (le -). — întâmplare. (51, 128).
centièmes. — sutimi. (23).
certain. (un — ordre).— o hotărâtă stare. (13).
commode. — lesnicios. (20).
commun. — obştesc. (95).

comparaison. (le terme de —).—hotar de alăturare. (4).
comparer. — a alătura. (4, 121, 184).
composé. (rapport—). — raport alcătuit. (187).
conséquent. — următoriu. (165).
considération. (la—).—luare aminte. (68).
continue. necontenită. (174).
contraire. (en sens—).—între un fel împrotivit. (76).
convention. (en vertue de cette —). în puterea acestei aşezări. (11),
correspondant.— răspunzătoriu. (35, 226).
corps. (le—). — trup. (4).
cuber. — a cubi. (149).
décomposer. — a dezalcătui. (121).
décroissante. — scăzătoare. (204).
définition. (la—).—definiţie, tâlcuire. (75, 205).
degré. (le — de la puissance). — treapta puterii (246).
» (un—d'exactitude proposé).— o stare de amărunt hotărât. (55).
dépendre, — a spânzura. (28).
différence. (la—). deosebire (35, 84).
directe. (et simple).—directă şi simplă. (194).
dividende. (le—). — împărţit. (59).
diviseur. (le—).—împărţitoriu. (59).
dixaine. (la—). — zecime. (8).
dixièmes. — zecimi. (21).
égalité. (l'—).— deopotrivire. (180).
enoncé. (l'—). — cuvântare. (37).
énoncer. — a cuvânta. (81).
espèce. (supérieure). — susnic feliu. (77).
estimation (—approchée).— preţuire apropietă. (63).
étendue. (l'—). — întindere. (1).
évident. — lămurit. (44).
exactitude. (l'—).—amărunt. (72).
excédent. (l'—). — prisos. (33).
excès. (l'—).—rămăşiţă, prisos. (35, 236).
exposer. (en — les principes). — a desvăli temeiul lor. (7).
expression. (l'—).—cuvântare. (164).
» (plus simple—). — cea mai simplă tâlcuire (95).
fondée. (est — sur ce principe).— este aşezată pe acest temeiu. (76).
former. — a formălui. (191).
fractionnaire. — fracţionaresc. (5), fracţionaricesc. (59, 84).
inclussivement. — închiet. (8, 60).
incommensurable. — nemăsurătoriu.
indifférent. — ne osebit. (17).
infaillible. (n'est pas—). nu iaste de a nu fi greşită. (76).
inférieur. — josnic. (35).
infinité. (l'—). — nesfârşire. (217).
inverse. (l'—). — întorsul. (217).
lieu. (avoir—).— a se întâmpla. (54).
livre. (la—). — ocă. (4).
manière. (la—). — chip. (7).
matière. (la—). — materie. (203).
même. (le—). — întocma. (37).
mémoire. (la—). — de rost. (60).
méthode. (la—). — metod. (43).
moins. (à — d'une unité prés). — aproape de o unime. (70).
moyen. (le—). — chip. (2, 32).
» (le—proportionnel).— mijlociul proporţionicesc. (178).
moyens. (les—). — mijlocite. (173).
multiple. (le—). — înmulţit. (94).
multiplicande. (le—).—înmulţit.(41).
multiplicateur. (le—). — înmulţitor. (41).
nature. (la—). — fire (2).
naturelle. — firească. (218).
nécessairement. — neapărat. (184).
négliger. — a părăsi, (55, 115).
nette. (l'idée)· — idee curată (78).
objet. (l'—). — obiect. (1).

observation. (l'—). — luare aminte, (161, 264).
occuper. (faire—la place).—a orândui locul. (8).
once. (l'—). — dram. (4).
opération. (l'—). — operaţie. (51, 90. 139).
opérations. (les— de l'Arithmétique). lucrările Aritmeticii. (31).
ordinaire. — obicinuit. (221).
ordre. (un certain—). — o hotărâtă stare. (13).
ôter. — a scoate. (65, 104).
pair. — împărechet. (94).
parfait. (quarré—).— cvadrat deplin (132).
particulier. —osebit. (51). particularnic. (79, 203). deosebit (21).
partiel. — partnic. (60).
plus. — mai mult. (76).
possible. — putincios. (32, 155).
précédent. — trecut. (51).
premiers (nombres —).— numere întâi. (93).
préparation. (la—). — gătire. (37).
préparatoir. — înaingătitoare. (100).
preuve. (la—). — prubă. (38).
principal. — fruntaş (19, 60, 195).
principe. (le—). — temei. (208).
procédé. (le—). — păşire. (92).
produit. (le—). — product. (41).
progression. (la—).—progresie (204).
proportion. (la—).—proporţie. (172).
proportionelles. — proporţioniceşti. (197).
proposé. (un degré d'exactitude—).— o stare de amăruntul hotărât. (55).
proposer. — a înainpune. (31).
proposition.— (la—). — înainpunere. (89, 186).
propriété. (la—). — însuşire. (2, 94, 176, 223).
prouver. — a încredinţa. (137).
puissance. (la—).—putere. (149).
quantité. (la—). — câtime. (1).
quarré. — cvadrat. (129, 132).
question. (la—) — cerere. (31, 194).
quotient. (le—). — câtoriu. (59).
racine. la—quarrée).—rădăcina cvadrată. (130).
raison. (la —). — cuvânt. (7, 25, 63, 231).
raisonnement. (le —). — cuvântare. (29, 44).
rangs. (les—). — ranguri. (13).
rapport. (le—). — legare (59). raport. (115).
» (le—arithmétique). — raportul aritmeticesc. (163).
» (le—géométrique).— raport gheometricesc. (164).
règle. (la—). — regulă. (33).
répéter. — a poftori. (45, 93).
représentant. — arătătoriu. (96).
reste. (le—).—rămăşiţă, prisos. (35).
resultat. — (le—). — ispravă. (35).
retenir. — a popri. (33).
retranché. — sustrăgătoriu. (39).
retranche. (on). — se scade. (35 .
rigoureux. — amărunt. (55).
simple. — curat. (5, 32, 196).
» (plus—expression).—mai curată tâlcuire. (92).
simples. (unités—).— unimile curate. (8, 21, 76).
simplification. (la—).—simplificaţie. (92).
société. (la règle de—). — regula societăţii. (197).
somme. (la—). — somă. (33, 34).
sourd. — surd. (132). (însemna „iraţional").
subdiviser. — a suptîmpărţi. (19).
subordonner.— a suptpune. (200 .
suite. (la— . — şir. (50).
tenir. — a spânzura. (116).
termes. (les—). — hotare. (83, 165, 204).
total. — deplin. (51, 56 .
totalité. (la— .—întregime. (38, 195); totime. (197 .

tranche. (la—).—mădulare (14, 137).
uniforme. — potrivit. (13).
unité. (l'—). — unime. (3).
valeur. (la—).—preț. (27, 51, 68, 143 ; prețuire. (115).
vérification. (la— .—adeverire (136 .
verticalement. — vertical. (49).
vice-versa. — dinprotivă, viceversa. (75).
virgule. (la—). — comă. (21, 25).
vis-à-vis — în preajmă (49).
visible. — vederat. (28, 87).
zéro. — le—). — nulă, (8).

Manuscrisul de care ne-am ocupat este destinat să aibă o mare însemnătate în istoria desvoltării învățământului matematic în țara noastră și ar trebui să fie numit manuscrisul „CLIMESCU".

Un asemenea procedeu se întrebuințează de multe ori în Istoria matematicilor când nu se cunoaște numele autorului unui manuscris.

PETRE V. CAZANACLI
Iași.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL"

SUBIECTUL PROPUS

1. *Să se găsească curbele din spațiu care se bucură de proprietatea că planele osculatoare în trei puncte arbitrare ale curbei și cu planul format de cele trei puncte să fie întotdeauna concurente.*

2. *Să se găsească curbele dintr'un spațiu cu patru dimensiuni care se bucură de proprietatea că hiperplanele osculatoare în patru puncte arbitrare ale curbei să taie hiperplanul format de cele patru puncte:* a) *după patru drepte situate pe aceeași cuadrică,* b) *după patru drepte concurente.*

3. *Să se încerce o generalizare la spațiile cu mai multe dimensiuni.*

COMISIUNEA PENTRU PREMIU :
ING. C. ORĂȘANU, AL. PANTAZI, O. N. ȚINO.

REGULAMENTUL FONDULUI „INGINER H. CAPRIEL"

Art. 1. — Societatea «Gazeta Matematică», în urma propunerii dela 2 Iunie 1912 a inginerului Ștefan Mirea, constitue un fond denumit fondul «Inginer H. Capriel» din al cărui venit să se acorde un premiu pentru lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate.

Art. 2. — Premiul se acordă din 2 în 2 ani celei mai bune lucrări care se va prezenta Societății, de către studenții Universită-

ţilor, de către elevii şcolilor Politehnice sau de către elevii şcolilor militare de Aeronautică, Artilerie, Geniu şi Marină din ţară.

Art. 3. — Lucrarea se propune de o comisiune aleasă în acest scop şi va consta dintr'o chestiune de matematici pure (programul de licenţă) sau de matematici aplicate (mecanica aplicată şi fizica matematică).

Art. 4. — Comisiunea se compune din 2 membri şi un delegat, şi se alege de către prima adunare generală anuală. Această comisiune pregăteşte chestiunile până în luna Mai, când se vor publica în «Gazeta Matematică».

Art. 5. — Lucrările — semnate de autor — se trimit Societăţii cel mai târziu pânăla 1 Mai a anului următor publicării concursului, iar decernarea premiului se face de a doua adunare generală a acelui an, în urma raportului comisiunii, publicându-se rezultatul în numărul din Decemvrie.

Art. 6. — Premiul este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă el măreşte fondul.

NOTE MATEMATICE

43. *Rectificări la Nota 39.*

La publicarea Notei 39 dela pagina 291 al numărului precedent s'au strecurat unele omisiuni care impun reluarea problemei şi facerea cuvenitelor rectificări. Se cerea să se caute:

Când raportul între numărul szu *şi una din cifrele sale este patrat perfect ?*

Ecuaţiile problemei sunt:

(1) $szu = u\mathrm{N}^2$; (2) $szu = z\mathrm{N}^2$; (3) $szu = s\mathrm{N}^2$.

Din (1) se scoate:

(4) $$sz0 = u(\mathrm{N}^3 - 1).$$

Dacă $u = 0$ atunci $s = z = 0$ şi problema nu are senz.

Dacă $\mathrm{N} = 1$ atunci $s = z = 0$, iar u este oricare din cifrele semnificative. Deci problema are 9 soluţii formale ca:

$$\frac{00u}{u} = 1^2.$$

Fie $u \neq 0$. Deosebim: 1^0. u prim cu 2 şi 5, atunci N^2 se

termină neapărat cu 1, iar N cu 1 sau 9. Cum $N \leqslant 31$ el se va găsi între numerele 1, 9, 11, 19, 21, 29, 31.

2°. *u* este prim cu 5 dar e pereche. $N^2 - 1$ trebue să fie terminat cu 5 sau 0, deci N trebue să se termine cu 4, 6 sau 9, 1. Pentru ultimele 2 terminaţiuni este cazul 1°, pentru primele 2 terminaţiuni N poate fi 4, 6, 14, 16, 24, 26.

3°. *u* poate fi 5. In acest caz $N^2 - 1$ este pereche deci N se va găsi între numerele neperechi mai micî ca 32.

Cercetând valorile lui N dela 1°, 2° şi 3° se găsesc cele 32 soluţii dela pagina 194 din numărul 5.

Pentru cazurile (2) şi (3) a se vedea Nota matematică 39 unde mai sunt de făcut următoarele rectificări:

La pagina 291 rândul 2 de jos se înlocueşte z^2 prin z.

La pagina 292:

Rândul 1 de sus în loc de *suma* se scrie *numai.*

Neegalitatea care urmează după (7) este

$$100 < N^2 < 225 = 15^2.$$

In rândul 11 de sus se şterge 15.

COL. GH. BUICLIU.

44. 1°. Cred că autorul Notei 23 din acest an nu a citit cu atenţie Nota mea 40 din anul trecut al «Gazetei Matematice», la care se referă. Altfel ar fi observat că eu nu pretind să găsesc funcţia *numerică* $I(x)$ ce satisface condiţiile

$$I(1) = 0 \quad , \quad I(2) = 1$$

$$I(xy) = I(x) + I(y)$$

ci o funcţiune *continuă* care, verificând aceste condiţiuni, dă o valoare *apropiată* celei corespunzătoare funcţiunii $I(x)$. De altfel am şi pus

$$I(x) \sim \log_a x \qquad a = 2$$

ceeace nu este tot una cu egalitatea.

2°. Proprietăţile, studiate de D-l V. THÉBAULT în Nota 15, ale produsului a patru numere consecutive, îmi aminteşte problema 1804, propusă în Vol. XVII de † E. N. BARISIEN, cu ocazia căreia se arăta că

$$a(a + r)(a + 2r)(a + 3r) + r^4 = (a^2 + 3ar + r^2)^2.$$

Ar fi deci de văzut dacă produsul a patru numere în progresiune aritmetică poate fi sau nu un patrat perfect. In cazul, de pildă, când a şi r sunt divizibili unul prin altul, răspunsul este negativ.

3°. De câtăva vreme s'au scris în «G. M.» diferite Note, cuprinzând proprietăţi ale şirurilor recurente, definite de relaţia

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-1} \qquad u_0 = 1\ ,\ u_1 = p$$

ultima fiind Nota 31. Ţin să atrag atenţia că încă din 1923 am publicat în «Revista Matematică» din Timişoara, Anul III, No. 8, pag. 115 — 119 un articol în care stabilesc o serie întreagă de proprietăţi ale numerelor u_n, printre care se găsesc şi unele date în Notele amintite.

Amintind acest lucru, cred că ar fi bine ca pe viitor să reînviem frumosul obiceiu ca, de câte ori folosim o proprietate oarecare să indicăm şi pe autor ca şi uvragiul în care se găseşte. Astfel, ţin să mai adaug că de proprietăţile numerelor u_n se mai ocupă şi E. Lucas «Théorie des nombres», Vol. II [1]).

M. Ghermănescu.

45. *Asupra Notei No. 24 din Anul XXXVII, pag 256.*

D-l M. Kraitchik în *„Recherches sur la Théorie des nombres"*, Vol. I, pag. 39 — 41 a arătat că ecuaţia :

$$x! + 1 = y^2,$$

nu admite, pentru $n < 1200$, alte soluţiuni în numere întregi decât soluţia banală $x = 0$, $y = 1$ şi soluţiile evidente $x = 4$, $y = 5$; $x = 5$, $y = 11$; $x = 7$, $y = 71$.

Pentru a ajunge la acest rezultat D-sa a întrebuinţat următoarea metodă :

A căutat să determine pentru fiecare valoare a lui x un număr b astfel în cât restul împărţirii lui $[x! + 1]$ prin b să fie un număr a, care să nu fie printre resturile pe care le dau patratele împărţite prin b.

Am dat cele de mai sus ca o contribuţie la istoricul egalităţii:

$$7! + 1 = 71^2,$$

despre care se vorbeşte în citata notă.

I. B. F.

1) A se vedea şi lucrarea mea „Sur l'intégrale de Poisson" ce apare în „Bull. Sc. de l'Ecole Pol. de Timişoara".

46. *Asupra unor medii.*

In afară de generalizările date de D-l Prof. A. ANGELESCU în articolul din *Gazeta Matematică*, Anul XXXVII, pag. 244, medii aritmetice a cantităților pozitive $a_1, a_2, \ldots a_n$ mai poate fi considerată și următoarea medie:

$$L_k = \sqrt[k]{\frac{\lambda_1 a_1^k + \lambda_2 a_2^k + \ldots + \lambda_n a_n^k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}} \qquad (1)$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sunt numere pozitive. Imi propun să arăt pentru mediile date de formula (1), cari, ca și cele studiate de D-l Prof. A. ANGELESCU sunt cuprinse între cea mai mică și cea mai mare dintre cantitățile a_i, — că:

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant L_3 \leqslant \ldots \qquad (2)$$

Mă voi mărgini întâi la cazul $n = 2$, când din relația

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \leqslant \sqrt[2]{\frac{\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2}},$$

se deduce:

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)^2 \leqslant (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2)$$

$$\therefore \quad 0 \leqslant \lambda_1 \lambda_2 (a_1 - a_2)^2$$

deci

$$\therefore \quad L_1 \leqslant L_2,$$

egalitatea neavând loc decât dacă $a_1 = a_2$.

Pentru a demonstra că $L_{k-1} \leqslant L_k$, rămânând deocamdată tot la $n = 2$, voiu presupune că am arătat că

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant L_3 \leqslant \ldots \leqslant L_{k-1}.$$

Se are

$$a_i^k - (a_1 + a_2)\, a_i^{k-1} + a_1 a_2\, a_i^{k-2} = 0 \qquad (i = 1,2)$$

$$\therefore \quad (\lambda_1 a_1^k + \lambda_2 a_2^k) - (a_1 + a_2)(\lambda_1 a_1^{k-1} + \lambda_2 a_2^{k-1}) + a_1 a_2 (\lambda_1 a_1^{k-2} + \lambda_2 a_2^{k-2}) = 0,$$

unde ținând seamă de (1) se deduce:

$$(L_k)^k - (a_1 + a_2)(L_{k-1})^{k-1} + a_1 a_2 (L_{k-2})^{k-2} = 0. \qquad (3)$$

Pe dealtă parte L_i fiind cuprins între a_1 și a_2 se are:

$$(L_{k-1})^k - (a_1 + a_2)(L_{k-1})^{k-1} + a_1 a_2 (L_{k-1})^{k-2} \leqslant 0,$$

și cu atât mai mult:

$$(L_{k-1})^k - (a_1 + a_2)(L_{k-1})^{k-1} + a_1 a_2 (L_{k-2})^{k-2} \leqslant 0. \qquad (4)$$

Din (3) și (4) se deduce:

$$(L_k)^k = (a_1 + a_2)(L_{k-1})^{k-1} - a_1 a_2 (L_{k-2})^{k-2} \geqslant (L_{k-1})^k,$$

$$\therefore \quad L_k \geqslant L_{k-1}.$$

Egalitatea nu are loc decât dacă și $L_{k-1} = L_{k-2}$ și, din aproape în aproape, se deduce că are loc numai dacă $a_1 = a_2$.

Voi presupune acum că am arătat că inegalitățile (2) sunt adevărate pentru n cantități a_i și voiu arăta că sunt adevărate și pentru $(n+1)$. Pentru aceasta voiu nota:

$$L'_k = \sqrt[k]{\frac{\lambda_1 a_1^k + \lambda_2 a_2^k + \ldots + \lambda_n a_n^k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}},$$

$$L'_{k+1} = \sqrt[k+1]{\frac{\lambda_1 a_1^{k+1} + \lambda_2 a_2^{k+1} + \ldots + \lambda_n a_n^{k+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \lambda.$$

Avem:

$$L_{k+1} = \sqrt{\frac{\lambda_1 a_1^{k+1} + \ldots + \lambda_n a_n^{k+1} + \lambda_{n+1} a_n^{k+1}}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda (L'_{k+1})^{k+1} + \lambda_{n+1} a_{n+1}^{k+1}}{\lambda + \lambda_{n+1}}}$$

$$\therefore \quad L_{k+1} \geqslant \sqrt{\frac{\lambda (L'_k)^{k+1} + \lambda_{n+1} a_{n+1}^{k+1}}{\lambda + \lambda_{n+1}}} \geqslant L_k.$$

Egalitatea nu are loc decât dacă $L'_k = L'_{k+1} = a_{n+1}$ și, din aproape în aproape, deducem că numai atunci când:

$$a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n = a_{n+1}.$$

Și asupra acestor medii se pot pune probleme de limită și de maximum și minimum analoage celor studiate de D-l Prof. ANGELESCU.

Dacă în locul mediilor dela (1) vom considera cantitățile

$$S_k = \sqrt{\lambda_1 a_1^k + \lambda_2 a_2^k + \lambda_3 a_3^k + \ldots + \lambda_n a_n^k}$$

unde deastădată $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ sunt numere mai mari sau egale cu 1, printr'un procedeu analog cu cel de mai sus se poate demonstra că

$$S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3 \geqslant \ldots$$

Egalitatea neavând loc decât dacă:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Chestiunile de maximă şi minimă în acest caz conduc la concluziuni interesante. Ele vor putea fi folosite la o largă generalizare a Problemei 1162 a cărei soluţie a fost publicată anul trecut.

IOAN B. FLORESCU.

47. *Asupra Notei No. 42.*

Această Notă pune în discuţie prioritatea rezultatelor date de mine în articolul «Chestiuni din Geometria triunghiului» (G. M. XXXVIII, 1933, p. 163). Articolul a fost trimis de mine Redacţiunii „Gazetei Matematice" *în toamna anului 1921.* Delegatul din acea vreme, pentru articole de Geometrie, a scris „rezoluţia": *A se vedea dacă nu sunt lucruri cunoscute* şi articolul a rămas mai bine de opt ani în sertarul Redacţiunii, după care mi s'a înapoiat, împreună cu alte lucrări nepublicate.

Alte ocupaţii m'au făcut să amân triarea hârtiilor până în vara trecută, când articolul în chestiune a luat din nou drumul Gazetei, *însoţit de nota explicativă dela început.*

Cu aceste observaţii, acord bucuros D-lui N. BOTEA şi Autorilor citaţi în Nota D-sale, prioritatea la care au dreptul.

MIRON NICOLESCU.

48. *Asupra problemei 4110.* Fie

$$f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz^2 + Fz^2 = 0$$

o conică cu centrul în punctul H dat de sistemul

$$(H) \qquad f'_x = 0 \ ; \ f'_y = 0.$$

Dacă $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ este un punct în planul conicei, polara sa faţă de conică se scrie

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0. \qquad (I)$$

sau

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f_z = 0. \qquad (II)$$

Distanţa M_0D_f dela M_0 la polara sa este, utilizând formula (I):

$$M_0D_f = \frac{f(M_0)}{\pm\sqrt{(f'_{x_0})^2 + (f'_{y_0})^2}}. \qquad (1)$$

Distanța H_f dela centrul conicei $f(M)$ la aceiaș polară este, utilizând forma II pentru numărător și forma I pentru numitor, ținând seamă și de ecuațiile (H):

$$H_f = \frac{z_0 f'_z(H)}{\pm\sqrt{(f'_{x_0})^2+(f'_{y_0})^2}} . \tag{2}$$

Impărțind (1) prin (2) și ținând seamă că M_0 și H nu sunt de aceiași parte a polarei lui M_0 față de conică avem:

$$\frac{M_0D_f}{H_f} = -\frac{f(M_0)}{z_0 f'_z(H)} . \tag{3}$$

Fie o altă conică

$$g(x, y, z) = 0$$

cu centrul în G. Avem analog

$$\frac{M_0D_g}{G_g} = -\frac{g(M_0)}{z_0 g'_z(G)} . \tag{4}$$

Din (3) și (4) se deduce că locul punctelor M pentru care

$$\frac{MD_f}{H_f} = \frac{MD_g}{G_g} \tag{5}$$

este conica

$$\frac{f(M)}{f'_z(H)} = \frac{g(M)}{g'_z(G)} \tag{6}$$

care face parte din fascicolul determinat de cele 2 conice și care generalizează cercul de similitudine a două cercuri.

In adevăr, fie cercurile

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2z^2 = 0$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2axz + (a^2 - r^2)z^2 = 0$$

cu centrele respectiv în H (0, 0, 1) și G (a, 0, 1). Avem

$$f'_z(H) = |-2R^2z|_H = -2R^2$$

$$g'_z(G) = |-2ax + 2(a^2 - r^2)|_G = -2r^2.$$

Așa că (6) devine

$$\frac{x^2 + y^2 - R^2z^2}{R^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2ax + (a^2 - r^2)z^2}{r^2}$$

adică cercul de similitudine al cercurilor date (locul punctelor de unde se văd cele 2 cercuri sub unghiuri egale).

Fie PQR triunghiul conjugat comun conicelor (f) şi (g), de centre H şi G. Să aplicăm formulele (3) şi (4) punctului P, a cărui polară faţă de ambele conice este dreapta PQ. Fie H_p, G_p proecţiile lui H şi G pe QR.

Pentrucă în acest caz

$$M_0D_f = M_0D_g$$

avem, împărţind rapoartele (3) şi (4)

$$\frac{\overline{GG_p}}{\overline{HH_p}} = \frac{f(P)}{g(P)} \cdot \frac{g'_z(G)}{f'_z(H)} .$$

Ad. G. Gheorghiu.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1933

PROBELE SCRISE

(21 Aprilie 1933)

CLASA III

Geometria plană. Chestiunea I. Se consideră un trapez dreptunghiu ABCD, în care AB şi CD sunt bazele, iar latura AD este perpendiculară pe baze. Se ia un punct oarecare L în plan. Latura AD este întâlnită de dreapta LB în M şi de dreapta LC în N. Fie P mijlocul segmentului BM şi Q mijlocul segmentului CN. Dreptele AP şi DQ se întâlnesc în R.

Să se arate că triunghiurile ADR şi LMN sunt asemenea.

Chestiunea II. Se consideră un triunghiu ABC. Paralelele duse prin B la latura AC şi prin C la latura AB se întâlnesc în punctul A'. Se prelungeşte latura AB cu o lungime $\overline{BB'} = AB$, iar latura AC cu o lungime $\overline{CC'} = \overline{AC}$.

Să se arate că punctele A', B', C' sunt în linie dreaptă.

CLASA IV

Geometria. Se consideră un paralelogram ABCD şi un punct M în planul său. Se construeşte segmentul MA şi se prelungeşte cu o lungime $\overline{AN} = \overline{MA}$. Se construeşte segmentul NB şi se prelungeşte cu o lungime $\overline{BP} = \overline{NB}$. Se construeşte segmentul PC şi se prelungeşte cu o lungime $\overline{CQ} = \overline{PC}$.

1°. Să se arate că dreapta MQ trece prin punctul D și că D este mijlocul segmentului MQ.

2°. Se păstrează aceste proprietăți, când M este un punct oarecare în spațiu?

Algebra. Chestiunea I. Dacă se notează cu P (a) rezultatul înlocuirei lui x prin a, în polinomul P (x), și dacă

$$P(x) = x^2 + 3ax + 2a^2$$

atunci să se demonstreze că acest polinom satisface relației

$$P^2(x + a) - P(x) \cdot P(x + 2a) = 2a^2 P(x + a).$$

Să se deducă de aici că expresia

$$P(x) \cdot P(x + 2a) + a^4$$

este un pătrat perfect.

Chestiunea II. Un tată îi spune copilului său: peste doi ani eu voi avea de trei ori mai mult vârsta ta, iar tu peste șase ani vei avea jumătate din vârsta ce aveam eu acum patru ani. Ce vârstă are tatăl și fiul?

N B. Se va ține seamă de ordinea calculelor.

CLASA V

Geometria plană. Se consideră în același plan un triunghiu ABC și o dreaptă Δ. Dreapta Δ întâlnește latura AB în B' și latura AC în C'. Fie B'' și C'' picioarele perpendicularelor coborîte din B și C pe Δ, B_1 și C_1 mijloacele segmentelor BB', CC' și A' punctul de întâlnire al dreptelor $B''B_1$ și $C''C_1$.

1°. Să se arate că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B''A'C''$.

2°. Să se găsească locul geometric al punctului A', când dreapta Δ și punctele B și C sunt fixe, iar vârful A descrie un cerc trecând prin B și C.

Geometria în spațiu. Se consideră un pătrat ABCD, cu latura a. Se duce diagonala AC. O paralelă la latura BC întâlnește dreptele AB, AC, CD respectiv în L, M, N.

1°. Să se determine poziția acestei paralele, astfel că rotind patratul în jurul laturei CD, volumul născut prin rotirea triunghiului ALM să fie egal cu volumul născut prin rotirea triunghiului MNC.

2°. Aceiaș problemă, când se înlocuește diagonala AC cu sfertul de cerc, cuprins în patrat, cu centrul în D și de rază a.

Algebra. Chestiunea I. Se consideră ecuația

$$(1) \qquad m^2x^2 - m(m - 1)x - (5m + 1) = 0$$

și se cere:

1°. Să se discute ecuația când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

2°. Să se calculeze expresia

$$E = \frac{2x' + 1}{x'' - m} + \frac{2x'' + 1}{x' - m}$$

unde x' şi x'' sunt rădăcinile ecuaţiei (1). Să se arate că pentru $m = -1$, expresia E are valoarea zero.

Chestiunea II. 1°. Să se determine o progresie aritmetică în care suma primilor patru termeni să fie egală cu 22 iar produsul lor să fie egal cu 280.

2°. Sunt patru progresii care se bucură de această proprietate. Dintre ele una singură are raţia un număr raţional şi pozitiv. Dacă notăm cu S_1 suma primilor n termeni ai acestei progresii şi cu S suma primelor $n - 1$ numere, să se demonstreze că

$$S_1 = S + n^2.$$

N. B. Se va ţine seamă de ordinea calculelor.

CLASA VI REALĂ

Algebra superioară. I. Se dă un semicerc de diametru AB = 2R şi un punct M mobil pe semicerc. Se consideră triunghiul dreptunghic AMB în care se ia $\overline{AM} = x$. Fie MP înălţimea şi AA' bisectoarea unghiului A. Se cere :

1°) Să se exprime $\overline{MP}$ şi $\overline{AA'}$ în funcţie de x şi R.

2°) Presupunând că x variază, să se studieze variaţia produsului : $y = \overline{AA'} \cdot \overline{MP}$ caracterizând triunghiurile dreptunghice pentru cari acest produs este maxim sau minim.

II. Să se studieze variaţia funcţiunei :

$$y = \pm \sqrt{\frac{-x^2 + 7x - 10}{x - 1}}$$

şi să se reprezinte grafic această variaţie.

III. Să se rezolve cu regulele lui CRAMER sistemul următor :

$$x + y + z = 1 \; ; \; ax + by + cz = d \; ; \; a^2x + b^2y + c^2z = d^2.$$

CLASA VI

Mecanica. Un automobil pornind din repaos este accelerat în mod constant cu 0,3 m/sec² timp de 1 minut, după care motorul fiind oprit şi intrând în funcţiune frâna, automobilul este acţionat de o acceleraţie întârzietoare de 9,0 m/sec², până ce se opreşte.

Se cere :

1. Să se exprime în funcţie de timp, iuţeala automobilului şi spaţiul parcurs în perioada de accelerare. Să se desemneze diagrama mişcării.

2. Idem în perioada de încetinire.

3. Care a fost iuţeala maximă atinsă (în Km/oră), şi după cât timp de la pornire s'a realizat această iuţeală ?

4. După cât timp dela pornire s'a oprit automobilul şi ce distanţă a parcurs ?

5. Cât a fost iuţeala unghiulară maximă a roţilor, ştiind că diametrul unei roţi are 60 cm. ?

6. Câte învârtituri a făcut o roată dela pornire până la oprire ?

CLASA VII

Astronomie. Latitudinea geografică a unui loc din emisferul boreal fiind:

$$\varphi = 44^0.\ 24'.\ 51''. \qquad \text{(Bucureştiul).}$$

Se cere:

1. Să se calculeze distanţa zenitală meridiană aparentă a soarelui la solstiţii, luându-se pentru oblicitate:

$$\omega = 23^0.\ 27'.\ 8''$$

şi pentru refracţie respectiv valorile:

$$\rho_1 = 23'' \quad , \quad \rho_2 = 2'.\ 27''.$$

2. Să se calculeze distanţa în metri măsurată pe meridian, dela Bucureşti ($\varphi = 44^0.\ 24'.\ 51''$) până la ambele tropice, presupunând că pământul ar fi o sferă care are lungimea meridianului 40.000.000 m.

3. Intre ce limite trebue să fie cuprinsă declinaţiunea unei stele pentru ca aceasta să rămână totdeauna vizibilă la Bucureşti.

Trigonometrie. A. Lucrare scrisă pentru elevii ce dau materia din vechea programă a liceului *real.*

I. Să se găsească relaţia ce există între x şi y pentru a avea totdeauna egalitatea:

$$\text{arc tg}\frac{1}{x} + \text{arc tg}\frac{1}{y} = 1665^0.$$

II. *a)* Să se rezolve sistemul:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sin(x+y) = m \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = n \end{cases}$$

unde m şi n sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$\frac{z^2+1}{2z} = \frac{a^2+1}{a^2-1}$$

în care a este un număr întreg mai mare ca unitatea.

b) Soluţiunile sistemului (1) sunt de forma:

$$(2) \qquad \operatorname{tg} x\ ,\ \operatorname{tg} y = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - \frac{4(Q \pm \ldots)}{Q}}}{2} = f(a)$$

şi să se arate că nu se poate lua în considerare decât unul din semnele $\pm$ din paranteza de sub radical. Care anume şi de ce ? Să se verifice apoi că obţinem :

$$\operatorname{tg} x \ , \ \operatorname{tg} y = 1 \pm \sqrt{2\sqrt{3}}$$

făcând $a = 3$ în egalitatea (2).

Trigonometrie. B. Lucrare scrisă pentru elevii ce dau materia din actuala programă a liceului.

I. Să se verifice egalitatea :

$$\sin 50^0 = \sin 4000^0 \cos 3250^0 + \sin 2300^0 \cos 1790^0 - \frac{1}{2} \ .$$

II. Se dă perimetrul unui triunghiu prin relaţia :

$$2p = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 5\alpha$$

iar unghiurile lui prin valorile : $A = 7\alpha$; $B = 3\alpha$; $C = 2\alpha$ şi se cere să se rezolve acest triunghiu.

ŞCOALA POLITECHNICĂ

Geometrie analitică. Chestiunea I. Se consideră două axe $x'ox$ şi yoy' perpendiculare una pe alta. Pe axa Ox luăm punctele I şi L astfel ca $\overline{OL} = 2\ \overline{OI}$, iar pe Oy punctul K astfel ca $2\overline{OK} = \overline{OI}$.

Se consideră *cercul* O de rază $\overline{OI}$ şi *elipsa* având semiaxele $\overline{OL}$ şi $\overline{OK}$. Cele două curbe se taie în punctele M, N, P, Q, iar tangentele lor comune taie axele xx' şi yy' respectiv în punctele A, C şi B, D.

a) Să se scrie ecuaţiunea familiei de conici (H) trecând prin punctele M, N, P, Q şi să se discute natura conicilor.

b) Să se scrie ecuaţiunea familiei de conici (H') circumscrise patrulaterului ABCD şi să se discute natura conicilor.

c) Între parametrii λ şi μ ai celor două familii de conici se stabileşte o relaţiune liniară :

$$a\lambda + b\mu + c = 0 \qquad (R),$$

făcându-se astfel o corespondenţă între conicile celor două familii.

Fie F_i şi F_i' focarele unei conici oarecare (Γ_i) a familiei (H). Din F_i se duce o tangentă $\overline{F_iT_i}$ la conica (Γ_i'), corespunzătoare conicii (Γ_i), în familia (H') şi se proiectează F_i' pe această tangentă în P_i .

Să se găsească şi să se construiască locul punctelor de contact T_i . Asemenea să se găsească şi să se construiască locul proiecţiunilor P_i .

d) Dacă M_1, M_2, M_3, M_4 sunt punctele de intersecţie ale conicilor (Γ_i) şi (Γ_i'), care este locul acestor puncte când λ variază. Să se construiască acest loc.

Chestiunea II. Se consideră: două cercuri O şi C tangente exterior în punctul I; pe cercul C un punct M, iar pe raza $\overline{CM}$ un punct P, astfel ca $\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} = \frac{2}{3}$. Să se găsească şi să se discute ecuaţiunile parametrice ale locului descris de punctul P, când cercul C se rostogoleşte fără alunecare pe cercul fix O.

Să se dea ecuaţiunea carteziană a locului lui P în cazul când $\overline{OI} = 4\,\overline{CI}$ şi *să se construiască curba în acest caz.*

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Anul XXXIX. No. 2 Februarie. 1933. New-York. Termodinamica şi relativitatea, de R. C. TOLMAB. Funcţiuni neanalitice de o variabilă complexă, de E. R. HEDRICK. Serii de puncte locale separatoare ale unui continuu, de G. T. WHYBURN. Existenţa unui minimum absolut în problema lui LAGRANGE, de L. M. GRAVES. Noui factorizări ale lui $2^n \pm 1$ de D. H. LEHMER. (se factorizează al 1-lea număr al lui MERSENNE $2^{79} - 1 = 2687.\ 202029703.\ 1113491139767$). Matrice ale căror compuse ale *s*-lea sunt egale, de J. WILLIAMSON. Observaţiuni asupra propoziţiunilor 1 . 1 şi 3 . 35 din *Principia Mathematica,* de B. A. BERNSTEIN. Asupra clasei numerelor unui câmp ciclic şi a unui subcâmp, de C. G. LATIMER. Unele aplicaţiuni ale teoremei lui MURPHY, de H. BATEMAN. Asupra lanţurilor şi ciclelor singulare, de S. LEFSCHETZ. Variabile asociate în secuenţe, de A. T. CRAIG. Expresiunea erorilor pentru unele fracţii continui, de R. GARVER. Definiţia lui YOUNG a unei algebre, de L. E, BUSH. Unele transformaţiuni involutorii de linii, de J. M. CLARKTON. Asupra unei teoreme de reciprocitate înaltă, de L. CARLITZ.

Boletin Matematico. Anul V. No. 12. Februarie 1933. Buenos Aires. Precuvântarea publicată la 15 Ianuarie 1928, de B. I. BAIDAFF. Cinci ani! Primul lustru, de B. I. BAIDAFF. (1928 — 1933). Determinarea directă a razei cercului osculator pentru curbe în spaţiu, de B. I. BAIDAFF.

Boletin Matematico Elemental. Anul III. No. 12. Februarie 1933. Buenos Aires. Al treilea an şi rezultatul concursului anului III al Buletinului matematic elementar.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. Anul XV No. 9—10 Bucureşti 1932. Sur une condition nécessaire pour l'uniformité des fonctions analytiques, par G. CĂLUGĂREANU.

Journal de Mathematiques Elementaires publié par H. VUIBERT. Anul 57. Aprilie 1933. Paris.

Idem. No. 14. Aprilie 1933.

Societatea Română de Ştiinţe. Secţia matematică. Buletinul şedinţelor. Anul I. No. 1. Aprilie 1933. Bucureşti.

Scopul Buletinului este de a se aduce mai repede la cunoştinţa membrilor lucrările ce se fac la Societate şi pe care le publicăm şi noi la „Diverse", întrucât Buletinul Societăţii apare la intervale mari de timp.

Sphinx. *Revue mensuelle des questions récréatives.* Anul III. No. 1, 2, 3, 4, 5. Ianuarie-Mai 1933. Bruxelles.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 2. Aprilie 1933. Timişoara. O teoremă de geometrie elementară, de D. V. Ionescu. Exerciţii matematice de astronomie pentru liceu, de A. Crişan.

Joseph Fels Ritt. *Differential equations from the algebraic standpoint.* New-York 1933. (Publicat de *American Mathematical Society*, în colecţia: *«Colloquium publications»*, Volume XIV).

Marshall Harvey Stone. *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis.* New-York 1932. (Publicat de *American Mathematical Society*, în colecţiunea: *«Colloquium publications»*, Volume XV).

R. L. More. *Foundations of point set theory.* New-York 1932. (Publicat de *American Mathematical Society* în colecţiunea: *«Colloquium publications»* Volume XIII).

Eduard Cech. *Trois théorèmes sur l'Homologie.* Brno 1931. (Publicaţiune a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk).

Eduard Cech. *Réseaux R à invariants égaux.* Brno 1931. (Publicaţiune a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk).

Josef Zahradnicek. *Acţiunea forţei substanţelor radioactive asupra balanţei lui Coulomb.* Brno 1931. (Publicaţiune a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk).

Rostislav Kostal. *Vibraţiunile sitzemelor acuplate.* Brno 1931. (Publicaţiune a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk).

Gaston Julia. *Exercices d'Analyse.* Tome III. *Equations différentielles.* Paris 1933. Editeur Gauthier-Villars.

Acest volum este întocmit în acelaşi spirit ca şi volumele precedente. Cele spuse la pag. 182 despre volumul II se aplică dar şi acestuia. Cap. I conţine probleme de aplicarea metodelor elementare de integrarea prin cuadraturi, ecuaţia lui Riccati, factorii integranţi, şi integrale intermediare. Cap. II are probleme de ecuaţii diferenţiale lineare: integrare formală, relaţiuni între integrale, puncte singulare ale integralelor, teorema lui Fuchs, ecuaţia lui Laplace, transformarea ecuaţiilor lineare şi integrale intermediare. Cap. III conţine exemple de integrale singulare.

I. I.

Henry Galbrun. *Théorie mathématique de l'assurance invalidité et de l'assurance nuptialité. Définitions et relations fondamentales.* Paris 1933. Gauthier Villars, Editeur. Quai des grands Augustins, 55 Paris.

Acest volum constitue fascicola IV din Tomul III: *«Les applications de la théorie des probabilités aux sciences économiques et aux sciences biologiques»* care apare sub direcţiunea D-lui E. Borel.

In asigurările pe viaţă, asiguratul nu poate eşi din grupa asiguraţilor de cât prin moarte. Azi se pun probleme mai complexe la asigurări şi anume de exemplu, ca în caz de invaliditate să se dea ajutoare, în caz de căsătorie să se dea un capital asiguratului, etc. Indivizii care formează o clasă A trec în o nouă clasă B, dacă intervine un eveniment E. Studiul matematic al unor asemenea asigurări formează obiectul volumului D-lui Galbrun.

Capitolul I se ocupă de probabilităţile ce intervin în teoria asigurărilor pentru invaliditate şi căsătorii. In Cap. II se dau relaţiunile fundamentale. Cap. III se ocupă cu determinarea statistică a probabilităţilor relative la invaliditate. Cap. IV cu întrebuinţarea unei table generale de mortalitate. Cap. V cu procentele anuale de căsătorii. Cap. VI cu calculul probabilităţilor unor probabilităţi fundamentale. In o notă se dă consideraţiuni asupra aplicării probabilităţilor compuse şi a teoremei probabilităţilor fundamentale. La fine se dau tabele de invaliditate şi de căsătorii la diferite etăţi.

I. I.

C. C. Teodorescu. *Essais des matériaux. Sur la comparaison de deux séries de mesures.* Bucureşti 1933. (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physiques pures et appliquées de l'Ecole Politechnique «Roi Carol II»* Bucarest).

Alfred Horovitz. *Abaca pentru dimensionarea plăcilor de beton armat.* Bucureşti 1933.

Cristea Niculescu. *Curs de contabilitate industrială,* predat la şcoala politechnică din Timişoara. Bucureşti 1933.

R. Raclis. *Congresul internaţional al matematicianilor.* Zürich 4 — 12 Septemvrie 1932, Bucureşti. (Extras din *«Natura»*).

CERERI

Răspuns la Cererea No 57 din anul XXIV, pag. 186.

Printre profesorii francezi de matematici în Principate întâlnim în 1796 pe Jean Babtiste Trécourt, fost profesor de matematici şi la şcoala Sultanului dela Constantinopol. In 1798 găsim un Martinot, la Domnitorul Al. Calimachi. Un Coulin erà profesor la Dumitrache Bibescu.

Profesori francezi, — fără indicarea specialităţii, — către 1800, mai găsim la Gavril Conachi pe Ledoux, Mériage. De aci încolo numărul profesorilor francezi, — publici sau particulari, — profesori de toate specialităţile, creşte repede. Clémaron, Elisabeta de Belleville, „La femme Caumont" etc. (N. Iorga. Istoria învăţământului românesc. Bucureşti 1928).

P. Sergescu.

BIBLIOTECA „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 3 Aprilie. D-nii Focşa, Niculescu şi Stamatescu au făcut un referat asupra pedagogiei matematicilor elementare, D-l N. Ciorănescu a trimis o comunicare asupra unei teoreme medie pentru funcţiunile continui şi sumabile şi D-l N. Botea a tratat o problemă de geometrie proiectivă.

In seara zilei de 24 Aprilie D-l G. Mihoc a făcut un referat asupra unor chestiuni de analiză, D-l O. Onicescu a vorbit despre valori medii pentru unele mulţimi de puncte, şi D-l D. Barbilian despre configuraţii proiective de drepte caracterizate prin proprietăţi de mişcare.

Premiul anual „Traian Lalescu" în valoare de 10.000 lei oferit de *Revista universitară matematică,* de sub conducerea D-lui R. Racliş, celor mai distinşi licenţiaţi în ştiinţele matematice sau ingineri diplomaţi, a fost decernat pentru anul 1932 D-lui Cezar Coşniţă, licenţiat în ştiinţele matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Pentru anul 1931 premiul nu a fost decernat; în schimb suma corespunzătoare de 10.000 lei a fost oferită tot D-lui Cezar Coşniţă, ca ajutor de cărţi.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3491. *Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate câte odată, să se formeze trei numere de câte trei cifre, aşa în cât unul din aceste numere să egaleze suma celorlalte două şi să fie un patrat perfect.*

V. Thébault.

Fie *abc, def, ghi* numere cu cifre diferite aşa că

$$abc + def = ghi. \qquad (1)$$

Cea mai mică valoare a lui *ghi* se obţine luând cele mai mici valori pentru *a* şi *d,* apoi din cifrele rămase cele mai mici valori pentru *b* şi *c* şi în fine din cifrele rămase, cele mai mici valori pentru *c* şi *f.* Avem astfel

$$135 + 246 = 381$$

deci $ghi > 381$ şi cum *ghi* este şi patrat perfect, el se va găsi în şirul de patrate perfecte mai mari ca 381 şi având cifrele diferite între ele, adică în şirul

$$529\ ;\ 576\ ;\ 625\ ;\ 729\ ;\ 784\ ;\ 841. \qquad (2)$$

Consider pe 529. După (1) trebuie ca

$$abc + def = 529 \tag{3}$$

Dar

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45 \tag{4}$$

de unde, ţinând seamă de (3):

$$a + b + c + d + e + f = 29.$$

Insă $c + f$ este cel mult 17 rezultă din (3) că

$$c + f = 9$$

$$\therefore \quad a + b + d + e = 20$$

b şi e fiind diferite una de alta, rezultă din (3) că nu se poate lua decât

$$b + e = 12$$

$$a + d = 8$$

care este imposibilitate pentru (3). Deci 529 nu dă soluţie.

Examinând la fel pe fiecare din numerele şirului (2), se găsesc următoarele soluţiuni ale problemei:

$$576 = 182 + 394 = 184 + 392 = 192 + 384 = 194 + 382$$

$$729 = 143 + 586 = 146 + 583 = 183 + 546 = 186 + 543.$$

Observaţiuni. 1°. A dat soluţiunile exacte D-l Nubar Artaki-Acik.

2°. D-l M. Margulius (Bucureşti) nu a dat prima descompunere a lui 576 şi nici pe ultima a lui 729.

3°. D-l C. A. Cristopol a dat numai soluţiile corespunzătoare lui 729.

4°. Problema aceasta este un caz particular restrictiv al problemei 3672, propusă de mine şi rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXV, pagina 226, problemă în care ceream ca

$$abc = def - ghi \tag{5}$$

fără vre-o altă restricţie pentru numerele cu cifre diferite.

Dacă din soluţiile problemei 3672 se iau numai acelea în care *def* este patrat perfect se dă peste problema de faţă 3491.

5°. Dacă în relaţia dela 4° s'ar cere ca *abc* să fie patrat, atunci procedând ca la soluţia dată mai sus problemei 3491, sau utilizând rezultatele pe care le-am găsit la problema 3672, se găsesc următoarele soluţiuni

$$196 = 738 - 542$$

$$576 = 819 - 243$$

$$784 = 936 - 152.$$

6°. Dacă s'ar cere ca suma celor 2 numere să fie un cub se găseşte numai soluţia 729.

7°. Soluţiile egalităţilor (1) şi (5) rezolvă problema enunţată sub forma: *Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o singură dată să se formeze 3 numere de câte 3 cifre, din care unul patrat perfect, astfel că suma a 2 din aceste numere să fie egală cu cel de-al treilea număr.*

8°. Problema D-lui V. THÉBAULT este ulterioară problemei 3672, propusă de mine, deşi are număr mai mic; în adevăr problema 3491 a D-lui V. THÉBAULT a fost propusă de abia la pagina 78, Vol. XXXVIII, anul 1932, în locul unei probleme anulate, pe când problema mea a fost propusă la pagina 439, Vol. XXXIII, în anul 1928, adică cu 4 ani înainte. De atunci s'au mai propus în *Gazetă* astfel de probleme, iar anterior cunosc problema 3642 a D-lui I. IONESCU propusă la pagina 319, Vol. XXXIII cu următorul enunţ:

Să se adune trei numere de câte două cifre alese aşa ca la aceste numere şi la suma lor, să se găsească toate cifrele semnificative o singură dată.

COL. GH. BUICLIU.

---

*PROBLEMA 3602. *Se cer patratele* dmszu *în cari două cifre alăturate sunt identice?*

N. I. POPESCU.

Singurele restrângeri ce se pot face în rezolvarea problemei 3602 sunt următoarele:

1) Când cifrele identice sunt *zu*;
2) „ „ „ „ *sz*;
3) „ „ „ „ *dm*.
4) Patratele sunt cuprinse între 100^2 şi 316^2.

In primul şi al doilea caz, ultimele două sau trei cifre cu cari se termină un patrat perfect ne poate conduce mai lesne la găsirea soluţiunilor.

Când zu *sunt identice,* avem soluţiunile:

$10000 = 100^2$; $12544 = 112^2$; $14400 = 120^2$
$16900 = 130^2$; $19044 = 138^2$; $19600 = 140^2$
$22500 = 150^2$; $25600 = 160^2$; $26244 = 162^2$
$28900 = 170^2$; $32400 = 180^2$; $35344 = 188^2$
$36100 = 190^2$; $40000 = 200^2$; $44100 = 210^2$
$44944 = 212^2$; $48400 = 220^2$; $52900 = 230^2$
$56644 = 238^2$; $57600 = 240^2$; $62500 = 250^2$
$67600 = 260^2$; $68644 = 262^2$; $72900 = 270^2$
$78400 = 280^2$; $82944 = 288^2$; $84100 = 290^2$
$90000 = 300^2$; $96100 = 310^2$; $97344 = 312^2$.

In total 30 soluţii.

Când sz *sunt identice,* avem soluțiunile:

$10000 = 100^2$; $11449 = 107^2$; $11664 = 108^2$
$11881 = 109^2$; $12996 = 114^2$; $13225 = 115^2$
$14884 = 122^2$; $18225 = 135^2$; $19881 = 141^2$
$20449 = 143^2$; $24336 = 156^2$; $27225 = 165^2$
$27556 = 166^2$; $27889 = 167^2$; $28224 = 168^2$
$34225 = 185^2$; $40000 = 200^2$; $46225 = 215^2$
$52441 = 229^2$; $55225 = 235^2$; $61009 = 247^2$
$62001 = 249^2$; $63001 = 251^2$; $64009 = 253^2$
$70225 = 265^2$; $73441 = 271^2$; $81225 = 285^2$
$90000 = 300^2$; $99225 = 315^2$.

In total 29 soluții.

Cazul când ms *sunt identice,* avem:

$10000 = 100^2$; $14400 = 120^2$; $16641 = 129^2$
$22201 = 149^2$; $29929 = 173^2$; $38809 = 197^2$
$40000 = 200^2$; $46656 = 216^2$; $48841 = 221^2$
$53361 = 231^2$; $56644 = 238^2$; $60025 = 245^2$
$65536 = 256^2$; $80089 = 283^2$; $88804 = 298^2$
$90000 = 300^2$.

In total 16 soluții.

Cazul când dm *sunt identice,* avem:

$11025 = 105^2$; $11236 = 106^2$; $11449 = 107^2$
$11664 = 108^2$; $11881 = 109^2$; $22201 = 149^2$
$22500 = 150^2$; $22801 = 151^2$; $33124 = 182^2$
$33489 = 183^2$; $33856 = 184^2$; $44100 = 210^2$
$44521 = 221^2$; $44944 = 212^2$; $55225 = 235^2$
$55696 = 236^2$; $66049 = 257^2$; $66564 = 258^2$
$77284 = 278^2$; $77841 = 279^2$; $88209 = 297^2$
$88804 = 298^2$; $99225 = 315^2$; $99856 = 316^2$.

In total 24 soluții.

In total problema admite:

$$30 + 29 + 16 + 24 = 99 \text{ soluții.}$$

Observațiuni:

1) Nici un corespondent nu a făcut toate restrângerile posibile, numai parte din ele.

2) Au rezolvat problema dând numărul de soluţii din paranteză D-nii: T. G. Baciu (98), N. G. Voicu (90), I. N. Aliman (86), N. N. Costache (85), P. Ghişoiu (84), I. A. Raicu (84), M. Margulius (83), D. Rosanu (83), I. Mureşanu (82), E. Burlacu (81), I. Bucur, D. Şerban, G. Păun şi Gh. Zamfirescu câte 80, C. Hamerak, M. Ungheanu şi N. Rentea câte 79, V. Crivăţ (78), C. Râmniceanu T. Velicescu şi I. Popa câte 76, A. Buricovici (73). A. Arsene şi I. Safin câte 70, I. Voicu (67), St. Popescu (65), M. Davidson (42), P. Almăjean (24).

3) Problemi de genul acesta, unde corvada arhivarului cari cercetează o tabelă numerică, înlocueşte raţionamentul, nu face prea multă cinste ştiinţei.

Sfătuim deci cu toată insistenţa pe tinerii noştri corespondenţi, să creeze problemi bazate pe atâtea proprietăţi şi teoreme stabilite de matematici, iar nu şarade rezolvate cu ajutorul tabelelor de patrate, cuburi, etc...

I. L.

PROBLEMA 3751. *Se cere patratul* dmszu *în care primele patru cifre sunt consecutive, alternând cele perechi cu cele neperechi.*

V. I. Crivăţ.

Din enunţ rezultă că z şi m sunt de o paritate iar s şi d de altă paritate. Prin urmare dacă se dă z atunci s şi d pot fi:

$$s = z + 1 \begin{cases} d = z + 3 \\ d = z - 2 \end{cases} \quad ; \quad s = z - 1 \begin{cases} d = z + 1 \\ d = z - 3 \end{cases}$$

sau

$$d = z + 1 \begin{cases} s = z + 3 \\ s = z - 2 \end{cases} \quad ; \quad d = z - 1 \begin{cases} s = z + 1 \\ s = z - 3 \end{cases}$$

cea mai mare diferenţă între s şi z putând fi 3.

Pe de altă parte m va fi $z \pm 2$.

Din grupa de 3 cifre cu care se termină un patrat perfect, înscrisă în nota matematică din *Gazeta Matematică*, Vol. XXXIII, pag. 137 [1]), aleg pe acele grupe în care s, z sunt de parităţi diferite şi diferă cel mult prin 3.

---

1) In tabelul dela pagina 138 a acestei note trebuie făcute rectificările: In titulatura tabelului se înlocueşte cuvântul *miilor* prin *sutelor*. La terminaţia 25 se taie 8, căci nu sunt patrate terminate în 825.

Cu această grupă și ținând seamă de cele spuse la început se formează numerele înscrise în coloana a doua a tabelului următor, numere între care va trebui căutat *dmszu*.

Grupa *szu*	Numerile între care trebuie căutat *dmszu*
100	32100; 12300
104; 304	32104; 12304
016; 216; 416	23016; 03216; 43216; 23416
121; 321; 521	30121; 34121; 10321; 14321; 54321; 34521
124; 324; 524	30124; 34124; 10324; 14324; 54324; 34524
129; 329; 529	30129; 34129; 10329; 14329; 54329; 34529
036; 236; 436; 636	21036; 03236; 41236; 45236; 21436; 25436; 65436; 45636
141; 341; 541; 741	32141; 12341; 52341; 56341; 32541; 76541; 56741
144; 344; 544; 744	32144; 12344; 52344; 56344; 32544; 36544; 56744; 76544
256; 456; 656; 856	43256; 23456; 63456; 67456; 43656; 47656; 87656; 67856
361; 561; 761; 961	54361; 34561; 74561; 78561; 54761; 58761; 98761; 78961
364; 564; 764; 964	54364; 34564; 74564; 78564; 54764; 58764; 98764; 78964
369; 569; 769; 969	54369; 34569; 74569; 78569; 54769; 58769; 98769; 78969
476; 676; 876	65476; 45676; 85676; 89676; 65876; 69876
581; 781; 981	76581; 56781; 96781; 76981
584; 784; 984	76584; 56784; 96784; 76984
696; 896	87696; 67896

In total sunt 97 de numere care trebuie examinate spre a găsi pe *dmszu*.

Din aceste numere se elimină acelea care fiind multipli de 3, 7, 11 nu sunt şi multipli de 9, 49, 121 şi care se recunosc prin regulile de divizibilitate.

La numerele care rămân li se extrage rădăcina patrată.

Dacă se dispune de o tablă de patrate perfecte, se caută în acea tablă fiecare din cele 97 de numere.

Pe una din aceste căi se găseşte că soluţia problemei este:

$$281^2 = 78961.$$

Notă. 1°. Au găsit soluţia exactă formând atâtea numere *dmsz* cât se arată în paranteză şi apoi extrăgând rădăcinile patrate, D-nii: P. I. Ghişoiu (324); H. St. Dăscălescu (148); I. Gh. Popa, Gh. O. Zamfirescu, D. M. Popescu (câte 144); N. Cristache, G. P. Boerescu, I. Aliman, D. V. Şerban (câte 132); G. M. Păun, I. Voicu (câte 114); D. V. Bolgar (107); Gr. M. Grecu (34).

2°. D-l M. Margulius (Lic. Sp. Haret, Bucureşti) a găsit soluţia exactă cercetând o tablă de patrate.

3°. Interpretând enunţul greşit au căutat şi găsit:

Soluţia $116^2 = 13456$ D-nii C. Heytmanek; I. Boian.

Soluţia $213^2 = 45369$ D-nii N. Gr. Rentea, J. N. Vâlceanu, A. I. Bidoianu, M. Gh. I. Ungheanu.

Soluţia $152^2 = 23104$ D-nii N. Gr. Rentea, M. Gh. I. Ungheanu.

4°. D-l P. I. Ghişoiu a rezolvat şi problema în care ultimele 4 cifre ale lui *dmszu* sunt în condiţiile problemei 3751 şi a găsit soluţiile:

$$116^2 = 13456 \ ; \ 126^2 = 15876 \ ; \ 137^2 = 18769.$$

5°. D-l N. Gh. Voicu a găsit, ca o observaţie la soluţia sa, numărul

$$213^2 = 45369.$$

6°. Unii corespondenţi au găsit că problema *nu are* soluţii.

7°. Rezolvind complect problemele date ca observaţii sau ca interpretare greşită a problemei 3751, se găsesc următoarele rezultate:

a) Patratele *dmszu* în care *d, m, s, z* sunt consecutive, scrise într'o ordine oarecare sunt:

$$152^2 = 23104 \ ; \ 213^2 = 45369 \ : \ 281^2 = 78961$$

b) Patratele *dmszu* în care *m, s, z, u* sunt consecutive, sunt:

$$116^2 = 13456 \ ; \ 126^2 = 15876 \ ; \ 133^2 = 17689 \ ; \ 137^2 = 18769 \ ;$$

$$182^2 = 33124 \ ; \ 234^2 = 54756.$$

c) În afară de cele dela *a), b)* şi dela *d),* următoarele patrate *dmszu* au 4 cifre consecutive:

$$118^2 = 13924 \ ; \ 185^2 = 34225 \ ; \ 186^2 = 34596$$

$$214^2 = 45796 \ ; \ 232^2 = 53824 \ ; \ 252^2 = 63504.$$

d) Următoarele patrate *dmszu* au toate cifrele consecutive

$$152^2 = 23104 \ ; \ 179^2 = 32041 \ ; \ 213^2 = 45369.$$

8°. Următoarele patrate de 6 cifre au primele sau ultimele 5 cifre consecutive

$$323^2 = 104329 \ ; \ 368^2 = 135424 \ ; \ 871^2 = 758641 \ ; \ 484^2 = 234256.$$

9°. Singurul cub *dmszu* care conţine 4 cifre consecutive este

$$24^3 = 13824.$$

Col. Gh. B.

PROBLEMA 3782. *Care sunt cuburile* dmszu, *în care cifrele de rang neperechi sunt neperechi şi cifrele de rang perechi sunt perechi ?*

N. Gh. Voicu.

Soluţie dată de D-nii: I. C. Boian, Vl. I. Crivăţ, I. P. Gheorghe, P. I. Ghişoiu, C. D. Ionescu-Ţiu, M. Margulius, M. D. Motoc, I. Gh. Popa, N. Radoveneanu, N. Gr. Rentea, M. Gh. Ungheanu, J. N. Vâlceanu şi N. N. Velicescu.

Fie că se numără cifrele dela dreapta la stânga, fie dela stânga la dreapta, trebue ca *d, s, u* să fie neperechi iar *m, z* perechi.

Dacă N^3 este cubul căutat, avem

$$10000 < N^3 < 99999$$

$$\therefore \quad 21 < N < 47$$

aşa că soluţia cerută se va găsi printre cuburile numerelor neperechi cuprinse între aceste limite.

Ridicând la cub acele 12 numere se găseşte că singura soluţie a problemei este

$$23^3 = 12167.$$

Notă. 1°. Au găsit şi alte soluţiuni pe lângă 23^3, din cauza interpretărilor greşite date enunţului, D-nii V. I. Aliman, Gh. A. Apostolescu, G. P. Boerescu, M. N. Constantinescu, N. N. Costache, M. D. Creţu, Cr. M. Grecu, D. M. Popescu, D. H. Nicolau, A. C. Raicu, C. N. Russe, D. Şerban-Ulmeni, Cr. I. Ştefănescu, P. N. Vasilescu şi Gh. O. Zamfirescu.

2°. D-l P. I. Ghişoiu a rezolvat şi problema în care *d, s, u* sunt perechi iar *m, z* neperechi. Această problemă nu are soluţie.

3°. D-l P. I. Ghişoiu căutând patratele care îndeplinesc condiţiile problemei 3782 a găsit soluţiile:

$$111^2 = 12321 \; ; \; 113^2 = 12769 \; ; \; 119^2 = 14161 \; ;$$

$$127^2 = 16129 \; ; \; 137^2 = 18769 \; ; \; 181^2 = 32761 \; ;$$

$$187^2 = 34969 \; ; \; 237^2 = 56169 \; ; \; 269^2 = 72361$$

$$273^2 = 74529 \; ; \; 277^2 = 76729 \; ; \; 281^2 = 78961 \; ; \; 311^2 = 96721.$$

4°. D-l N. N. Velicescu găseşte că singurile cuburi de 5 cifre neperechi sunt:

$$33^3 = 35937 \quad \text{şi} \quad 39^3 = 59319.$$

5°. Căutând ca la 3° se găseşte că singurile patrate *dmszu*, în care *d, s, u* sunt perechi iar *m, z* neperechi, sunt:

$$204^2 = 41616 \; ; \; 264^2 = 69696 \; ; \; 296^2 = 87616.$$

Gh. B.

PROBLEMA 4131. *Trouver un cube parfait de six chiffres dont la racine égale la différence de deux nombres formés par ses tranches de trois chiffres.*

V. Thébault.

Soluţie dată de D-nii: M. Margulius (Lic. Spiru Haret), N. N. Mihăileanu (Constanţa) şi I. N. Sager.

Fie A şi B tranşele de câte trei cifre ale cubului căutat, N. Presupunând $A > B$, putem scrie:

$$N = 1000\,A + B = (A - B)^3$$

şi adăugând ambilor membrii pe A avem:

$$1001\,A = (A - B)^3 + (A - B) = (A - B)\,[(A - B)^2 + 1].$$

Insă: $1001 = 7 \times 11 \times 13$; pe de altă parte se ştie că: $(A - B)^2 + 1$, sumă a două pătrate prime între ele, nu poate fi formată decât din factori primi de forma: multiplu $4 + 1$ şi de 2^1. Această sumă nu va putea deci să conţină pe 7 şi 11 ca factori. Prin urmare factorul $(A - B)$ trebuie să fie multiplu şi de 7 şi de 11 adică de 77. Insă el e inferior lui 100 căci N e inferior lui 10^6 şi atunci $\sqrt[3]{N}$ e inferior lui 100. Ca atare, factorul $(A - B)$ nu poate fi altul decât 77 şi avem atunci soluţia:

$$(A - B) = 77 \quad N = (A - B)^3 = 77^3 = 456533$$

care nu convine aci, din moment ce $A = 456$ este inferior lui $B = 503$.

Să presupunem $B > A$, de unde:

$$N = 1000\,A + B = (B - A)^3$$

$$\therefore\ 7 \times 11 \times 13\,A = (B-A)\,[(B-A)^2 - 1] = (B-A)\,(B-A-1)(B-A+1).$$

Unul din cei trei factori: $B - A$; $B - A - 1$; $B - A + 1$ trebuie să fie divizibil cu 13.

Cercetăm cazul $B - A = \mathfrak{M}13$. Cum avem $47 < \sqrt[3]{N} < 99$ urmează că $B - A$ nu poate fi decât: $4 \times 13 = 52$; $5 \times 13 = 65$; $6 \times 13 = 78$ şi $7 \times 13 = 91$.

Formând cuburile acestor numere găsim că:

$$(B - A)^3 = 78^3 = 474552$$

convine, căci avem:

$$B - A = 552 - 474 = 78.$$

Celelalte numere nu răspund problemei.

Fie: $B - A - 1 = M13$. Rezultă că $B - A$ poate lua valorile: 53 ; 66 ; 79 şi 92. Formând cuburile acestor numere vedem că niciunul nu convine problemei.

In fine fie: $B - A + 1 = M13$, de unde $B - A$ va lua valorile: 51 ; 64 ; 77 şi 90. Incercând şi aceste numere găsim soluţia:

$$(B - A)^3 = 77^3 = 456533$$

cu alte cuvinte două soluţiuni răspund problemei:

$$456533 = (533 - 456)^3 = 77^3$$

$$474552 = (552 - 474)^3 = 78^3.$$

Soluţia II. Problema 4131 a mai fost publicată în «Journal de mathématiques élémentaires» par H. VUIBERT sub No. 11505, propusă tot de D-l V. THÉBAULT.

Pentrucă soluţia de mai sus este identică cu cea dată în No. 13 pag. 98 anul 56 al sus citatei reviste îmi propun să dau o soluţie diferită în cele ce urmează.

Păstrând pentru A şi B aceleaşi semnificaţii şi notând cu **a, c, d** şi f respectiv cifra sutelor de mii, a miilor, a sutelor şi a unităţilor cubului căutat, observăm că:

1°. Cifra **f** nu poate fi zero. Dacă ar fi, cum N este un cub, ar atrage şi B = 0; conform enunţului va rezulta $\sqrt[3]{\overline{N}} = A$. Acest lucru nu e posibil căci A are trei cifre în timp ce pentru N avem restricţia $47 < \sqrt[3]{\overline{N}} < 99$.

2°. Tot pentru motivul că $47 < \sqrt[3]{\overline{N}} < 99$, dacă $A > B$ vom avea neapărat:

$$a = d + 1 \quad \text{sau} \quad a = d \qquad \text{(I)}$$

iar dacă $A < B$ vom avea:

$$d = a + 1 \quad \text{sau} \quad d = a \qquad \text{(II)}$$

3°. Insemnând:

$$c - f = k \qquad (A > B)$$

trebuie ca numărul k^3 să se termine cu f. Se găseşte cu uşurinţă că această condiţie este îndeplinită pentru valorile corespunzătoare tabloului:

c	0	0	0	0	0	2	2	8	8
f	2	3	5	7	8	1	6	4	9
k	8	7	5	3	2	1	6	4	9

(III)

De asemenea însemnând:

$$f - c = q \qquad (B > A)$$

trebuie ca numărul q^3 să se termine cu **f**. Intocmim tabloul corespunzător de mai jos:

f	1	4	5	6	9	2	7	3	8
c	0	0	0	0	0	4	4	6	6
q	1	4	5	6	9	8	3	7	2

(IV)

Acestea fiind să ne servim acum de un tabel de cuburi perfecte.

a) Cazul $A > B$. Conform tabelului (III) alegem cuburile de 6 cifre, cari au ca cifră a miilor (c) pe 0,2 sau 8.

Acestea sunt :

110592 ; 140608 ; 250047 ; 132651 ; 328509 ;

Cum nici unul din ele nu îndeplinesc condiția (I), nu vom avea soluție în acest caz.

b) Cazul ($B > A$. Conform tabelului (IV) alegem cuburile ce au $c = 0$; 4 ; 6. Acestea sunt :

830584 ; 970299 ; 314432 ; 474552 ; 804357 ; 456533.

Eliminând pe acelea ce nu îndeplinesc condițiunea (II), rămân de cercetat cuburile :

314432 ; 474552 ; 456533.

Primul din acestea trei, se vede imediat că dă :

$$B - A > 100.$$

Celelalte două sunt soluțiile problemei.

CPT. GH. N.

PROBLEMA 4142. *Să se găsească un cub de 9 cifre, știind că numerele de câte 3 cifre dela dreapta și dela stânga sunt consecutive, iar numărul de 3 cifre dela mijloc este egal cu 408.*

COL. GH. BUICLIU.

Fie X^3 numărul cerut și N un număr de 3 cifre.

Conform enunțului trebuie să avem

$$1000000 \times N + 408000 + N + 1 = X^3$$

sau

$$1000000 \times (N + 1) + 408000 + N = X^3$$

de unde se deduce

$$1000001 \times N + 408001 = X^3 \qquad (1)$$

și

$$1000001 \times N + 140800 = X^3. \qquad (2)$$

Din (1) se vede că

$$101 \times 9901 \times N + 101 \times 4039 + 62 = X^3$$

de unde rezultă că trebuie ca $X^3 - 62$ să se dividă prin 101.

In condiţiile problemei

$$464 < X < 999. \qquad (3)$$

Dacă se caută resturile diviziunei prin 101 a tuturor cuburilor numerelor dela 1 la 101 inclusiv, ceeace se poate face fără a efectua ridicările la cub, se găseşte că

$$60^3 = 101 \times m + 62$$

$$\therefore \quad (101 \times M + 60)^3 = 101m + 62$$

ceeace înseamnă că X dat de (3) trebuie să fie de forma

$$101 \times m + 60.$$

Dar

$$464 = 4 \times 101 + 60$$

deci X se va găsi printre numerele

$$565 \ ; \ 666 \ ; \ 767 \ ; \ 868 \ ; \ 969 \qquad (4)$$

pe care ridicându-le la cub, se găseşte soluţia

$$295 \cdot 408 \cdot 296 = 666^3.$$

Din (2) se deduce

$$101 \times 9901 \times N + 101 \times 13940 + 60 = X^3.$$

Avem însă

$$57^3 = 101 \times m + 60$$

$$\therefore \quad (101 \times M + 57)^3 = 101 \times m + 60 \qquad (5)$$

aşa că X va fi de forma $101 \times M + 57$. Pentru aflarea lui X este deci destul de a scădea pe 3 din fiecare din numerele şirului (4). Se obţine şirul de numere

$$562 \ ; \ 663 \ ; \ 764 \ ; \ 865 \ ; \ 966 \qquad (6)$$

ale căror cuburi nu răspund enunţului.

Problema are deci o singură soluţie.

Observaţiuni. 1°. Problema se poate rezolva şi fără a ridica la cub numerele şirurilor (4) şi (6). Iată cum. Să consider primul număr al şirului (4) pe care-l introduc în (1); rezultă

$$1000001 \times N + 408001 = 565^3 = 5^3 \times 113^3 \qquad (7)$$

$$N + 1 = 125 \times P.$$

Rezolvând în numere întregi această ecuaţiune şi luând numai soluţiunile N de 3 cifre le introduc în (7). Acelea care vor da identităţi vor fi soluţii.

2°. D-l NUBAR ARTAKI-ACIK (Bucureşti) anunţă că soluţia problemei se găseşte printre soluţiile problemei 3631 rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXIV pag. 73, fără a încerca să dea o altă soluţie.

După cum se vede mai sus, problema 4142 are ceva caracteristic care o diferă şi ca rezultat şi ca soluţie de problema 3631 şi ar fi fost de recomandat pentru cine cunoştea problema 3631 să nu se fi mulţumit să ia rezultatele acelei probleme, a cărei soluţie are între alte neajunsuri şi pe acela al ridicării la cub a foarte multe numere de câte 3 cifre.

3°. D-l M. MARGULIUS (Bucureşti) după ce observă că

$$464 < X < 999$$

spune că *«cercetând cuburile cuprinse între aceste limite găsim soluţia 663³»*.

E foarte probabil că s'a folosit de o tablă numerică a cuburilor, pentru că cu toată hărnicia pe care i-o cunoaştem nu ne vine a crede că ar fi ridicat la cub peste 500 numere de câte 3 cifre.

Ori cum ar fi, d-sa a dat numărul exact, dar nu a rezolvat problema, căci aceasta nu este un metod de rezolvare matematică.

GH. B.

PROBLEMA 4204. *Fie* (O, r) *un cerc cu centrul în* O *şi de rază* r, *iar* $ab = l_3$ *latura triunghiului echilateral înscris în acest cerc.*

Se descrie un cerc (O, R) *concentric cu primul şi fie* $AB = L_3$ *latura triunghiului echilateral în cercul* (O, R).

Să se arate că dacă $R = l_3$, *atunci cercul* (O, r) *taie pe* AB *în trei părţi egale.*

ALEXANDRU NICULESCU.

Soluţie dată de D-ra MARGARETA LÉBER (studentă Cluj) şi de D-nii: S.-LT. AVRAM N. CONST. (din geniu), S.-LT. AUREL EM. BĂDESCU, CHIRIAC CONST. (Lic. Militar Iaşi), CEZAR IVĂNESCU (stud. Iaşi), MARIUS MARGULIUS (Şc. Politechnică Buc.), MAVRODIN DIMITRIE (Lic. M. Emin. Buc.), IANCU N. SAGER, AL. GEIER (st. Cluj), MIRCEA MĂNESCU (elev Cl. VI L. Mihail Eminescu Buc.), C. PÂRVULESCU (stud. Buc.), EM. MEREUŢĂ (stud. Buc.), GH. M. ŞERMET şi ZIFF S. MARTIN.

1°. Din enunţ rezultă:

$$AB = L_3 = R \cdot \sqrt{3} = l_3 \cdot \sqrt{3} = r \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3r.$$

adică:

$$AB = 3r \qquad (1)$$

Dar OE fiind apotema relativă la AB, avem:

$$OE = \frac{R}{2} = \frac{l_3}{2} = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{2} .$$

Rezultă de aci că OE este şi apotema exagonului de latură CD înscris în cercul de rază r, atunci:

$$DC = r. \qquad (2)$$

E uşor de văzut însă că segmentele AD şi CB sunt egale; deducem deci din relaţiile (1) şi (2):

$$AD = CB = DC = r.$$

Q. e. d.

Observări.

2°. Se putea calcula segmentul CE şi prin considerarea triunghiurilor asemenea: OCE şi AEF.

Avem aci un *caz special de asemănare a două triunghiuri dreptunghice, când au două laturi proporţionale.* In adevăr, prin consideraţia liniilor trigonometrice reiese egalitatea unghiurilor celor două triunghiuri. In acest sens a lucrat D-l Mircea Petrescu (Loco), fără a preciza cazul de asemănare amintit.

3°. D-l Nicu Borza (Cl. VII Cluj) verifică problema; verificarea D-sale sugerează însă o veritabilă soluţie. In adevăr după ce deducem că: $CD = r$, ca la 1°, să presupunem că avem,

$$AC = k \cdot CE = k \cdot \frac{r}{2} .$$

Atunci din triunghiul dreptunghic AEF rezultă:

$$\left(\frac{r}{2} + k \cdot \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r\right)^2 = (r \cdot \sqrt{3})^2$$

de unde, simplificând cu r^2,

$$(1 + k)^2 + 3 = 12$$

care dă singura valoare acceptabilă: $k = 2$. Deci $AC = r$.

3°. D-nii: Avram L. Cohn (Cl. VI Lic. M. Eminescu Buc.), Cristopol A. Const. şi Petrescu I. Ion au dat soluţii analoage cu cea dela 1°, dar mai lungi şi lipsite de precizie.

D-l Patraulea N. (Cl. VII L. M. N. F.) aplică greşit cazurile de egalitate ale triunghiurilor, ajunge însă la rezultatul cerut!

Un anonim încearcă problema, reluând procesul de construcţie al ei, dar soluţia este incompletă.

Al. N.

*EXERCIŢII

30. Să se găsească forma generală a numerelor care mărite sau micşorate cu 1 dau patrate perfecte.

Gh. Vasiliu-Leoben.

R. Punând $x+1=a^2$ şi $x-1=a^2-2=b^2$ şi cum $b=\sqrt{a^2-2}=a-p$ urmează că $a=\frac{p^2+2}{2p}$ deci numerele sunt de forma $x=\frac{p^4+4}{4p^2}$.

31. Ce descrie un punct ştiind că în tot timpul mişcării media aritmetică, media geometrică şi media armonică, a coordonatelor lui formează o proporţie armonică?

Gh. Vasiliu-Leoben.

R. Dacă însemnăm cu A, G şi H cele trei medii ale coordonatelor unui punct, avem conform enunţului că:

$$\frac{A-G}{G-H}=\frac{A}{H}$$

x şi y fiind coordonatele avem că:

$$\frac{2xy}{x+y}\left[\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right]=\frac{x+y}{2}\left[\sqrt{xy}-\frac{2xy}{x+y}\right]$$

sau:

$$2\sqrt{xy}=\frac{x+y}{2}+\frac{2xy}{x+y} \;\ast\ast\ast\; 4(x+y)\sqrt{xy}=x^2+6xy+y^2 \;\ast\ast\ast\; (x-y)^4=0.$$

Punctul descrie aşa dar bisectoarea I-lui şi a celui de al III-lea cvadrant.

32. Fie M un punct mobil pe elipsa cu centrul în O şi M' proecţia lui M pe axa mare OA. Se cere locul proecţiei lui M' pe OM.

I. N. Sager.

R. Fie M $(\alpha.\beta)$ coordonatele lui M şi

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

ecuaţia elipsei iar (x, y) coordonatele lui C, proecţia lui M' pe OM. Din ecuaţiile dreptelor OM şi M'C se deduce

$$\alpha^2=\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2} \quad ; \quad \beta^2=\frac{y^2(x^2+y^2)^2}{x^4}.$$

Ducând aceste valori ale lui α, β în ecuaţia elipsei se găseşte că C descrie curba

$$b^2x^2(x^2+y^2)^2+a^2y^2(x^2+y^2)^2-a^2b^2x^4=0.$$

PROBLEME PROPUSE

4251. Un număr de trei cifre are cubul format din patru grupe. Grupa întâia identică cu grupa ultimă este cub perfect; iar grupa doua identică cu grupa treia e patrat perfect.

Să se găsească numărul.

D. Arg. Dumitrescu.

*4252. Să se găsească două numere întregi, care adunate, scăzute, împulțite să dea totdeauna un număr pătrat perfect.

O. N. Țino.

*4253. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând latura BC, înălțimea AH și produsul AB $\times$ AC.

Col. Gh. Buicliu.

*4254. Înălțimile triunghiului ABC se întâlnesc în ortocentrul H. Pe aceste înălțimi se iau din H către laturi lungimile HA_1, HA_2, HA_3, egale respectiv cu laturile BC, CA, AB.

Să se arate că laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt perpendiculare pe medianele lui ABC și egale cu dublul acestor mediane și că centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ este punctul H.

N. Botea.

4255. ABC și A'B'C' fiind respectiv triunghiul de referință și triunghiul său ortic, perpendicularele duse din centrele cercurilor lui Euler ale triunghiurilor AB'C', BC'A', CA'B' pe laturile corespunzătoare ale triunghiului de referință, sunt concurente.

Const. Ionescu Bujor.

4256. Se dau două cercuri tangente interior în punctul A. Se consideră diametrul comun AOB și AOB'. Se ia pe cele două cercuri puntele M și R, așà încât unghiurile MOB și ROB' să fie egale și de semn contrar.

Se cere locul punctului P, vârf al paralelogramului PMOR.

† St. N. Mirea.

4257. Să se rezolve sistemul:

$$x+y+\frac{y}{z}=a, \quad y+z+\frac{z}{x}=a, \quad z+x+\frac{x}{y}=a.$$

Șt. Olteanu.

4258. Să se determine U_n dat de relaţia de recurenţă

$(n-2)\ U_n = n\,(U_{n-1} - a)$, pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, n$

unde a este o constantă şi presupunând $u_0 = 0$.

TH. ANGHELUŢĂ.

*4259. Să se stabilească identitatea:

$$\sin^2(a+b+c) - [\sin(a+b)\cos c + \cos a \cos b \sin c]\,[\sin(a+b+c) - \sin a \sin b \sin c] = \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c.$$

N. C.

4260. De un punct fix F se prinde un fir FI, iar de I, prin firele IA, IB, IC, vârfurile unui triunghiu ABC. Triunghiul fiind presupus omogen şi greu, care sunt condiţiunile ca poziţiunea lui de echilibru să fie orizontală?

I. IONESCU.

ERATĂ. 1°. Soluţia dată problemei 3367 la pag. 303 a numărului precedent este eronată şi se anulează.

Adevărata soluţie a problemei 3367 s'a publicat la pag. 310, Vol. XXXI.

2°. Pag. 308 rândul 18 de sus se intercalează *093zu, 164zu* în şirul numerelor de cercetat.

3°. Pag. 309 rândul 19 de jos se pune *dm101* în loc de *dm001.*

Idem rândul 17 de jos se înlocueşte prin:

dm000 fiind terminat cu 3 zerori nu poate fi patrat decât dacă $m = 0$, *şi atunci* d *trebue să fie patrat, deci soluţiile*

10000 ; 40000 ; 90000.

Idem rândul 8 de jos se pune N^2 în loc de N^3.

4°. Pag. 310 în rândul 4 de sus se citeşte: *singura soluţie cu toate cifrele semnificative.*

5°. Pag. 311 în ecuaţia (3) se înlocueşte x^1 şi y^3 prin x^2 şi y^2.

„ „ „ din rândul 11 se înlocueşte y^3 prin y^2.

„ în valoarea lui S se înlocueşte $4a^2 - b^2$ dela numitor prin $\sqrt{4a^2 \quad b^2}$.

6°. Pag. 316 în primul membru al ultimei egalităţi se înlocueşte 3 prin r.

7°. Pag. 319 în enunţul problemei 4244 se citeşte în primul rând B, C, B', C' . . . în loc de B, C, B, C', . . .

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexiu I. (4121); *Anonim* (4174); *Avram N. C. Subloc.* (4186, 212, 15, 20, 41, 44); *Bădescu E. Aurel Subloc.* (3434, 4208, 17, 20, N, P); *Borza Al. N.* (4200, 38); *Cristopol A. C.* (P); *Curchi Ioan* (2591, 3898, 4183, 207, 08, 17, 19, 33); *Geier H. Alfred* (4145); *Ivănescu C.* (3908, 4188, 93, 4207, 15, 17, 20, 21, 39, 45, A, N, P); *Léber Margareta* (4232); *Lenco I.* (4200, 05); *Mareş I. Em.* (3965, 88, 4179, 84, 217, 31); *Margulius M.* (2539, 45, 91, 643, 47, 959, 3019, 85); *Mănescu M.* (4056); *Mihăileanu N. N.* (3434, 4244, 45, E, N, P); *Miu M. I.* (P); *Patraulea N. N.* (3019, P); *Petrescu I. I.* (3434, 4229, P); *Sager N. I.* (4229); *Şeremet M. Gh.* (3335); *Silaş George* (4244); *Vasiliu C. I.* (3459); *Zane D. N.* (4217); *Ziff S. Martin* (4212, 15, 20, 38, 41, 44).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMARUL 10. — IUNIE 1933

SUMARUL

1. Invățământul Aritmeticii în liceele noastre. . . *I. Ionescu*
2. Proprietăți ale triunghiului (urmare) . . . . . *N. G. Botea*
3. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „V. Cristescu"
4. Asupra premiului „Inginer H. Capriel"
5. Note matematice: 49 — 50
6. Bibliografie
7. Cereri
8. Diverse
9. Probleme rezolvate: 2392, 3244, 3842, 3894, 4128, 4176, 4217, 4241
10. Exerciții: 33 — 34
11. Probleme propuse: 4261 — 4270

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 35, 47, 48, 50, 51, 54, 55, 63, 65, 67, 69, 70, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 16, 24, 25, 26, 30, 35, 36, 37, 40, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 56, 57, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

INVĂȚĂMÂNTUL ARITMETICII IN LICEELE NOASTRE

(Comunicare făcută la Societatea Română de Ştiinţe în ziua de 8 Mai 1933)

După desfiinţarea Secţiilor reale dela Liceele dela noi în anul 1928, programul matematicilor în Liceul unificat s'a redus foarte mult, chiar sub nivelul în care ele se găseau înainte de înfiinţarea secţiilor reale prin reforma lui SPIRU HARET; mai mult încă, după cum am arătat în Nota No. 1 din anul XXXVI al *Gazetei Matematice,* actualul program este inferior celui ce erea în colegiul Sft. Sava acum 100 ani!

In aceste condiţiuni, Şcoala Politecnică „Regele Carol II" din Bucureşti a fost nevoită să înfiinţeze *Anul preparator,* care exista în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Sosele, pentru a completa cunoştinţele de matematici de care au nevoie elevii acelei şcoale pentru urmărirea cursurilor tecnice. In programul acelui *An* s'a prevăzut reînprospătarea cunoştinţelor de geometrie, algebră şi trigonometrie elementare; cursuri de algebră superioară, geometrie analitică şi descriptivă, mecanică, fizică, chimie, geologie, desen. Aritmetica se presupunea cunoscută, spre a nu se mai reveni asupra ei.

Admiterea în *Anul preparator,* pentru aproximativ 250 locuri, se face pe baza unui concurs între candidaţi posedând diploma de bacalaureat, şi asupra cunoştinţelor de matematici cerute de programul liceelor noastre şi a unei compoziţiuni asupra ştiinţelor fizice, chimice şi naturale din acelaşi program. Din anul 1929, de când s'au început acele concursuri, am făcut parte din Comisiunea examinatoare pentru Aritmetică. In luna Octomvrie trecut, pentru prima dată, s'au prezentat bacalaureaţi cari au absolvit cunoştinţele matematice după programul Liceului unificat, şi văzând starea în care s'au prezentat candidaţii, găsesc necesar să fac aci o dare de seamă a rezultatelor obţinute la tezele date, după cum am mai făcut aci o asemenea expunere la 18 Noemvrie 1913, când am făcut parte din Comisiunea examinatoare pentru Anul preparator, din vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele, pentru trigonometrie. Voiesc să dau aci o nouă demonstraţiune a unei vechi teoreme pe care am enunţat-o şi atunci şi anume:

„Indulgența profesorilor de matematici creiază nulități matematice".

Voiesc cu aceasta, cum am spus și acum 20 ani, să mai procur o armă profesorilor de matematici în contra gloatelor care susțin cu toată tăria principiul conservării neștiinței la noi în țară.

* * *

La concursul din Octomvrie trecut s'au înscris 377 candidați. Dintre aceștia, 12 nu s'au prezentat la teza de Aritmetică, iar 9 au obținut nota 0, pentru că au dat foile albe, sau pentru că au copiat, — căci am dovedit că în unele săli controlul nu a fost destul de vigilent, — sau pentru că unii au fost găsiți cu cunoștințe negative. Regret și eu, ca fostul meu profesor de Mecanica aplicată, CONSTANTIN MĂNESCU, că numerele negative nu au pătruns încă în darea notelor de merit, de oare ce este evident că o foaie albă curată, dată la un concurs, valorează mai mult de cât una plină de erezii, care dovedesc nu numai că cel ce candidează nu știe, dar că nici nu-și dă seama de ignoranța lui, sau că e de rea credință. In raportul pe care l'a trimis Ministerului în 18 Decemvrie 1887, GHEORGHE DUCA, pentru reorganizarea Școalei Naționale de Poduri și Sosele, spunea următoarele, pe care trebuie să le aibă în vedere orice profesor:

„O cunoștință superficială este mult mai vătămătoare de cât o ignoranță; când cineva nu știe, el tace și caută să învețe, când cineva crede că știe, când n'are cunoștință de ignoranța sa, el comite cu siguranță greșelile cele mai **stranii** *și e mult mai greu de a rectifica cunoștința greșită de cât de a dobândi cunoștințe noui".*

Din cei 377 candidați au rămas prin urmare 346 cari au făcut câte ceva din chestiunile date. Dintre aceștia, 281 au avut note între 1 și 9 inclusiv, iar restul de 65 între 10 și 19 inclusiv, nota maximă cu care se cotează la acel concurs fiind 20. Nici una din lucrările făcute nu a fost dar perfectă pentru a atinge această notă; unii au făcut bine două din chestiuni dar au avut lipsuri la a treia, nu numai ca erori de calcul, ci și ca metode de aplicat la rezolvare. Calculele numerice se fac dezordonat, și cu o neglijență condamnabilă. Pentru un matematician pur poate că atențiunea la calculele numerice să nu aibă o prea mare importanță; POISSON spunea că bucătăreasa lui calcula mai bine ca dânsul; însă tecnică

fără calcule numerice nu există. Cei ce vor să devină ingineri nu trebuie să le neglijeze. Sunt candidaţi cari nici nu se uită măcar superficial dacă un rezultat, sau o afirmaţiune, ar putea fi admisibile. Astfel un candidat dela liceul din Satul Mare a scris egalitatea:

$$\frac{13}{21} + \frac{55}{47} = 68,$$

care se vede imediat că este falşă, prima fracţie fiind sub 1, a doua sub 2 şi deci suma sub 3! Un candidat dela liceul Carol I din Craiova dă fracţiile 33/21 şi 55/35 ca ireductibile!

La Concursul din Octomvrie trecut s'au dat 3 chestiuni pentru 4 ore de lucru. Enunţurile s'au dat tipărite fiecărui candidat, aşa că nu a fost nicio pierdere de timp pentru dictarea şi scrierea chestiunilor, nici posibilităţi de a se lua eronat enunţurile. Astfel tot timpul erea dat pentru studiarea chestiunilor şi redijarea lor.

Prima chestiune a fost următoarea: [1])

„Să se găsească o fracţie ireductibilă cu numitorul 21 şi alta iarăşi ireductibilă cu numărătorul 55, ştiind că suma lor este tot una cu diferenţa dintre îndoitul celei d'întâi şi cea de a doua“.

Se cerea dar fracţiile:

$$\frac{m}{21} + \frac{55}{n} = 2\,\frac{m}{21} - \frac{55}{n}$$

din care, prin consideraţiuni aritmetice sau algebrice (candidaţii ereau bacalaureaţi) se scoate imediat $mn = 2 \times 21 \times 55$. Cum m este prim cu 21, factorul 21 trebuie dat lui n; de asemenea 55 lui m iar 2 fiind prim şi cu 21 şi cu 55 se poate da oricăruia din ei. De aci es cele două soluţii ale problemei: $m = 55$, $n = 42$ şi $m = 110$, $n = 21$.

Această chestiune, destul de simplă, nu a fost atacată de 122 de candidaţi (o treime din ei). Soluţiuni foarte bune, cu raţionamente solide şi cu darea ambelor soluţii, au fost date de 14 candidaţi, şi anume 2 dela liceul din Bacău, şi câte 1 dela liceele Sft. Sava, Spiru Haret, Matei Basarab, Domniţa Ileana, Sft. Iosif, Libros şi Seminarul pedagogic din Bucureşti, şi câte 1 dela liceele Craiova (Fraţii Buzeşti), Ploieşti, Galaţi (Alexandri), Sighetul Mar-

1) *Problema* 4211. Vezi pagina 315.

mației și Tighina. Alți 10 candidați au dat ambele soluții, însă pe căi lungi și prin numeroase încercări, iar 62 de candidați, mai bâbește, mai pe nimerite, mai pe ghicite, mai printr'o aruncătură de ochiu la vecini, au ajuns să găsească una din soluțiile problemei. Ca să se vadă că o soluție nu e greu de găsit, iată cam cum au raționat unii. Fracțiile nu se pot aduna dacă numitorii nu sunt egali, ceeace este just. De aci însă conchid $n = 21$, pe care introducându-i în ecuația inițială ese $m = 110$. Mai mult încă, unii dau peste o soluție pe căi eronate. Astfel un candidat dela liceul din Tighina, după ce scrie bine ecuația problemei, spune:

„De oarece, dacă vom aduce la același numitor fracțiile primului termen și pe urmă pe al celui d'al doilea și numitorii vor fi egali, reese că și numărătorii vor fi egali":

$$m + 55 = 2m - 55,$$

de unde scoate $m = 110$, ceeace e o soluție! Procedeul este însă cu totul eronat, cu greșeli care nu sunt permise nici în clasele primare. Alt candidat dela liceul Șincai din București spune:

„Aplic o proprietate cunoscută a proporțiilor și avem":

$$\frac{m + 55 + 21 + n}{21 + n} = \frac{2m - 55 + 21 + n}{21 + n}$$

de unde scoate $m = 110$!

Ecuația problemei au scris-o bine 18 candidați dar nu au putut scoate nimic din ea. Alți 25 au ajuns să găsească $mn = 2310$. Unii, în număr de 11, au găsit că toate necunoscutele trebuiesc notate cu aceeași literă, adică au făcut $m = n$, și au găsit valori raționale pentru numărătorul și numitorul căutat!

Mulți candidați nu știau ce este o *fracție ireductibilă*. Astfel, cu toate că enunțul cerea ca fracțiile să fie ireductibile, găsim printre soluțiile date ca ireductibile, fracțiile 55/35; 55/45; 55/65; 55/165; și chiar 55/55 și 55/1. De asemenea fracțiile 220/42, 42/21, 84/21, 81/1; apoi următoarele: 330/21, 9/21, 63/21, 48/21, 165/21, etc. La unele simplificarea erea mai greu de văzut, dar trebuia cercetată, căci se cereau fracții ireductibile. Astfel 7 candidați au dat ca o soluție fracția 55/462 la care nu erea greu de văzut că termenii se pot divide cu 11.

Un fost elev dela liceul din Bârlad spune:

„Pentru ca această fracție să fie ireductibilă trebuie ca numărătorul să se împartă exact la numitor".

Un candidat dela liceul din Giurgiu spune:

„Condiția ca o fracție să fie ireductibilă este ca numitorul să conție orice factori afară de 2 sau 5".

Pentru un fost elev al liceului Sft. Sava din București, fracția 110/21 este ireductibilă pentru că este egală cu 5,23809523809...

Un fost elev al liceului Matei Basarab din București afirmă că suma a două fracții ireductibile este tot o fracție ireductibilă, când nu e de loc greu de văzut că $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2/2 = 1$!

Un fost elev dela liceul Cantemir din București, spune că fracția ireductibilă care să aibă pe 21 de numitor este 5,3454545/21. De altfel mulți candidați au lucrat, ca și acesta din urmă, cu fracții având termenii fracționari. Astfel găsim arătate ca rezultate ale problemei: 11,78/55; 55/27,5; 55/10,5; 58,8/21; 55/121,5789; 55/(1/3); nu lipsesc nici soluțiuni cu numere negative ca −1138/1248.

Manipularea egalităților lasă mult de dorit. Astfel un candidat dela liceul Ilarian din Târgul Mureșului scrie egalitatea în felul următor:

$$\frac{}{21} + \frac{55}{} = 2\,\frac{}{21} - \frac{55}{}\,.$$

Prin transformări eronate un candidat dela liceul din Bacău scoate $m/n = 55/21$; un candidat dela liceul Ludwig Roth din Mediaș scoate $21mn = 0$; altul dela liceul Carol I din Craiova scoate $21mn^2 = 0$; altul dela liceul din Focșani scoate că cele două părți ale ecuației inițiale sunt egale cu $3m/21n$; alții văzând că ecuația are 2 necunoscute, dau a valoare arbitrară uneia din ele și scot pe cealaltă. Un candidat dela liceul din Buzău scoate $n = 2310/m$, înlocuiește în ecuație și dă peste o identitate, considerând astfel problema ca rezolvată și verificată; altul dela liceul Mihai Viteazul din București scoate $m = 2310/n$ și $n = 2310/m$, pe care îi bagă în ecuație, umple două pagini de calcule și transformări și nu regăsește ecuația primitivă sub alte forme, cum ar trebui!

Unii candidați, mai vizionari, pun dela început forma necunoscutelor sau fracțiilor cerute. Astfel un candidat dela liceul din Târgul-Jiu spune că fracțiile trebuie să fie de forma $a(m+1)/21$ și $55/a(m-1)$; altul dela liceul din Bolgrad, că fracțiile sunt de forma $(3n+1)/21$ și $55/(5n+1)$; altul dela liceul Matei Basarab

din Bucureşti, că ele sunt $m.21/21$ şi $55/m.55$; altul dela liceul Lazăr din Bucureşti pune a priori că fracţia a doua trebuie să se reducă la un întreg; altul dela liceul Russo din Chişinău şi unul dela liceul Aron Pumnul din Cernăuţi pun a priori că cele două fracţii cerute trebuie să fie egale, etc.

Ca probă de încâlcitură de idei şi de raţionamente imaginative reproduc aci toată soluţia dată de un candidat dela liceul Marele Voevod Mihai din Bucureşti:

„Ca să aflăm cei doi termeni necunoscuţi din fracţiile cerute căutăm să facem o proporţie:

$$\frac{55}{x} = \frac{8}{21}.$$

Pe opt l'am luat noi arbitrar. Aflăm pe x *care ştim că este unul din mezi deci este egal cu extremii înmulţiţi între ei şi împărţiţi le mezul ales de noi 8. Şi avem fracţiile ireductibile:*

$$\frac{55}{131} = \frac{8}{21} \quad \textit{facem suma} \quad \frac{(55 \times 21)}{(131 \times 21)} + \frac{(8 \times 131)}{(131 \times 21)} = \frac{2203}{2751}$$

care este şi ea o fracţie ireductibilă. Dacă le înmulţim pe amândouă cu doi, proporţia nu se schimbă

$$\frac{(110 \times 21)}{2751} = \frac{(16 \times 131)}{2751}.$$

Acum aplicăm altă propietate a rapoartelor. Diferenţa numărătorilor pe diferenţa numitorilor = cu fiecare din raportul dat:

$$\frac{2310 - 16}{2751 - 131} = \frac{2296}{2620} = \frac{1148}{1310} = \frac{594}{655}$$

echivalentă cu suma numitorilor pe suma numărătorilor fracţiilor date".

Asta-i toată soluţia!

(Va urma) I. Ionescu.

PROPRIETAȚI ALE TRIUNGHIULUI [1])

(Urmare)

III.

I. **Teoremă.** *Să considerăm un triunghiu* A. B. C. *Fie* Γ *o conică circumscrisă triunghiului, iar* M *și* N *două puncte oarecare în plan. Cevienele lui* M *întâlnesc pe* Γ *în* A′, B′, C′ ; *iar cevienele lui* N *întâlnesc pe* Γ *în* A″, B″, C″. *Dreptele* MA″, NA′, *întâlnesc latura* BC *în* A_1, A_2 *și analog se obține pe celelalte laturi punctele:* B_1, B_2, C_1, C_2. *Aceste 6 puncte se găsesc pe o conică* [2]).

Fie (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) coordonatele baricentrice ale punctelor M, N iar $lyz + mzx + nxy = 0$ ecuația conicei Γ, în sistemul de coordonate considerat.

Dreptele AM, AN întâlnesc pe Γ în punctele:

$$A' \; [-ly_0z_0 \, , \, y_0(mz_0 + ny_0) \, , \, z_0(mz_0 + ny_0)]$$

$$A'' \; [-ly_1z_1 \, , \, y_1(mz_1 + ny_1) \, , \, z_1(mz_1 + ny_1)].$$

Dreapta MA″ întâlnește latura BC în punctul A_1 astfel ca:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = -\frac{z_1(ly_1z_0 + mz_1x_0 + nx_0y_1)}{y_1(ly_0z_1 + mz_1x_0 + nx_0y_1)}$$

iar dreapta NA′ întâlnește latura BC în punctul A_2, astfel ca:

$$\frac{A_2B}{A_2C} = -\frac{z_0(ly_0z_1 + mz_0x_1 + nx_1y_0)}{y_0(ly_1z_0 + mz_0x_1 + nx_1y_0)} \, .$$

Prin permutări circulare deducem:

$$\frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{x_1(ly_0z_1 + mz_1x_0 + nx_1y_0)}{z_1(ly_0z_1 + mz_0x_1 + nx_1y_0)} \, ,$$

$$\frac{B_2C}{B_2A} = -\frac{x_0(ly_1z_0 + mz_0x_1 + nx_0y_1)}{z_0(ly_1z_0 + mz_1x_0 + nx_0y_1)}$$

$$\frac{C_1A}{C_2A} = -\frac{y_1(ly_1z_0 + mz_0x_1 + nx_1y_0)}{x_1(ly_1z_0 + mz_0x_1 + nx_0y_1)} \, ,$$

$$\frac{C_2A}{C_2B} = -\frac{y_0(ly_0z_1 + mz_1x_0 + nx_0y_1)}{z_0(ly_0z_1 + mz_1x_0 + nx_1y_0)}$$

1) A se vedea *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, pag. 206.

2) *Curierul Matematic*, Vol. III, pag. 166. Mathesis 1928, pag. 76.

și relația lui CARNOT:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1$$

fiind îndeplinită, punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, se găsesc pe o conică Γ.

II. Teorema lui MENELAUS ne arată, că pentru ca punctele A_1, B_1, C_1 să fie colineare, e necesar să fie îndeplinită condiția:

$$(ly_1z_0+mz_1x_0+nx_0y_1)(ly_0z_1+mz_1x_0+nx_1y_0)(ly_1z_0+mz_0x_1\times nx_1y_0)$$
$$+(ly_0z_1+mz_1x_0+nx_0y_1)(ly_0z_1+mz_0x_1+nx_1y_0)(ly_1z_0+mz_0x_1+nx_0y_1)=0$$

sau

$$(ly_0z_0+mz_0x_0+nx_0y_0)(ly_1z_1+mz_1x_1+nx_1y_1)$$
$$[l(y_0z_1+y_1z_0)+m(z_0x_1+x_0z_1)+n(x_0y_1+y_0x_1)]=0.$$

Presupunând că punctul M este fix, locul lui N, pentru ca punctele A_1, B_1, C_1 să fie colineare se compune din conica Γ:

$$lyz+mzx+nxy=0$$

și din dreapta Δ:

$$(mz_0+ny_0)x+(nx_0+lz_0)y+(ly_0+mx_0)z=0.$$

Dealtfel este evident că conica Γ face parte din loc, căci pentru un punct oarecare N al ei, punctele A", B", C" se confundă cu N.

Dacă punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare și punctele A_2, B_2, C_2 se vor bucura de aceiași proprietate. Când punctul N se va afla pe Γ, vom obține următoarea cunoscută teoremă a lui AUBERT [1]).

1°. Se consideră două triunghiuri ABC, A'B'C', omologice si înscrise în aceiași conică Γ, pe care se mai ia un punct N. Dreptele ce unesc pe N cu vârfurile lui A'B'C' întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare (Nouvelles Annales. 3e série Tome VIII).

---

1) Alte două generalizări pe care le-am dat acestei teoreme au fost publicate în articolele:

N. BOTEA. Generalizarea teoremei lui AUBERT. „Rev. Mat. din Timișoara". Vol. VI, pag. 35.

N. BOTEA. Asupra unor chestiuni de geometrie. „Foaia Matematică". 1926 pag. 39.

Se pot găsi numeroase cazuri particulare ale proprietăţei de mai sus, deosebit de interesante. Noi vom da puţine exemple.

Dacă M este centrul cercului circumscris O

$$[a^2(b^2+c^2-a^2),\ b^2(c^2+a^2-b^2),\ c^2(a^2+b^2-c^2)]$$

iar Γ este cercul circumscris $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$ dreapta Δ de mai sus devine dreapta dela infinit şi obţinem proprietatea:

2⁰. „Trei paralele duse prin vârfurile triunghiului ABC întâlnesc cercul circumscris în punctele A', B', C'. Dreptele ce unesc centrul cercului circumscris O cu vârfurile lui A'B'C' întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare A_1, B_1, C_1",

şi scriind că şi punctele A_2, B_2, C_2 sunt colineare obţinem:

3⁰. „Trei paralele duse prin diametral-opusele vârfurilor lui ABC în cercul circumscris, întâlnesc în trei puncte colineare laturile triunghiului A'B'C', simetricul lui ABC, faţă de diametrul perpendicular pe direcţia celor trei paralele."

Fie A'_1, B'_1, C'_1 proiecţiile punctelor A', B', C', pe laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC.

Dreptele $A'A_1$, $A'A'_1$ sunt isogonale în unghiul BA'C. Vom avea deci după teorema lui STEINER

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{A'_1B}{A'_1C}=\frac{\overline{A'B}^2}{\overline{A'C}^2},\quad \frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{B'_1C}{B'_1A}=\frac{\overline{B'C}^2}{\overline{B'A}^2},\quad \frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{C'_1A}{C'_1B}=\frac{\overline{C'A}^2}{\overline{C'B}^2}.$$

Aceste relaţii înmulţite parte în parte ne dau:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A'_1B}{A'_1C}\cdot\frac{B'_1C}{B'_1A}\cdot\frac{C_1A}{C'_1A}=\frac{\overline{A'B}^2}{\overline{A'C}^2}\cdot\frac{\overline{B'C}^2}{\overline{B'A}^2}\cdot\frac{\overline{C'A}^2}{\overline{C'B}^2}.$$

Am demonstrat cu alt prilej (R. M. T. VI, 36) că ultima parte a egalităţei de mai sus este egală cu unitatea. Punctele A_1, B_1, C_1 fiind colineare, teorema lui MENELAUS ne arată că şi punctele A'_1, B'_1, C'_1 se bucură de aceiaşi proprietate. Deducem astfel:

4⁰. „Trei paralele duse prin vârfurile unui triunghiu ABC întâlnesc cercul circumscris în trei puncte a căror proecţii pe laturile corespunzătoare ale lui ABC se găsesc pe o dreaptă".

Dacă Γ este cercul circumscris iar M centrul de greutate (1, 1, 1) Δ este polara triliniară a reciprocului complimentarului punctului lui LEMOINE K (a^2, b^2, c^2). Deci

5⁰. Fie ABC, A'B'C' două triunghiuri metaarmonice. Dreapta

ce unește centrul de greutate G al triunghiului ABC cu vârfurile lui A'B'C' întâlnește laturile lui ABC în trei puncte colineare, dacă centrul lor metaarmonic descrie polara triliniară a reciprocului complimentarului punctului lui LEMOINE al triunghiului ABC.

In acest caz și medianele lui ABC întâlnesc laturile lui A'B'C' în trei puncte colineare (consecință a problemei noastre 4164 G. M. XXXVII pag. 478).

Dacă Γ e cercul circumscris iar M este punctul lui LEMOINE K, Δ este dreapta lui LEMOINE, polara triliniară a punctului K. Astfel:

6°. „Fie ABD, A'B'C' două triunghiuri metaarmonice, D centrul lor metaarmonic, K punctul lui LEMOINE al lui ABC, A"B"C" triunghiul format de intersecția simedianelor cu cercul circumscris. Dacă D se află pe dreapta lui LEMOINE a triunghiului ABC avem:

a) Dreptele KA', KB', KC' întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare.

b) Dreptele DA", DB", DC" întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare.

c) Simedianele lui ABC întâlnesc laturile lui A'B'C' în trei puncte colineare.

d) Cevienele lui D față de ABC întâlnesc laturile lui A"B"C" în trei puncte colineare".

Dacă Γ este elipsa lui STEINER circumscrisă, Δ este polara triliniară a reciprocului complimentarului punctului M. In particular vom avea:

7°. „Fie A', B', C' punctele în care cevienele unui punct P față de ABC întâlnesc elipsa lui STEINER circumscrisă acestuia și fie H_r reciprocul ortocentrului lui ABC. Dacă P se află pe dreapta lui LONGCHAMPS a triunghiului ABC vom avea proprietățile:

a) Dreptele H_r A', H_r B', H_r C' întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare.

b) Izotomicele înălțimilor lui ABC întâlnesc laturile lui A'B'C' în trei puncte pe o dreaptă.

Dacă A", B", C" sunt punctele în care elipsa lui STEINER este întâlnită de cevienele lui H_r vom avea și:

c) Dreptele PA", PB", PC" întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte pe o dreaptă.

d) Cevienele AP, BP, CP întâlnesc laturile lui A"B"C" în trei puncte colineare".

Dacă Γ este hiperbola lui KIEPERT :

$$(b^2 - c^2)yz + (c^2 - a^2)zx + (a^2 - b^2)xy = 0$$

iar M punctul lui LEMOINE K, Δ devine dreapta lui EULER OGH. Deci :

8⁰. „Cevienele unui punct N față de triunghiul ABC întâlnesc hiperbola lui KIEPERT în punctele A′, B′, C′, iar simedianele lui ABC întâlnesc aceiași conică în A″, B″, C″. Dacă N se află pe dreapta lui EULER a triunghiului ABC avem proprietățile :

a) Dreptele KA′, KB′, KC′ întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare.

b) Dreptele NA″, NB″, NC″ întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare.

c) Cevienele lui N în ABC întâlnesc laturile lui A″B″C″ în trei puncte colineare.

d) Simedianele lui ABC întâlnesc laturile lui A′B′C′ în trei puncte colineare".

Cazuri remarcabile obținem făcând pe N să coincidă cu punctele O, G, H, O_9.

III. Printr'un raționament analog cu cel făcut în cazul anterior se arată că locul lui N, pentru ca cevienele AA_1, BB_1, CC_1, să fie concurente este cubica :

$$[(mz_0+ny_0)x+lz_0y][(nx_0+lz_0)y+mx_0z][(ly_0+mx_0)z+ny_0x]$$
$$= [mz_0x+(lz_0+nx_0)y][nx_0y+(mx_0+ly_0)z][ly_0z+(ny_0+mz_0)x]$$

circumscrisă triunghiului ABC.

Când Γ este cercul circumscris ($l : m : n = a^2 : b^2 : c^2$) iar M centrul acestui cerc $[x_0 : y_0 : z_0 = a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^3 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)]$ cubica de mai sus devine :

$$\Pi[2b^2x + (a^2 + b^2 - c^2)y] = \Pi[(a^2 + b^2 - c^2)x + 2a^2y]$$

cubica lui DARBOUX a triunghiului.

Obținem proprietatea :

9⁰. „Cevienele unui punct N în triunghiul ABC întâlnesc cercul circumscris O în A′, B′, C′. Dreptele OA′, OB′, OC′ întâlnesc laturile lui ABC în picioarele a trei ceviene concurente, când N descrie cubica lui DARBOUX".

Printr'un raționament analog cu cel făcut la punctul 4_0, deducem de aci proprietatea cunoscută :

10⁰. „Cevienule unui punct al cubicei lui DARBOUX a triunghiului ABC întâlnesc cercul circumscris în trei puncte ale căror

proecțiuni pe laturile lui ABC, formează un triunghiu omologic cu acesta" [1]).

Tot din punctul 9⁰ de mai sus deducem :

11⁰. „N fiind un punct al curbei lui DARBOUX a triunghiului ABC, iar A_1, B_1, C_1 diametral opusele vârfurilor lui ABC în cercul circumscris, dreptele NA_1, NB_1, NC_1 întâlnesc laturile lui ABC în picioarele a trei ceviene concurente.

Din problema 4164 G. M. XXXVII, pag. 478 deducem că și dreptele NA, NB, NC întâlnesc laturile lui $A_1B_1C_1$ în trei puncte colineare. Deci cubicele lui DARBOUX ale celor două triunghiuri sunt identice.

Am dedus astfel pe o simplă cale geometrică următoarea proprietate.

12⁰. „Centrul cercului circumscris triunghiului ABC este un centru de simetrie al cubicei lui DARBOUX a triunghiului".

Când conica Γ este elipsa lui STEINER circumscrisă ($l : m : n = 1 : 1 : 1$) iar M este reciprocul ortocentrului lui $[x_0 : y_0 : z_0 = (b^2 + c^2 - a^2) : (c^2 + a^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2)]$ cubica noastră devine iarăș cubica lui DARBOUX și obținem proprietatea :

13⁰. „Cevienele unui punct N al cubicei lui DARBOUX a triunghiului ABC întâlnesc prima elipsă a lui STEINER în A', B', C'. Dacă H_r este reciprocul ortocentrului lui ABC avem proprietățile :

a) Dreptele $H_r A'$, $H_r B'$, $H_r C'$ întâlnesc laturile lui ABC în picioarele a trei ceviene concurente.

b) Cevienele lui H_r în triunghiul ABC întâlnesc laturile lui A'B'C' în vârfurile unui triunghiu omologic cu A'B'C'."

Tot din observațiile deducem :

14⁰. „Izotomicele înălțimilor triunghiului ABC întâlnesc elipsa lui STEINER în punctele A', B', C'.

a) Cevienele unui punct M al cubicei lui DARBOUX întâlnesc laturile lui A'B'C' în picioarele a trei ceviene concurente.

b) Dreptele MA', MB', MC' întâlnesc laturile lui ABC în picioarele a trei ceviene concurente".

In mod analog se pot obține multe proprietăți noi și se pot regăsi altele cunoscute.

N. BOTEA.

1) TIB. POPOVICIU. „Jurnal Matematic". I, pag. 108

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU“

Subsemnații întrunindu-ne și cercetând, conform regulamentului, Volumul XXXVII al *Gazetei Matematice,* nu am găsit nici un articol referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, al cărui autor să fie elev de liceu, de școală militară, de politechnică, sau student universitar.

In aceste condițiuni premiul nu se poate acorda în anul curent. Conform articolului 3 din regulamentul premiului, urmează ca acesta să se cumuleze până la acordarea lui.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „V. CRISTESCU“:
N. BOTEA, COLONEL LITEANU, C-PTAN GH. NICULESCU.

Acest raport s'a citit și aprobat în ședința dela 26 Aprilie 1933.

ASUPRA PREMIULUI „INGINER H. CAPRIEL“

La chestiunile propuse în numărul trecut pentru premiul Inginer H. CAPRIEL din acest an, avem de adus următoarele observațiuni:

A) Intru cât chestiunea 2-a este reciproca unei proprietăți comunicate de D-l D. BARBILIAN anul trecut la Societatea de Științe și a constituit de altfel punctul de plecare al interesului Comisiunii pentru această chestiune; deoarece, pe de altă parte, cu însuși ocaziunea înscrierii acestei reciproce pentru premiul Inginer H. CAPRIEL, D-l D. BARBILIAN a rezolvat complet această chestiune atât pentru spațiul liniar cu 4 dimensiuni, cât și pentru spații de ordin superior, Comisiunea a hotărît modificarea celei de a 2-a chestiune, astfel că pentru premiul Inginer H. CAPRIEL, chestiunile propuse capătă o nouă înfățișare după cum urmează:

1. *Să se găsească curbele din spațiu care se bucură de proprietatea că planele osculatoare în trei puncte arbitrare ale curbei și cu planul format de cele trei puncte să fie întotdeauna concurente.*

2. *Să se găsească curbele dintr'un spațiu cu patru dimensiuni care se bucură de proprietatea că:* a) *hiperplanele osculatoare în trei puncte oarecare ale curbei și taie planul format de cele trei puncte după trei drepte concurente;* b) *hiperplanele*

osculatoare în patru puncte arbitrare ale curbei şi cu hiperplanul format de aceste patru puncte să fie întotdeauna concurente.

3. *Să se încerce o generalizare la spaţiile cu mai multe dimensiuni.*

B) Articolul D-lui D. BARBILIAN urmează să apară în Buletinul Societăţii Române de Matematici şi-l recomandăm candidaţilor la premiul Inginer H. CAPRIEL.

In acelaş timp dăm şi următoarele completări cu privire la literatura chestiunii :

Prima chestiune este reciproca unei proprietăţi privind curbele autopolare. Se poate cerceta în acest sens lucrarea D-lui E. BOREL: *Sur l'équation adjointe etc.* Annales Ec. N-le Sup. 1892. p. 63. A se vedea deasemeni HALPHEN: Oeuvres t. II. p. 353. *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* şi în special lucrarea D-lui G. ŢIŢEICA: *Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes.* Mémorial des Sciences Mathématiques. Fasc. XLVII unde se găsesc şi referinţe cu privire la întreaga literatură a subiectului propus.

COMISIUNEA PENTRU PREMIU :

ING. C. ORĂŞANU, AL. PANTAZI, O. N. ŢINO.

NOTE MATEMATICE

49. *Resturile diviziunei lui* N^2, N^3 *prin 101.* Cu ocazia rezolvării problemei 3604 în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVI, pag. 31 şi a problemei 4142, Vol. XXXVIII, pag. 354, am calculat resturile diviziunei cuburilor numerelor întregi prin 101. Cred util să dau mai jos, sub formă de tabel, acele rezultate complectate şi cu resturile diviziunei lui N^2 prin 101. Aceste resturi se pot găsi fără a efectua ridicările la patrat şi la cub. Iată cum.

Fie R_1, R_2, R_3 respectiv resturile diviziunei lui N, N^2, N^3 prin 101. De oare ce

$$(N+1)^2 = N^2 + 2N + 1$$
$$(N+1)^3 = N^3 + 3N^2 + 3N + 1$$

rezultă că restul diviziunei lui $(N+1)^2$ prin 101 este tot una cu acela al diviziunei lui

$$R_2 + 2R_1 + 1$$

prin 101, iar restul diviziunei lui $(N+1)^3$ prin 101 este acelaşi cu restul diviziunei lui $R_3 + 3R_2 + 3R_1 + 1$.

Evident, criteriul este acelaşi pentru orice alt divizor decât 101 şi pentru orice putere a lui N.

Rezultatele pe care le-am obţinut sunt următoarele:

Resturile diviziunei prin 101 a numerelor								
N	N^2	N^3	N	N^2	N^3	N	N^2	N^3
1	1	1	35	13	51	68	79	19
2	4	8	36	84	95	69	14	57
3	9	27	37	56	52	70	52	4
4	16	64	38	30	29	71	92	68
5	25	24	39	6	32	72	33	53
6	36	14	40	85	67	73	77	66
7	49	40	41	65	39	74	22	12
8	64	7	42	47	55	75	70	99
9	81	22	43	31	20	76	19	30
10	100	91	44	17	41	77	71	13
11	20	18	45	5	23	78	24	54
12	43	11	46	96	73	79	80	58
13	68	76	47	88	96	80	37	31
14	95	17	48	82	98	81	97	80
15	23	42	49	78	85	82	58	9
16	54	56	50	53	63	83	21	26
17	87	65	51	76	38	84	87	36
18	21	75	52	78	16	85	54	45
19	58	92	53	82	3	86	23	59
20	97	21	54	88	5	87	95	84
21	37	70	55	96	28	88	68	25
22	80	43	56	5	78	89	43	90
23	24	47	57	17	60	90	20	83
24	71	88	58	31	81	91	100	10
25	19	71	59	47	46	92	81	79
26	70	2	60	65	62	93	64	94
27	22	89	61	85	34	94	49	61
28	77	35	62	6	69	95	36	87
29	33	48	63	30	72	96	25	77
30	92	33	64	56	49	97	16	37
31	52	97	65	84	6	98	9	74
32	14	44	66	13	50	99	4	93
33	79	82	67	45	86	100	1	100
34	45	15						

Din acest tabel se deduce imediat care este forma lui N^2 şi N^3 faţă de divizorul 101, atunci când se cunoaşte forma lui N faţă de acest divizor. De exemplu, dacă

$$N = 101m + 83$$

atunci

$$N^2 = 101m' + 21$$

$$N^3 = 101m'' + 26$$

şi reciproc dacă se cunoaşte forma unuia din numerele N^2, N^3 se deduce forma lui N.

Se observă că, începând dela 52, resturile diviziunei lui N^2 se repetă, se poate deci spune că *numai 52 din numerele*

$$X = 101 \cdot m + i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 100)$$

pot fi patrate perfecte, în vreme ce X *poate fi cub pentru orice valoare a lui* i.

Col. Gh. Buicliu.

50. *Asupra problemei 2695.*

Problema rezolvată cu acest număr în G. M. (No. 5 din 1933) are un substrat proiectiv. Voiu da o soluţie în acest sens folosind transformarea ($CD_0 \longleftrightarrow CD_\infty$) pe care am stabilit-o în G. M. vol. XXXV-pg. 289 — 294.

Fie T şi T_1 cele două triunghiuri omologice înscrise în acelaş cerc O şi T', T'_1 triunghiurile formate din tangentele duse la O în vârfurile triunghiurilor T şi T_1. Considerând ca dreaptă D_0 — axa de omologie — (T, T_1) şi aplicând transformarea amintită, problema se reduce la cazul a două triunghiuri egale, cu laturile paralele şi cu centrul de omologie în centrul cercului circumscris lor ; iar triunghiurile T' şi T'_1 sufere o transformare analoagă.

In această ipoteză să considerăm :

L, Δ	centrul şi	axa	de	omologie	pentru	(T, T')
L_1 Δ_1	»	»	»	»	»	(T_1, T'_1)
δ, D	»	»	»	»	»	(T, T'_1)
δ_1 D_1	»	»	»	»	»	(T', T_1)

Configuraţia (T_1, T'_1) se poate obţine atunci din configuraţia (T, T') printr'o rotaţie de 180° în jurul centrului O. Rezultă deci, trecând de la un plan de proecţie la celălalt, că $\Delta \parallel \Delta_1$, iar

L şi L_1 cari sunt şi polurile acestor axe vor fi coliniare cu centrul O ca puncte simetrice obţinute prin rotaţie. Dreptele Δ şi Δ_1 fiind paralele, punctul lor comun e pe D_∞ (dreapta dela infinit), deci axele de omologie: D_0 , Δ şi Δ_1 sunt concurente.

In acelaş mod putem privi configuraţiile (T, T'_1) (T, T'_1) ca obţinute una din alta printr'o rotaţie de 180^0 în jurul lui O. Aceleaşi consideraţii ne conduc la concluzii analoage: $D \parallel D_1$ ambele concurând pe D_0, iar δ, δ_1 simetrice cu O deci coliniare.

Se vede clar — pe acest exemplu — cum tranformarea $(CD_0 \longleftrightarrow CD_\infty)$ — a redus o omologie şi o contracţie (sau dilatare) la o omotetie şi simetrie, prin mijlocirea cărora proprietăţile figurii apar ca evident.

ALEXANDRU NICULESCU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXIX. No. 3. Martie 1933. New-York. Adunarea anuală din Atlantic City şi Princeton, de R. G. D. RICHARSON. Operile matematice ale lui OLIVER DIMON KELLOGG, de G. D. BIRKHOF. BATEMAN despre fizica matematică, de J. L. WALSH. LANE asupra geometriei diferenţiale proiective, de A. EMCH. Extrase din memorii.

Mathesis. Tomul XLVII. No. 3 — 4. Martie — Aprilie 1933. Gembloux. O proprietate a curbelor W, de PAUL LIBOIS. O proprietate a ecuaţiilor cu derivate şi diferenţe amestecate, de L. BRUWIER. Câteva proprietăţi ale conicelor şi ale cuadricelor, de D. V. IONESCO. Asupra suprafeţelor strâmbe, de E. ARGHIRIADI. Principiul lui LAMÉ şi descompunerea locurilor unui fascicol în locuri de ordin mai puţin ridicat, aparţinând unui al doilea fascicol, de AD. M. Asupra funcţiunilor eliptice, de J. LEMANS.

The Mathematical Gazette. Vol. XVII. No. 223. Mai 1933. Londra. Asupra iuţelii relative, de H. E. PIGGOTT. Metode de a învăţa teoremele de geometrie, de A. W. SIDDONS. Aproximaţii la rădăcina patrată, de R. F. MUIRHEAD. Ecuaţii parametrice în geometria analitică elementară, de A. ROBSON. LEWIS-CARROLL, Matematician, de D. B. EPERSON. Noui încercări de a demonstra postulatul paralelelor, de D. R. WARD. Raport propus asupra învăţământului geometriei, de C. O. TUCKEY. Metode de integrare ale ecuaţiei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, de F. UNTERWOOD. Corectitudinea figurilor ; alte noui observaţiuni, de H. BERRY. Asupra teoremei lui STIRLING ca definiţie a funcţiunii gama, de M. F. EGAN.

Journal de Mathematiques Elementaires, publié par H. VUIBERT. Anul 57. No. 15. Mai 1933. Paris.

Idem. No. 16, Mai 1933.

Zentralblatt für Mechanik. Vol. I. Fasc. 1. Berlin 1933.

Secţiunea de Mecanică din *«Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete»* apare de aci înainte ca foaie aparte. In ea se dă repede şi pe cât se poate de complect referate asupra chestiunilor de mecanică care apar în toate revistele sau operele speciale, cu începere din 1933 şi cu ceeace nu s'a publicat din 1932 în foaia centrală de matematici.

Boletin Matematico Elemental. Anul IV. No. 1. Buenos Aires. Mediile aritmetice, geometrice şi armonice, de A. E. GINASTERA. Supliment informativ

Mathematica. Volumul VII. 1933. Cluj. Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes donnés, par HENRI CARTAN. Über die Ableitung zusammengesetzter Funktionen, von A. HOBORSKI. Sur certains développements en séries des polinomes orthogonaux, de TCHEBYCHEFF, par J. SOHAT & H. BUSHEY. Fonctions et correlation, par O. ONICESCU. Sur le théorème de M. BOREL, dans le cas des fonctions méromorphes d'ordre infini, par G. CĂLUGĂREANO. Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces, par A. PANTAZI. Un théorème sur les familles de fonctions, par S. RUSIEWICZ & W. SIERPINSKI. Les grands nombres premiers, par M. KRAÏTCHIK. Sur un théorème de M. POMPEIU, par A. ERRERA. Sur un développement en série des fonctions monogênes uniformes, par AL. GHICA. Sur une extension de la formule de JENSEN, par A. DENJOY. Sur une quadrique double de genre un, par L. GODEAUX. Über eine Bedingung, die dem lokalen zusammenhange aequivalent ist, von KAROL BORSUK. Le problème de DIRICHLET sous sa forme moderne, par MARCEL BRELOT.

Bulletin de Mathematiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest. III-ème Année (1932 — 1933). No. 3 Bucarest 1933. Zwei Beiträge zu einem Satz des Herrn POMPEIU von O. ONICESCO und G. MIHOC. Remarque sur une formule de la moyenne, par E. ABASON. Sur le mouvement d'un solide rigide, par V. VÂLCOVICI. Sur la distribution des vitesses et des accélérations dans un solide en mouvement, par LUCA TEODORIU. Détermination précise de la distance focale avec le fotomètre SILBERMANN, par D. TEODORESCO. Sur un cas d'instabilité dans le phénomène de résonance électrique, par G. PETRESCO. Congrès international d'électricité. Section II. Discution faite au Rapport 1. — C — 1 sur les unités électriques et magnetiques de MR. BRYLLINSKI, par D. GERMANI (Roumanie).

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XIX. No. 1. Martie 1933, Iaşi

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 3. Mai 1933. Timişoara. Expresiunile restului şi câtului împărţirii a două polinoame, de V. ALACI.

Index to the Mathematical Gazette. Volumes I — XV. April 1894 — December 1931. No. 1 — 216.

GASTON JULIA. *Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variable complexe.* Paris 1933. Gauthier-Villars, Editeur. Quai des grands Augustins 55.

PAUL MONTEL. *Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes.* Paris 1933. Gauthier-Villars, Editeur.

C. Teodorescu. *Confronto fra due tipi di barretti per prove di resilienza.* (Extras din *«La mettalurgia italiana»*). Milano 1933.

G. Lambert. *Des nombres qui se reproduisent à la droite de leurs puissances.* (Supliment la *Mathesis*, Aprilie 1933).

M. Ghermănescu. *Sur l'intégrale de Poisson.* Thèse présentée à la Faculté des sciènces de Cluj pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques. (Extras din *Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara).* Timişoara 1933.

R. Woinarowsky. *Sur une manière intrinseque d'envisager la distribution des vitesses dans un solide en mouvement.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique «Roi Carol II», Bucarest).* Bucureşti 1933.

N. Cioranesco. *Sur les équations fonctionelles du cosinus et du sinus circulaires et hyperboliques.* Paris 1932, (Extras din *L'enseignement mathématique*).

N. Cioranesco. *Quelques nouvelles conditions initiales pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique.* Cluj. 1932. (Extras din *Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj).*

N. Cioranesco. *Quelques inégalités rélatives aux fonctions monotones.* Cernăuţi 1932. (Extras din *Buletinul Facultăţii de ştiinţe din Cernăuţi).*

CERERI

Răspuns la Cererea No. 18 din Gazeta Matematică, Anul XXI, p. 341. In anul XXII, D-l I. Beles publică, după D. Iarcu, numele întreg al autorului D. P. al *«Primei trigonometrii române»* tipărite, şi anume D. Pavel. Iarcu era contimporan cu acesta, căci el însuşi publicase în 1844 o *Comptabilitate.* In inventarul lui D. Iarcu găsim, în adevăr, dată Aritmetica pentru clasele primare de D. Pavel din 1857 şi *Trigonometria dreptliniară şi sferică* de D. Pavel în 1851. In 1852, acelaşi D. Pavel publică o algebră.

După alte informaţii *(Gazeta Matematică,* Anul XXXVI, pag. 21), numele autorului ar trebui scris D. Paulid sau D. Pavlid *(Buletinul Societăţii Politecnice,* Anul XLIV, pag. 1125). In adevăr, aritmetica din 1855, însemnată de D-l I. Ionescu, ca scrisă de D. Pavlid în *Buletinul Societăţii Politecnice* nu e în inventarul lui D. Iarcu ; în schimb este dat ca autor la această dată D. Pavel.

Această variaţie de nume era destul de frecventă la noi în prima jumătate a veacului trecut. Alt exemplu : matematicianul aromân D. Gobdelas, semna şi D. Gaudela, şi D. Panaiotache G. şi Govdela.

P. Sergescu.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, secţia matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 8 Mai. D-l Al. Pantazi a făcut un referat asupra lucrărilor de geometrie şi D-l I. Ionescu o comunicare asupra învăţământului aritmeticii în liceele noastre.

In seara zilei de 22 Mai, D-l C. Mateescu a făcut un referat asupra lucrărilor de mecanică, D-l N. Vasilescu-Karpen a făcut o comunicare despre câmpul unui circuit infinit mic, iar D-l N. Teodorescu o comunicare asupra funcţiunilor majorante.

D-l M. Ghermănescu, colaborator asiduu la această revistă şi membru al Societăţii *«Gazeta Matematică»*, a obţinut titlul de Doctor în matematici la Universitatea din Cluj.

In ziua de 14 Mai 1933, a avut loc sărbătorirea profesorului Vasile Teodoreanu din Iaşi, de către foştii săi elevi, cu ocazia retragerii la pensie.

D-l V. Teodoreanu este membru al Soc. *Gazeta Matematică* din anul 1900 şi a fost în „delegaţia de conducere" a Societăţei dela 1917 până la 1920.

Soc. *Gazeta Matematică* a fost reprezentată la sărbătorire prin D-nii profesor M. Manoilescu şi Maior I. Lintes, cari au înmânat sărbătoritului o scrisoare omagială din partea *Gazetei Matematice*.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2392. 1°. *Să se arate că următoarele trei drepte*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} & b\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} & \cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \\ a\cos\alpha_3 & b\sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2} & b\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2} & \cos\dfrac{\alpha_2-\alpha_3}{2} \\ a\cos\alpha_1 & b\sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2} & b\sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2} & \cos\dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{2} \\ a\cos\alpha_2 & b\sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

se întâlnesc în acelaşi punct.

2°. *Să se calculeze coordonatele acestui punct.*

I. Banciu.

Soluție dată de D-l Ad. C. Gheorghiu (student, București).

1°. Consider elipsa în reprezentare parametrică

$$x = a\cos\alpha \quad ; \quad y = b\sin\alpha$$

și fie M_1, M_2, M_3 trei puncte determinate pe elipsă de valorile α_1, α_2, α_3 ale parametrului α. Tangentele în M_1, M_2, M_3 la elipsă se întâlnesc în P_1, P_2, P_3, P_1 fiind întâlnirea tangentelor în M_2, M_3. Se știe și se poate demonstra ușor că dreptele P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 sunt concurente. Voi demonstra că ecuațiile din enunțul problemei sunt tocmai ecuațiile dreptelor M_3P_3, M_1P_1, M_2P_2.

Ecuația tangentei în M_1 ($a\cos\alpha_1$, $b\sin\alpha_1$) la elipsă este

$$(1) \qquad bX\cos\alpha_1 + aY\sin\alpha_1 - ab = 0$$

dedusă din ecuația generală

$$(Y - y)\,x' - y'\,(X - x) = 0$$

în care se înlocuiesc x și y prin $a\cos\alpha_1$ și $b\sin\alpha_1$. De asemeni tangenta în M_2 este

$$(2) \qquad bX\cos\alpha_2 + aY\sin\alpha_2 - ab = 0.$$

Rezolvind sistemul (1), (2) se găsesc coordonatele X_{P_3}, Y_{P_3} ale lui P_3 și anume

$$X_{P_3} = \frac{\begin{vmatrix} ab & a\sin\alpha_1 \\ ab & a\sin\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\cos\alpha_1 & a\sin\alpha_1 \\ b\cos\alpha_2 & a\sin\alpha_2 \end{vmatrix}} = \frac{a(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}{\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2} = a\,\frac{\cos\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}$$

$$Y_{P_3} = \frac{\begin{vmatrix} b\cos\alpha_1 & ab \\ b\cos\alpha_2 & ab \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\cos\alpha_1 & a\sin\alpha_1 \\ b\cos\alpha_2 & a\sin\alpha_2 \end{vmatrix}} = \frac{b(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2} = b\,\frac{\sin\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}$$

Cu acestea se găsește că ecuația dreptei M_3P_3 este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\dfrac{\cos\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} & b\dfrac{\sin\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} & 1 \\ a\cos\alpha_3 & b\sin\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\neq 0$, înmulțind această ecuație cu $\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ se găsește prima ecuație din enunț. La fel se arată că ecuațiile dreptelor M_1P_1, M_2P_2 sunt respectiv, ceilalți determinanți din enunț, așa că prima parte a problemei e rezolvată.

Condițiile

$$(3)\quad \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\neq 0\ ;\ \cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\neq 0\ ;\ \cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\neq 0$$

nu sunt necesare neapărat. Dacă, de exemplu

$$\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=0$$

punctele M_1, M_2 sunt diametral opuse, P_3 este aruncat la infinit pe direcția conjugată lui M_1M_2 pe care se găsește și punctul $I(M_1P_1,\ M_2P_2)$. Dacă

$$\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=0 \quad \text{și} \quad \cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}=0$$

atât M_1, M_2 cât și M_3, M_3 sunt diametral opuse, deci M_3 și M_1 se confundă, punctul P_2 se confundă cu M_1 iar P_1 se confundă cu P_3 la infinit pe direcția conjugată diametrului M_1M_2 așa că I se confundă și el cu M_1.

După cum rezultă de aci, nu putem avea simultan

$$\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}=\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}=0.$$

2°. Să calculăm coordonatele punctului I în cazul general, când condițiunile (3) sunt îndeplinite, adică să rezolvăm două oarecare din ecuațiile enunțului.

Din primele 2 ecuațiuni se scoate

$$b\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)x-a\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)y$$
$$+ab\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\alpha_3-\cos\alpha_3\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)=0$$

$$b\left(\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)x-a\left(\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\cos\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)y$$
$$+ab\left(\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\alpha_1-\cos\alpha_1\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)=0$$

sau, observând că

$$\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\alpha_3-\cos\alpha_3\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=-\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\alpha_3\right)=$$

$$-\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}+\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)$$

ecuațiile celor 2 drepte se mai pot scrie

$$b\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)x-a\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)y=$$

$$ab\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}+\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)$$

$$b\left(\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)x-a\left(\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\cos\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)y=$$

$$ab\sin\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right).$$

Dacă Δ, Δ_x, Δ_y sunt determinanții acestui sistem iar X_I, Y_I coordonatele lui I, atunci

$$X_I=\frac{\Delta_x}{\Delta}\quad;\quad Y_I=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Rămâne să se calculeze Δ, Δ_x, Δ_y.

Pentru calculul lui Δ avem succesiv

$$\frac{\Delta}{ab}=\sin\left(\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)$$

$$-\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\cos\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

$$+\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\cos\alpha_3\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$$

$$+\cos\alpha_1\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}+\sin\alpha_1\cos\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$$

$$-\cos\alpha_1\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$$

$$\frac{\Delta}{ab} = \sin\left(\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) + \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\left[\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} - \cos\alpha_3\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right]$$

$$- \cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\left[\sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \cos\alpha_1\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]$$

$$- \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin(\alpha_1 - \alpha_3)$$

$$\frac{\Delta}{ab} = \sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} + \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2} - \cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$$

$$+ \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin(\alpha_1 - \alpha_3)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} + 2\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}$$

căci

$$\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2} = \sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}$$

așa că în definitiv

$$(4) \qquad \Delta = 2ab\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[1 - \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right].$$

Pentru calculul lui Δ_x, avem de asemeni succesiv

$$\frac{\Delta_x}{a^2b} = -\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} - \cos\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)$$

$$+ \sin\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \cos\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)$$

$$= -\left(\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2} + \cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)A_1 +$$

$$+ \left(\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} + \cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)A_3$$

în care A_1, A_3 sunt prescurtări ușor de identificat, așa că

$$\frac{\Delta_x}{a^2b} = \sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}A_1 + \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}A_3\right]$$

$$- \cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}A_1 + \sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}A_3\right].$$

Ţinând seamă de dezvoltările trigonometrice ale sumelor şi diferenţelor de arce, ultima paranteză se poate scrie

$$\tfrac{1}{2}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) - \tfrac{1}{2}\cos\alpha_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3)$$

$$+\tfrac{1}{2}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) - \tfrac{1}{2}\cos\alpha_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$= -\tfrac{1}{2}[\sin\alpha_3 - \sin\alpha_1 + \cos\alpha_2(\sin\alpha_1\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1\sin\alpha_3)]$$

$$= -\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left(\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2} - \cos\alpha_2\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}A_2.$$

Deci

$$\frac{\Delta_x}{a^2b} = \sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}A_1 + \cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}A_2 + \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}A_3\right].$$

Ultima paranteză se mai poate scrie succesiv

$$\tfrac{1}{2}(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3) - \cos\alpha_1\cos^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(\cos\alpha_3 + \cos\alpha_1) - \cos\alpha_2\cos^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) - \cos\alpha_3\cos^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}$$

$$= \cos\alpha_1\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2} + \cos\alpha_2\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} + \cos\alpha_3\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$$

aşa că în definitiv

$$(5)\quad \Delta_x = a^2b\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\cos\alpha_1\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos\alpha_2\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} + \cos\alpha_3\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right].$$

Din (4) şi (5) se scoate

$$X_I = \frac{a}{2}\,\frac{\cos\alpha_1\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2} + \cos\alpha_2\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} + \cos\alpha_3\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}{1 - \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}}.$$

Pentru calculul lui Δ_y, avem

$$\frac{\Delta_y}{ab^2} = \sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2} - \sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)$$

$$-\sin\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)$$

$$=\left(\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)B_1$$

$$-\left(\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}+\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)B_3$$

$$=-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}B_1+\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}B_3\right]$$

$$+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}B_1+\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}B_3\right]$$

unde B_1, B_3 sunt prescurtări uşor de identificat. Ultima paranteză se poate scrie succesiv

$$\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\sin\alpha_1\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$$

$$+\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\alpha_3\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos\alpha_2-\cos\alpha_3-\sin\alpha_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\cos\alpha_1-\cos\alpha_2-\sin\alpha_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)]$$

$$=-\tfrac{1}{2}[\cos\alpha_3-\cos\alpha_1+\sin\alpha_2(\sin\alpha_1\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\sin\alpha_3)]$$

$$=-\left[\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}+\sin\alpha_2\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\right]=-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}B_2$$

deci

$$\frac{\Delta_y}{ab^2}=-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}B_1+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}B_2+\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}B_3\right].$$

Transformând puţin ultima paranteză, ea devine

$$\tfrac{1}{2}(\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)-\sin\alpha_1\cos^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}+\tfrac{1}{2}(\sin\alpha_3+\sin\alpha_1)-\sin\alpha_2\cos^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(\sin\alpha_1+\sin\alpha\alpha_2)-\sin_3\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=$$

$$\sin\alpha_1\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}+\sin\alpha_2\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\sin\alpha_3\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$$

în cât

$$\Delta_y=ab^2\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\left[\sin\alpha_1\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}+\sin\alpha_2\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\sin\alpha_3\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

aşa că în definitiv

$$Y_I = -\frac{b}{2}\cdot\frac{\sin\alpha_1\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}+\sin\alpha_2\sin^2\frac{\alpha_5-\alpha_1}{2}+\sin\alpha_3\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}{1-\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}}.$$

Condiţia ca punctul I să fie la distanţă finită este

$$1-\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\neq 0.$$

Notă. Prima parte a problemei se poate rezolva şi direct aşa cum rezultă din rezolvarea părţei a doua, sau pe altă cale mai directă. Soluţia D-lui Ad. C. Gheorghiu are avantajul că pune în evidenţă interpretarea geometrică a ecuaţiilor din enunţ.

Am publicat soluţia D-lui Ad. C. Gheorghiu aproape în intregime pentru a se vedea un exemplu de conducerea meticuloasă a unor calcule trigonometrice lungi dar nu grele. Numai aceste calcule au făcut ca problema să nu fie atacată cu succes atâta timp, dela propunerea ei şi până azi.

Gh. B.

PROBLEMA 3244. *Să se găsească locul ortopolului unei drepte fixe* Δ *în raport cu un triunghiu* ABC, *când latura* BC *e fixă, iar vârful* A *descrie o dreaptă* Δ'.

N. Botea.

1°. *Soluţia geometrică.* Fie A', B', C' proiecţiile pe Δ ale vârfurilor A, B, C ale triunghiului. Perpendicularele din A', B', C', respectiv pe BC, CA, AB se taie în M: acesta este ortopolul dreptei Δ faţă de triunghiul ABC.

BC fiind fixă, B', C' sunt fixe pe Δ iar punctul la infinit a al lui MA' este şi el fix: în direcţie perpendiculară la BC.

Vârful A descriind o dreaptă fixă Δ', vreau să arăt că între razele B'M şi C'M, B'M şi aM, C'M şi aM există corespondenţă omografică şi că deci locul lui M este o conică trecând prin B', C', a.

In adevăr, ducând prin B' o rază B'M, se determină în mod unic latura CA perpendiculară ei, deci în mod unic punctul A pe Δ': se determină astfel latura BA şi deci raza C'M perpendiculară la BA dusă din C'. La fel la o rază C'M se construeşte în mod unic o rază B'M. Construcţiile fiind algebrice (nu se utilizează decât curbe algebrice) există între B'M şi C'M o corespondenţă

omografică şi deci locul lui M este o conică trecând prin B' şi C'. Când A pe Δ' ajunge la intersecţia acesteia cu BC triunghiul ABC se aplatizează şi razele B'M, C'M devin respectiv B'a, C'a şi regăsim punctul a al locului la infinit. Când punctul A e la infinit pe Δ' razele B'M, C'M devin perpendiculare la Δ', deci punctul b la infinit în direcţie perpendiculară la Δ' este un punct al locului.

Locul căutat e o hiperbolă ale cărui direcţii asimptotice sunt perpendiculare la BC şi Δ'.

Să arătăm că între razele B'M, aM există o corespondenţă omografică. (Analog între C'M, aM). Lucru evident pentrucă B', a sunt fixe şi M variabil pe conica găsită. Dar să urmărim construcţia:

Ducând raza B'M se construeşte latura CA deci vârful A pe Δ', din A obţinem în mod unic pe A' pe Δ. (A' fiind proecţia lui A pe Δ, între A şi A' avem o afinitate). Iar A' pe Δ determină în mod unic raza aA' sau aM. Invers dându-se o rază aM aceasta taie dreapta Δ în A', perpendiculara în A' pe Δ taie Δ' în A, am determinat astfel latura CA şi deci raza B'M.

Acum putem găsi tangenta locului în a adică asimptota perpendiculară la BC. Consider Ba o rază B'M, în acest caz CA se confundă cu BC şi A devine deci intersecţia S lui BC cu Δ' iar A' devine proecţia S' a acestei intersecţii S pe Δ, încât la raza B'a considerată în fascicolul B'M corespunde aS' din fascicolul aM. Aşa dar perpendiculara din S' pe BC este o asimptotă a hiperbolei.

Pentru a determina asimptota a doua — tangenta în b — ar trebui, pentru uniformitate, să găsim corespondenţa omografică între razele B'M, bM care evident că există. Dar mai repede, aplicând teorema lui PASCAL relativă la un exagon înscris într'o conică.

Căci avem pentagonul bBC'aa şi cu teorema lui PASCAL putem construi un al şaselea punct al conicei determinate de cele cinci — sau tangenta într'unul din cele cinci puncte.

Să construim tangenta în b. Numerotăm bB' = 1, B'C' = 2, C'a = 3, $aa \equiv a$S' = 4, $ab \equiv D_\infty$ = 5, bb = 6 căutată. Avem intersecţiile (1, 4) ≡ P, (2, 5) ≡ Q, (3, 6) ≡ R. Teorema lui PASCAL spune că P, Q, R sunt colineare. Dar 6 nu e cunoscută atunci R ≡ (PQ, 3) şi deci Rb = 6.

Adică a doua asimptotă a locului este Rb. Iar centrul conicei este O ≡ (aS', bR).

ADRIAN C. GHEORGHIU
Student Matematici.

2°. *Soluția analitică.* Se știe că atunci când deplasăm un triunghiu perpendicular pe direcția unei drepte fixe, ortopolul acestei drepte față de triunghiu descrie o dreaptă perpendiculară pe dreapta fixă. In acest caz să luăm două axe Ox, Oy rectangulare, iar vârful B pe Oy. Deplasăm triunghiul ABC perpendicular pe Ox, până și C e pe Ox. Locul căutat se deplasează și el perpendicular pe Ox. Dacă (x_1, y_1) , (O, y_2) , (x_2, O) sunt coordonatele punctelor A, B, C ortopolul dreptei Ox față de ABC e la intersecția dreptelor :

$$(1) \qquad y y_1 = x (x_2 - x_1)$$

$$(2) \qquad y (y_2 - y_1) = x_1 (x - x_2).$$

Și dacă A descrie dreapta $y = mx + n$, mai avem condiția :

$$(3) \qquad y_1 = mx_1 + n.$$

Dacă între ecuațiile (1), (2), (3) eliminăm pe x_1 și y_1, avem ecuația locului :

$$x^2 x_2 - y^2 m y_2 + xy (mx_2 - y_2) - x x_2^2 + y n x_2 = 0$$

o iperbolă ce trece prin origină și punctul C.

Ion C. Vasiliu
Cl. 7-a. M-rea Dealu. (1925).

Observațiuni. 1°. Pe ecuația iperbolei găsită de D-l Vasiliu :

$$f(x, y) = x_2 x^2 - m y_2 y + (m x_2 - y_2) xy - x_2^2 x + n x_2 y = 0$$

se pot ceti proprietățile demonstrate de D-l Gheorghiu.

Centrul iperbolei are coordonatele date de ecuațiile :

$$f'_x (x, y) = 2x_2 x + (m x_2 - y_2) y - x_2^2 = 0$$

$$f'_y (x, y) = (m x_2 - y_2) x - 2m y_2 y + n x_2 = 0.$$

Rezolvind aceste ecuațiuni, găsim coordonatele centrului :

$$x_\omega = \frac{x_2 (2m x_2 y_2 - m n x_2 + n y_2)}{(m x_2 + y_2)^2} \quad ; \quad y_\omega = \frac{x_2^2 (m x_2 - y_2 + 2n}{(m x_2 + y_2)^2} .$$

Direcțiile asimptotelor sunt date de ecuația :

$$x_2 + \lambda (m x_2 - y_2) - \lambda^2 m y_2 = 0.$$

Se găsește :

$$\lambda_1 = \frac{x_2}{y_2} \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{1}{m} .$$

Se verifică astfel că una din asimptote este perpendiculară pe BC iar cealaltă este perpendiculară pe Δ'.

Această din urmă asimptotă întâlneşte dreapta Δ în punctul S', proiecţie pe Δ a intersecţiei S a dreptelor Δ' şi BC. In adevăr dreapta Δ' de ecuaţie $y = m\,x + n$ întâlneşte latura BC în punctul S de absciză:

$$x = \frac{x_2\,(y_2 - n)}{mx_2 + y_2}\,.$$

Proiecţia lui S pe Δ (axa Ox) este punctul:

$$S'\left(\frac{x_2\,(y_2 - n)}{mx_2 + y_2}\,,\ O\right)$$

punct ce verifică ecuaţia asimptotei:

$$y - y_\omega = \frac{x_2}{y_2}\,(x - x_\omega)\,.$$

2°. Câteva consideraţiuni asupra locurilor ortopolului şi izopolului de unghiu φ, a unei drepte Δ în raport cu un triunghiu ABC, în care latura BC e fixă iar A se mişcă pe o conică, au fost făcute în articolele noastre *Asupra izopolului* din *Curierul Matematic* I. 1925. p. 6 şi 23

N. B.

PROBLEMA 3842. *Să se găsească numerele prime de patru cifre, ştiind că suma bipatratelor cifrelor este 9588.*

I. Murăroiu.

Fie x, y, z, t cifrele numărului căutat scrise în ordinea lor crescătoare

$$x \leqq y \leqq z \leqq t.$$

Va trebui să avem conform enunţului

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 9588. \qquad (1)$$

Pentru determinarea soluţiei problemei va trebui, mai întâiu, să rezolvim ecuaţia precedentă în numere întregi, şi anume să căutăm acele soluţii care sunt pozitive şi mai mici ca 10. Observăm, mai întâiu, atunci, că fiecare din cei patru termeni ai primului

membru din ecuaţia precedentă nu ar putea lua decât una din valorile înscrise în prima linie a tabloului următor:

$0^4=0$	$1^4=1$	$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=256$	$5^4=625$	$6^4=1296$	$7^4=2.401$	$8^4=4096$	$9^4=6561$
0	2	32	162	512	1.250	2592	4802	8192	13122
0	3	48	243	768	1875	3888	7203	12288	19683
0	4	64	324	1.024	2.500	5.184	9604	16384	26244

Liniile a 2-a, a 3-a şi a 4-a din tabloul precedent indică dublul, triplul şi cuadruplul numerelor corespunzătoare din linia 1-a; ele nu vor servi în analiza ce urmărim pentru determinarea soluţiei. Din considerarea liniei a 4-a rezultă că numerele x, y, z, t nu pot fi toate mai mici ca 7 căci atunci am avea

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \leqq 4 \times 6^4 = 5.184.$$

Va trebui conform inegalităţilor dela început să avem:

$$t \geqq 7.$$

Vom avea atunci de analizat următoarele cazuri:

$1^0.\ t=7\ ;\ t^4=2401\ ;\ x^4+y^4+z^4=7187 \quad x\leqq y\leqq z\leqq 7$

$2^0.\ t=8\ ;\ t^4=4096\ ;\ x^4+y^4+z^4=5492 \quad x\leqq y\leqq z\leqq 8$

$3^0.\ t=9\ ;\ t^4=6561\ ;\ x^4+y^4+z^4=3027 \quad x\leqq y\leqq z\leqq 9.$

Să luăm mai întâiu primul caz. Printr'o analiză analoagă celei precedente, şi din considerarea liniei a 3-a din tabelul de mai sus, rezultă că avem:

$$z \geqq 7$$

deci

$z=7$, $x^4+y^4=4786$, atunci analog $y=7$, $x^4=2385$,

ceeace este imposibil numărul 2385 nefiind înscris în linia 1-a din tablou. In primul caz nu avem, aşa dar, nicio soluţie.

Să trecem la al 2-lea caz. Prin acelaşi fel de analiză, şi din considerarea liniei a 3-a a tabloului de mai sus, rezultă imediat că avem în mod necesar:

$$z \geqq 7$$

deci

$$z=7 \quad \text{sau} \quad z=8.$$

Putem avea deci cazurile

$$(2.1)\quad z = 7\ ,\ x^4 + y^4 = 3.091 \qquad x \leqq y \leqq 7$$
$$(2.2)\quad z = 8\ ,\ x^2 + y^4 = 1.396 \qquad x \leqq y \leqq 8.$$

Procedând după aceeaşi metodă avem în cazul (2.1) $y \geqq 7$, deci

$$y = 7\ ,\ \text{deci}\ x^4 = 1690\ ,\ \text{iar în cazul (2.2)}$$

deci

$$6 \leqq y \leqq 6$$
$$y = 6\ \text{deci}\ x^4 = 100.$$

Nici una din aceste cazuri nu sunt posibile.

Rămâne deci numai cazul 3°) care ar putea da soluţii. Dar atunci avem, cum am arătat

$$t^4 = 6561\ ;\ x^4 + y^4 + z^4 \leqq 3027.$$

Din linia 3-a a tabloului se vede imediat că

$$5 \leqq z \leqq 7.$$

Avem deci de considerat cazurile

$$(3.1)\quad z = 5\ ;\ x^4 + y^4 = 2402 \qquad x \leqq y \leqq 5$$
$$(3.2)\quad z = 6\ ,\ x^4 + y^4 = 1731 \qquad x \leqq y \leqq 6$$
$$(3.3)\quad z = 7\ ;\ x^4 + y^4 = 626\ . \qquad x \leqq y \leqq 7.$$

In cazul (3.1) linia 2-a a tabloului arată că nu putem avea soluţie în cazul $x \leqq y \leqq 5$. In cazul (3.2) analiza întrebuinţată până în prezent ne arată că

$$y \geqq 6\ ,\ \text{deci}\ y = 6\ .\quad x^4 = 435,$$

ceeace după linia 1-a nu e posibil. In sfârşit în cazul (3:3) avem succesiv $y \leqq 5$ (după linia 1-a) dar şi $y \geqq 5$ (din considerarea liniei a 2-a) prin urmare $y = 5$, $x^4 = 1$ deci $x = 1$. Rezultă că ecuaţia propusă, admite, în condiţiile voite, numai soluţia

$$x = 1\ ,\ y = 5\ ,\ z = 7\ ,\ t = 9.$$

Se obţine atunci soluţia problemei căutând numerele prime formate cu aceste 4 cifre. Scriind toate numerele posibile formate cu aceste cifre, dar excluzând dela început acele terminate cu 5 care nu pot fi prime, vom forma 18 numere, care cercetate după metoda cunoscută ne arată că, din acestea, numai 10 sunt prime şi anume:

1579, 1597, 1759, 5179, 5197, 5791, 7159, 7591, 7951, 9157

care sunt soluţiile problemei propuse.

Au rezolvat problema pe o cale analoagă fără a găsi toate soluţiile bune D-nii: IOAN G. POPA (fără soluţia 7951) şi RAICU ALEXANDRU (fără soluţia 1597). D-nii: G. A. APOSTOLESCU, CONSTANTINESCU N. MIRCEA, NICOLAU H. D., au găsit că cifrele 1, 5, 7, 9 compun numărul căutat, concluziile, însă, la care ajung sunt cu totul eronate.

A. P.

PROBLEMA 3894. *Să se demonstreze că expresia*

$$E = 2^{4n} - 17 \cdot 2^{2(n-1)} n^2 + 2^{2n+1} (n^2 - 1) + 1$$

este divizibilă cu 81. (Enunţ rectificat).

I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ.

Soluţie dată de Domnul I. PAREPEANU (Lic. Braşov). In «Lecţiuni de Algebră superioară, Teoria ecuaţiilor» de N. ABRAMESCU, ediţa III, pag. 52, se demonstrează că expresiunea

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2 - 1) x^n - n^2 x^{n-1} + 1$$

este divizibilă cu $(x - 1)^4$.

Expresiunea se mai poate scrie:

$$E = x^{2n} - (x^2 + 1) n^2 x^{n-1} + 2(n^2 - 1) x^n + 1 = M(x-1)^4.$$

Dacă facem

$$x = 4 = 2^2$$

obţinem:

$$E = 2^{4n} - 17.2^{2(n-1)} n^2 + 2^{2n+1}(n^2-1) + 1 = M(4-1)^4 = M3^4 = M81$$

c. c. t. d.

Observaţii: 1. Domnul I. PAREPEANU este acela care a arătat că enunţul trebue rectificat.

2. Domnul E. MEREUŢĂ demonstrează că, expresiunea iniţial propusă, adică cu coeficientul termenului al doilea egal cu 5 în loc de 17, se divide cu $81 = 3^4$, dacă se divide cu 3, ceeace se poate verifica uşor că nu e adevărat.

3. Aşteptăm o soluţie directă a acestei chestiuni.

I. S. A.

*PROBLEMA 4128. a, b, c *şi* x, y, z *fiind două grupe de numere întregi ce satisfac relaţiile :*

$$a^2 + b^2 = c^2 \ ; \ x^2 + y^2 = z^2 \ \textit{(numere pitagorice)}$$

se cere să se examineze în ce caz putem avea între ele una din relaţiile :

$$(1)\ ax + by = cz \ ; \ (2)\ ay + bx = cz \ ; \ (3)\ az + bx = cy.$$

N. C.

Soluţie : 1°. Din prima relaţie scoatem :

$$z = \frac{ax + by}{c}$$

pe care o introducem în :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Avem :

$$c^2 (x^2 + y^2) = (ax + by)^2$$

sau :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy \ ;$$

deci :

$$(bx - ay)^2 = 0$$

adică :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{a^2}{ax} = \frac{b^2}{by} = \frac{a^2 + b^2}{ax + by} = \frac{c^2}{cz} = \frac{c}{z} \ .$$

Deci relaţia (1) are loc când cele două grupe de numere sunt respectiv proporţionale :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \ . \qquad (1)$$

2°. In cazul relaţiei (2) deducem ca mai sus :

$$c^2 (x^2 + y^2) = (ay + bx)^2$$

sau :

$$(ax - by)^2 = 0$$

deci :

$$\frac{a}{y} = \frac{b}{x}$$

şi prin aceleaş operaţii deducem:

$$\frac{a}{y} = \frac{b}{x} = \frac{c}{z} \cdot \qquad \text{(II)}$$

3⁰. In cazul relaţiei (3) scoatem:

$$z = \frac{cy - bx}{a}$$

şi deci:

$$a^2 (x^2 + y^2) = (cy - bx)^2 = c^2y^2 + b^2x^2 - 2bcxy$$

sau:

$$(c^2 - a^2)y^2 + (b^2 - a^2) x^2 - 2bcxy = 0$$

de unde deducem:

$$b^2y^2 + c^2x^2 - 2bcxy = (a^2 + c^2 - b^2) x^2 = 2a^2x^2$$

adică:

$$by - cx = ax\sqrt{2}$$

relaţie imposibilă căci a, b, c, x, y, z sunt numere întregi. Relaţia (3) nu-i deci posibilă.

Soluţii bune în cazul 1⁰ şi *2⁰* de D-nii: Iancu N. Sager, Har. Ionescu-Biss, I. Curchi şi Şt. E. Olteanu care reduce relaţiile (1) şi (2) la relaţiile între unghiurile triunghiurilor dreptunghice şi arată că ele sunt asemenea. D-l M. Margulius pleacă dela reprezentarea generală a numerilor lui Pitagora, dar nu trage concluzii corespunzătoare.

In fine o «soluţie» dela D-nii: Mircea D. Stoicescu şi C. N. Oprescu (semnând pe aceiaş foaie) care e foarte bună pentru pagina de recreaţii a Gazetei.

N. C.

---

*PROBLEMA 4176. *Fie* ABCD *un patrulater înscris în cercul* O. *Dacă* O_1 *şi* O_2 *sunt respectiv centrele cercurilor* ACO *şi* BDO, *dreapta* O_1O_2 *este paralelă cu a treia diagonală a patrulaterului* ABCD.

S. M. Feldstein.

Soluţie dată de d-nii: CEZAR COŞNIŢĂ (Bârlad) şi N. N. MIHĂILEANU (st. Bucureşti)

In patrulaterul dat două diagonale sunt AC şi BD. A treia diagonală este EF unde E este punctul de întâlnire al laturilor AB şi CD iar F al laturilor AD şi BC. Fie acum M punctul de întâlnire al tangentelor duse în A şi C la cerc iar N al tangentelor duse în B şi D. Se ştie după o teoremă cunoscută (a se vedea şi F. G. M. 386 — I, 1275) că punctele E, F, M şi N sunt patru puncte coliniare.

Observăm că patrulaterele OAMC şi OBND sunt inscriptibile, de unde rezultă că O_1 şi O_2 sunt respectiv mijloacele diagonalelor OM şi ON. Deducem de aici că O_1O_2 este paralelă cu EF şi mai mult, distanţa O_1O_2 este jumătate distanţa MN. Problema este deci demonstrată.

Observări făcute de D-l N. N. MIHĂILEANU:

1°. EF taie din nou cercurile O_1, O_2 în al doilea punct de intersecţie al acestor cercuri.

2°. Enunţul problemei se poate completa: *Dreapta centrelor cercurilor* AOB, COD *este paralelă cu diagonala* (AO, BD), (AD, BC) şi dreapta centrelor cercurilor AOD, BOC este paralelă cu diagonala (AC, BD), (AB, DC). Soluţie analoagă.

3°. Observând cele trei cazuri, putem enunţa mai concentrat:

Se dă cercul O şi se duc două cercuri arbitrare O_1 *si* O_2 *trecând prin* O. *Coarda comună cercurilor* O_1, O_2 *este perpendiculară pe dreapta ce uneşte intersecţia coardelor ce se obţin unind reciproc intersecţii* (O, O_1), (O , O_2).

Cpt. Gh. N.

PROBLEMA 4217. *Fie* a, b *două numere pozitive şi* $A = \frac{a+b}{2}$ *media lor aritmetică iar* $H = \frac{2ab}{a+b}$ *media lor armonică.*

Se defineşte numărul:

$$T = \frac{ab - 1 + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}$$

ca media tangenţială a celor două numere.

Să se arate că avem oricare ar fi a *şi* b,

$$H \leqslant T \leqslant A$$

N. C.

Soluţie dată de D-rele: DORINA FABIUS, MARG. LÉBER şi D-l A. H. GÈIER (student Cluj); D-nii N. N. ALDEA, C. CURCHI, EM. MAREŞ, M. MARGULIUS, EM. MEREUŢĂ, C. PÂRVULESCU, N. ZANE, M. . ZIFF (Sstudenţi Bucureşti); D-l CEZAR IVĂNESCU (stud. Iaşi); S.-LOCOT. AVRAM N. CONSTANTIN şi AUR. EM. BĂDESCU: I. N. SAGER (R.-Sărat); N. BORZA (cl. VII Cluj); V. CEAUŞESCU şi C. CHIRIAC (Lic. Milit. Iaşi); M. MĂNESCU şi D. MAVRODIN (Lic. M. Eminescu Buc.); P. C. MAZILU (Lic. In. Iaşi); AL. D. STOICA (Lic. Voevodul Mihai Buc.); precum şi D-nii: C. IONESCU-ŢIU; I. I. PETRESCU; C. VASILESCU-POPESCU.

Să stabilim mai întâiu că $H \leqslant T$

sau:

$$(1) \qquad \frac{2ab}{a+b} \leqslant \frac{ab-1+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1}}{a+b}$$

Această inegalitate se poate încă scrie:

$$2ab \leqslant ab - 1 + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$$

sau:

$$ab + 1 \leqslant \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}.$$

Ridicând la patrat (ceace este permis) avem:

$$a^2b^2 + 2ab + 1 \leqslant a^2l^2 + a^2 + b^2 + 1$$

sau:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geqslant o$$

inegalitate evidentă căci:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \text{ şi } (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Să stabilim acum că $T \leqslant A$ sau că:

$$2\left[ab - 1 + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\right] \leqslant (a+b)^2$$

sau încă:

$$2\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \leqslant 2 + a^2 + b^2.$$

Ridicând la patrat avem:

$$4(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) \leqslant 4 + a^4 + b^4 + 4a^2 + 4b^2 + 2a^2b^2$$

sau făcând reducerile

$$2a^2b^2 \leqslant a^4 + b^4$$

inegalitate evidentă căci:

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2 - b^2) \geqslant 0.$$

Avem prin urmare:

$$H \leqslant T \leqslant A.$$

D-l N. N. VELICESCU pune: $a = \text{tg}\alpha$, $b = \text{tg}\beta$ si tratează astfel problema.

N. C.

*PROBLEMA 4241. *Care sunt numerele scrise cu cifre diferite la care cifrele sunt proporţionale cu rangul lor dela dreapta la stânga?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii S.-Locot. C. N. AVRAM din Geniu şi ZIFF S. MARTIN.

Fie numărul *ihgfedcba*. După enunţ găsim relaţia:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}=\frac{d}{4}=\frac{e}{5}=\frac{f}{6}=\frac{g}{7}=\frac{h}{8}=\frac{i}{9}.$$

Dacă facem $a=1$ găsim $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=6$, $g=7$, $h=8$, $i=9$, de unde soluţiile 21, 321, 4321, 54321, 654321, 7654321, 87654321, 987654321.

Dacă facem $a=2$ găsim $b=4$, $c=6$, $d=8$, de unde soluţiile 42, 642, 8642.

Dacă facem $a=3$ găsim $b=6$, $c=9$, de unde soluţiile 63 , 963.

Dacă facem $a=4$ găsim $b=8$, de unde soluţia 84.

Problema admite dar 14 soluţiuni.

*EXERCIŢII

33. Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu, să se stabilească inegalitatea

$$p(\sin^2\tfrac{1}{2}A+\sin^2\tfrac{1}{2}B+\sin^2\tfrac{1}{2}C)\geqslant 6r\ \sin A\ \sin B\ \sin C.$$

M. MARGULIUS.

R. Se înmulţesc inegalităţile cunoscute:

$$R\geqslant 2r\ ,\quad \Sigma\sin^2\tfrac{1}{2}A\geqslant\tfrac{3}{4}\ ,\quad \Sigma\sin A\geqslant\Sigma\sin 2A$$

şi se ţine seamă de relaţiile:

$$R\Sigma\sin A=p\quad\text{şi}\quad\Sigma\sin 2A=4\sin A\sin B\sin C.$$

34. Să se arate că ecuaţia

$$\alpha x^2+2\beta xy-\alpha y^2=0$$

reprezintă două drepte perpendiculare.

SUB.-LOC. I. C. SAVIN.

R. Ecuaţia care ne determină coeficienţii unghiulari ai dreptelor este

$$\alpha+2\beta xy-\alpha m=0$$

de unde se vede că

$$m'\,.\,m''=-1.$$

PROBLEME PROPUSE

4261. Să se găsiască un patrat perfect format din cifra 6 încadrată de 2 numere consecutive de câte 2 cifre.

COL. GH. BUICLIU.

*4262. Regulamentul unei şcoale prevede că un elev nu este primit la examenul general al unui curs dacă a absentat nemotivat la acel curs mai mult de o cincime din numărul lecţiunilor sau a absentat motivat mai mult de o pătrime din numărul lecţiunilor.

La un curs care are l lecţiuni un elev a făcut m absenţe motivate şi n nemotivate. Care e condiţia ca acel elev să poată fi admis la examenul general al acelui curs?

I. IONESCU.

*4263. Se dau cercurile (O_1) şi (O_2). Să se calculeze raza unui al treilea cerc (O) tangent la primele două şi la linia centrelor lor.

V. THÉBAULT.

4264. Fie cercul ABC de centru O; A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B, C iar A_1, B_1, C_1, mijloacele laturilor triunghiului ABC. Pe dreptele AA', BB', CC' se iau în acelaş sens punctele A_2, B_2, C_2, aşa încât să avem:

$$\frac{A_2O}{A_2A} = \frac{B_2O}{B_2B} = \frac{C_2O}{C_2C} = K.$$

Perechile de drepte (B_2C_1 , C_2B_1), (A_2C_1 , C_2A_1), (B_2A_1 , A_2B_1) concură în M, N, P respectiv pe AA', BB', CC'.

Triunghiul MNP este omotetic cu ABC şi înscris într'un cerc concentric cu ABC iar raportul ariilor este:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{(K+1)^2}{K^2}.$$

N. N. VELICESCU.

4265. Fie ABC un triunghiu oarecare şi AD, AE două ceviene izogonale. Se proectează vârful B al triunghiului pe una din izogonale, pe AD spre ex. în B_1; fie apoi A_1 proiecţia lui A pe BC iar E_1 proiecţia lui E pe AC. Punctele A_1, B_1, E_1 sunt coliniare.

CEZAR IVĂNESCU.

*4266. Să se arate că ecuaţia:

$$3x^2 + [3\lambda - 2(a+1)]x - (a+1)\lambda + a + \lambda^2 = 0$$

are, dacă a şi λ satisfac la condiţiile:

$$-1 \geqslant a \geqslant 1 \quad ; \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

o rădăcină cuprinsă între zero şi unu.

N. C.

4267. Să se rezolve sistemul:

$$x^9 + y^9 = 513$$
$$x^6y^3 + x^3y^6 = 72.$$

M. CHIRIŢĂ.

*4268. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sin^2 2p - \sin^2 2q}{\sin^2 p - \sin^2 q} \equiv 4\cos(p+q)\cos(p-q).$$

ALEXANDRU NICULESCU.

4269. Să se arate că normalele duse prin vârfurile respective la cele trei ovale a lui CASSINI având ca focare două din vârfurile unui triunghiu şi trecând prin al treilea sunt concurente.

TIB. POPOVICIU.

4270. Un atlet ridică o greutate dată într'o mână, menţinând corpul drept şi desdoind numai braţul.

Un alt atlet menţine aceeaşi greutate la înălţimea umărului, dar destinde braţul lăsând corpul în jos, apoi odată braţul întins, redresează corpul.

Din punct de vedere mecanic, ce diferenţă este între modul cum lucrează primul atlet de modul cum lucrează al doilea atlet?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aurian Ist-Bl. (1287); *Borza Al. N.* (4196); *Chiriac Const.* (4200, 31, 39); *Curchi Ioan* (4196, 223, 55, 59, N, P); *Drăguţ Maria* (4244, 53, 59); *Fabius Dorina* (4258, 59); *Godeanu I. V.* (3988, 4129, 33, 40, 231); *Goormaghtigh R.* (A); *Margulius Marius* (4223); *Mavrodin D. D-tru* (4140, 73, 239, 59); *Mereuţă Em.* (4208, 51, 53, 59, P); *Mihăileanu N. N.* (1911, 2081); *Moise Eliza* (4244, 53, 59); *Neumann Maria* (N); *Pârvulescu Const.* (4239); *Sager N. Iancu* (4223); *Şeremet M. Gh.* (4196); *Silaş George* (4253, 54, 59); *Zane D. Nicolae* (4173).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMARUL 11. — IULIE 1933

SUMARUL

1. Construction de la normale aux courbes de Lamé d'indices entiers . . . . . *R. Goormaghtigh*
2. Sur les cercles tangents à trois cercles . *V. Thébault*
3. Invăţământul aritmeticii în liceele noastre (urmare dela pagina 366) . . . . . *I. Ionescu*
4. Premiile „Gazetei Matematice"
5. Note matematice: 51 — 52
6. Bibliografie
7. Cereri: 225
8. Diverse

Probleme rezolvate: 4071, 4086, 4133, 4164, 4188, 4189

10. Exerciţii: 35 — 37
11. Probleme propuse: 4271 — 4280

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1933

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 47, 48, 50, 51, 55, 63, 67, 69, 70, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 16, 24, 25, 26, 30, 35, 36, 37, 40, 43, 46, 47, 48, 49, 52, 56, 57, 66, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

CONSTRUCTION DE LA NORMALE AUX COURBES DE LAMÉ D'INDICES ENTIERS

M. Al. Şcodranu a donné (*Gazeta Matematica*, XXXVIII, p. 286) une construction de la normale en un point de la quartique

$$x^4 - y^4 = a^4.$$

Nous nous proposons de généraliser cette construction en considérant d'abord les courbes de Lamé régulières représentées, par rapport aux axes rectangulaires xOy, par l'équation

$$x^m \pm y^m = a^m, \tag{1}$$

où m est un entier positif ou négatif.

1. Supposons d'abord m positif. On déduit immédiatement de l'équation (1), pour le coefficient angulaire de la normale,

$$-\frac{dx}{dy} = \pm\left(\frac{y}{x}\right)^{m-1}. \tag{2}$$

Soient d'autre part (voir la figure), M le point de coordonnées (x, y) sur la courbe, P le pied de l'ordonnée de M, Q_1 le point où la perpendiculaire élevée en O sur OM rencontre MP, Q_2 celui où la perpendiculaire élevée en Q_1 sur OQ_1 rencontre Ox, Q_3 celui où la perpendiculaire en Q_2 sur Q_1Q_2 rencontre MP, Q_4 celui où la perpendiculaire en Q_3 sur Q_2Q_3 rencontre Ox, et ainsi de suite. On a alors

$$PQ_1 = -\frac{x^2}{y},\ PQ_2 = \frac{x^3}{y^2},\ PQ_3 = \frac{x^4}{y^3},\ PQ_4 = -\frac{x^5}{y^4},\ PQ_5 = -\frac{x^6}{y^5},\ldots$$

Dès lors, les coefficients angulaires des droites MQ_2, MQ_4,... sont respectivement

$$-\frac{y^3}{x^3},\quad \frac{y^5}{x^5},\quad -\frac{y^7}{x^7},\ldots; \tag{3}$$

si l'on rapproche les expressions (2) et (3) on obtient aisément les constructions suivantes :

Pour les courbes

$$x^{2n+2} - y^{2n+2} = a^{2n+2},$$

la normale au point M *est la droite* MQ_{2n} *ou sa symétrique par rapport à* MP *suivant que* n *est impair ou pair.*

Pour les courbes

$$x^{2n+2} + y^{2n+2} = a^{2n+2},$$

la normale au point M *est la droite* MQ_{2n} *ou sa symétrique par rapport à* MP *suivant que* n *est pair ou impair.*

2. Appelons d'autre part $O\xi$, $O\eta$ les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle xOy.

Pour obtenir la normale à la courbe

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = a^{2n+1},$$

on mène, par le point Q_{2n-}, *une parallèle à* $O\xi$ *ou à* $O\eta$ *suivant que* n *est pair ou impair ; si cette parallèle coupe* Ox *en* R_{2n}, *la droite* MR_{2n} *est la normale en* M.

Pour obtenir la normale à la courbe

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = a^{2n+1},$$

on mène, par le point $Q_{2n\ 1}$, *une parallèle à* $O\xi$ *ou à* $O\eta$ *suivant que* n *est impair ou pair ; si cette parallèle coupe* Ox *en* S_{2n}, *la droite* MS_{2n} *est la normale en* M.

3. Envisageons maintenant le cas d'une courbe de LAMÉ, régulière d'indice entier négatif

$$x^{-p} \pm y^{-p} = a^{-p}.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \mp \left(\frac{y}{x}\right)^{p+1},$$

de sorte que la construction de la tangente aux courbes considérées est la même que celle de la normale aux courbes

$$x^{p+2} \mp y^{p+2} = a^{p+2}.$$

D'où les constructions suivantes :

Pour les courbes

$$x^{-2n} + y^{-2n} = a^{-2n},$$

la tangente au point M *est la droite* MQ_{2n} *ou sa symétrique par rapport à* MP *suivant que* n *est impair ou pair.*

Pour les courbes

$$x^{-2n} - y^{-2n} = a^{-2n},$$

la tangente au point M *est la droite* MQ_{2n} *ou sa symétrique par rapport à* MP *suivant que* n *est pair ou impair.*

Pour obtenir la tangente à la courbe

$$x^{-2n+1} - y^{-2n+1} = a^{-2n+1},$$

on mène par le point Q_{2n-1} *une parallèle à* $O\xi$ *ou* $O\eta$ *suivant que* n *est pair ou impair ; si cette parallèle coupe* Ox *en* R_{2n}, MR_{2n} *est la tangente en* M.

Pour obtenir la tangente à la courbe

$$x^{-2n+1} + y^{-2n+1} = a^{-2n+1},$$

on mène par le point Q_{2n-1} *une parallèle à* $O\xi$ *ou* $O\eta$ *suivant que* n *est impair ou pair ; si cette parallèle coupe* Ox *en* S_{2n}, *est la tangente en* M.

4. On obtiendra la tangente aux courbes de LAMÉ quelconques à indices entiers positifs ou negatifs

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m \pm \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

en observant qu'elles sont des courbes affines, pour l'axe d'affinité Ox et le rapport $b : a$, des courbes (1) et en tenant compte de ce que, pour deux courbes affines, les tangentes aux points correspondants se coupent sur l'axe d'affinité.

R. GOORMAGHTIGH
(Bruges, Belgique)

SUR LES CERCLES TANGENTS À TROIS CERCLES

1. Considérons trois cercles (O_1), (O_2), (O_3), de rayons R_1, R_2, R_3, dont les centres se suivent, dans l'ordre des indices croissants, *sur une droite* Δ, et posons $O_2O_3 = d_1$, $O_1O_3 = d_2$, $O_1O_2 = d_3$ Pour fixer les idées, supposons ces cercles *extérieurs* deux a deux.

Il y a, en général, quatre couples de cercles tangents à trois cercles. Lorsque les centres sont collinéaires, les huit cercles tangents sont symétriques deux à deux par rapport à la droite Δ des centres.

L'un d'eux (ω_1) est tangent extérieurement aux trois autres. Chacun des autres, (ω_2), (ω_3), (ω_4), est tangent intérieurement à

(O_1), (O_2), (O_3), et extérieurement aux deux autres, (O_2) et (O_3), (O_3) et (O_1), (O_1) et (O_2).

Proposons-nous de calculer les expressions des rayons ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, des cercles (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4).

La relation de STEWART, appliquée aux droites ω_1O_1, ω_1O_2, ω_1O_3, coupées par l'axe Δ, donne, en grandeur et en signe,

$$\overline{O_1O_2}\cdot\overline{\omega_1O_3}^2+\overline{O_2O_3}\cdot\overline{\omega_1O_1}^2+\overline{O_3O_1}\cdot\overline{\omega_1O_2}^2+\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_2O_3}\cdot\overline{O_3O_1}=0,$$

ou

$$d_1(\rho_1+R_1)^2+d_3(\rho_1+R_3)^2-(d_1+d_3)(d_1d_3+R_2^2)=d_1d_3(d_1+d_3).$$

Après réduction et séparation des termes en ρ_1, il vient

$$\rho_1=\frac{(d_1+d_3)(d_1d_3+R_2^2)-d_1R_1^2-d_3R_3^2}{2[d_1R_1+d_3R_3-(d_1+d_3)R_2]},$$

soit, en observant que $d_2=d_1+d_3$,

$$\rho_1=\frac{d_2(d_1d_3+R_2^2)-d_1R_1^2-d_3R_3^2}{2(d_1R_1-d_2R_2+d_3R_3)}. \qquad (1)$$

Chacun des autres cercles (ω_2), (ω_3), (ω_4), étant tangent intérieurement à l'un seulement des cercles (O_1), (O_2), (O_3), les valeurs des rayons ρ_2, ρ_3, ρ_4, de ces cercles s'obtiennent en remplaçant, dans la précédente formule R_1 par $-R_1$, R_2 par $-R_2$, ou R_3 par $-R_3$.

Ainsi, pour le cercle (ω_2) tangent intérieurement à (O_1),

$$\rho_2=\frac{d_2(d_1d_3+R_2^2)-d_1R_1^2-d_3R_3^2}{2(-d_1R_1-d_2R_2+d_3R_3)}; \qquad (2)$$

pour (ω_3), qui est tangent intérieurement à (O_2),

$$\rho_3=\frac{d_2(d_1d_3+R_2^2)-d_1R_1^2-d_3R_3^2}{2(d_1R_1+d_2R_2+d_3R_3)}; \qquad (3)$$

enfin pour (ω_4) qui touche intérieurement (O_3),

$$\rho_4=\frac{d_2(d_1d_3+R_2^2)-d_1R_1^2-d_3R_3^2}{2(d_1R_1-d_2R_2-d_3R_3)}. \qquad (4)$$

2. Les quatre expressions que nous venons de trouver se déduisent de la formule

$$\rho=\frac{d_2(d_1d_3+R_2^2)-d_1R_1^2-d_3R_3^2}{2[\pm d_1R_1\pm d_2R_2\pm d_3R_3]}, \qquad (5)$$

en combinant les signes de toutes les façons possibles et ne considérant que les valeurs absolues des nombres obtenus.

Cette formule conduit visiblement à la suivante

$$\pm\frac{1}{\rho_1}\pm\frac{1}{\rho_2}\pm\frac{1}{\rho_3}\pm\frac{1}{\rho_4}=0, \qquad (6)$$

qui est générale pour des cercles (O_1), (O_2), (O_3), dont les centres sont collinéaires, quelles que soient leurs positions relatives.

3. *Cas particuliers. — a)* Lorsque l'un des cercles (O_2), par exemple, dégénère en un point situé sur l'axe Δ, la relation (5) devient

$$\rho=\frac{d_1d_2d_3-d_1R_1^2-d_3R_3^2}{2\,[\pm d_1R_1\pm d_3R_3]}.$$

b) La figure de l'ARBELON [1]), est constituée par trois cercles (O_1), (O_2), (O_3), décrits sur trois segments AC, CB, AB, d'un même axe Δ.

Ces cercles sont tangents deux à deux en A, C, B. Les cercles qui touchent ces trois cercles sont (O_1), (O_2), (O_3), et un cercle (ω_3) tangent intérieurement à (O_2) et extérieurement à (O_1) et (O_3).

En vertu de (6) le rayon ρ_3 du cercle (ω_3) est tel que [2])

$$\frac{1}{\rho_3}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_1+R_3}.$$

c) Plus généralement, considérons deux cercles quelconques (O_1), (O_3), qui touchent respectivement un autre cercle (O_2) aux extrémités A et B du diamètre $\Delta\equiv O_1O_2O_3$ de ce dernier cercle. Soient $AC=2R_1$, $AB=2R_2$, $CB=2R_3$, les diamètres de ces cercles.

Les cercles tangents à la fois à (O_1), (O_2), (O_3), sont ici, (O_2), les cercles de diamètres AC et CB et un cercle (ω_3), de rayon ρ_3, qui touche (O_2) intérieurement et (O_1), (O_3), extérieurement.

Dans cette figure, la relation (6) donne

$$\frac{1}{\rho_3}=\frac{1}{R_2-R_1}+\frac{1}{R_2-R_3}\pm\frac{1}{R_2},$$

suivant que le cercle, (O_2) touche, à la fois intérieurement ou extérieurement les cercles (O_1), (O_3).

V. THÉBAULT.
Le Mans — (France).

1) ARCHIMEDE, *Livre des Lemmes,* proposition VI.

2) Cette formule a été donnée dans le *Journal de* BOURGET, 1878 p, 287

INVĂȚĂMÂNTUL ARITMETICII IN LICEELE NOASTRE

(Urmare dela pagina 366)

A doua chestiune dată la concurs a fost următoarea: [1])

„Laturile unui dreptunghiu sunt în raportul 1 : 1,5129, iar aria lui este echivalentă cu a unui patrat de 7,925 m. latură. Care este raportul dintre perimetrul dreptunghiului și al patratului? Rezultatul se va da cu două zecimale exacte“.

Dacă a este latura cea mică a dreptunghiului și latura cea mare $b = 1{,}5129\ a$, egalitatea dată a ariilor ne duce la egalitatea:

$$ab = 1{,}5129\ a^2 = 7{,}925^2,$$

și cum $\sqrt{1{,}5129} = 1{,}23$ se deduce $a = 7{,}925\ 1{,}23$. Raportul cerut al perimetrelor este:

$$\frac{2(a+b)}{4 \times 7{,}925} = \frac{2a + 2a \times 1{,}5129}{4 \times 7{,}925} = \frac{2{,}5129a}{2 \times 7{,}925},$$

unde înlocuind pe a cu valoarea lui, găsim că raportul căutat este $2{,}5129/(2 \times 1{,}23) = 1{,}02$. Se vede de aci că mărimea laturii patratului nu intervine la calcule.

Această chestiune destul de simplă, — mai ales că elevii candidați cunoșteau și geometrie și algebră, — nu a fost măcar încercată de 65 de candidați! Numai 4 candidați au rezolvat problema foarte bine, cu calcule numerice puține și foarte bine făcute. Aceștia sunt foști elevi ai liceelor din Turnu Severin, Râmnicul Vâlcii, Oltenița și Aurel Vlaicu din București. Rezultatul 1,02 a fost dat bine, sau cu o aproximațiune suficientă de încă 107 candidați, iar cu o aproximațiune mai îndepărtată de 44 candidați. Mulți s'au temut să dea rezultatul în fracție zecimală, neștiind cum să ajungă la aproximațiunea cerută, deși, cum se vede din schița de soluție dată mai sus, această determinare nu cerea cunoștința teorii erorilor ci numai împărțirea a două fracții, întrucât extragerea de rădăcină necesară se făcea exact.

Deraierile la această chestiune au fost însă foarte numeroase și de natură foarte variată.

---

1) *Problema* 4222. Vezi pagina 316.

Menționez mai întâiu că 20 dintre candidați nu au știut ce este un dreptunghiu, și anume: 2 dela liceul Lazăr din București, și câte unul dela liceele Șincai și Evanghelic din București, Seminarul pedagogic și liceul Barițiu din Cluj, liceele Regina Maria și Al. Russo din Chișinău, liceele din Constanța, Ploiești, Lugoș, Dumbrăveni, Orhei, Carol I din Craiova, Bruckental din Sibiu, Mailath din Alba Iulia, Alexandri din Galați, liceul No. 1 din Atena, liceul Romano-Catolic din Odorheiu și liceul de băieți din Ismail. Toți aceștia au luat un triunghiu în loc de dreptunghiu! Unii au luat un triunghiu oarecare, iar candidații dela Craiova și unul dela Lazăr din București au și scris că între laturile lui a, b, c avem relația:

$$a/b = b/c = c/a = 1/1{,}5129.$$

Dacă considerăm a/b, b/c și c/a egale cu ultimul raport am scoate de aci $1{,}5129^3 = 1$!

Cei mai mulți iau triunghiul dreptunghic cu raportul dat între catete. Candidatul dela Sibiu mai ia ipotenusa egală cu latura patratului dat; candidatul dela Buzău mai ia și raportul între o catetă și ipotenusă 1 : 1,5129 ca și cum cateta ar fi mai mare ca ipotenusa, iar ca să-și mai procure o ecuație scrie că perimetrul triunghiului este egal cu aria patratului! Candidatul dela liceul Russo ia o catetă 1 și alta 1,51239 m. Găsește atunci aria 0,7564 m² cu care împarte aria patratului și dă câtul 80,9 ca fiind raportul căutat. Candidatul dela Atena spune că: *„Cunoaștem că în orice triunghiu există același raport între două laturi inegale“*; pentru candidatul dela liceul Barițiu aria unui triunghiu e produsul catetelor; pentru candidatul dela liceul Șincai ipotenusa nu face parte din perimetrul triunghiului; candidatul dela Dumbrăveni scrie de două ori relația $y = x \,.\, 1{,}5129$ și deduce imediat $x^2 = 1{,}5129$. Candidatul dela Odorheiu ne spune următoarele: *„Raportul între perimetrul dreptunghiului și al patratului este că: perimetrul dreptunghiului este egal cu rezultatul laturilor a dreptunghiului iar perimetrul al patratului și este egal cu rezultatul laturilor. Raportul este acela că rezultatul laturilor patratului este egal cu perimetrul celui două dreptunghiului care găsim în patrulater“*. In fine candidatul dela liceul Marele Voievod Mihai din București spune că: *„Triunghiul ale cărui laturi stau în raportul 1|1,5129 este un triunghiu isoscel iar unghiul drept este cuprins între*

laturile egale" de unde conchide că o catetă este rădăcina patrată a dublului ariei patratului dat; dar nu se preocupă de faptul că atunci raportul între ipotenusă şi catetă este $\sqrt{2} = 1{,}41$ iar nu cel dat!

Pentru un elev căruia nu i-am putut stabili proveniența, din cauză că după concurs şi-a luat repede actele şi a plecat, dar care a dat teza cu No. 101, — dreptunghiul are laturile opuse *a*, *b* şi *c*, *d* neegale; el a scris ecuația problemei astfel:

$$a/b + c/d = 1/1{,}5129.$$

Unii din candidați ştiu ce e un dreptunghiu dar nu-l prea cunosc bine! Astfel pentru un candidat dela liceul Aurel Vlaicu din Bucureşti figura unui dreptunghiu este un paralelogram şi a unui patrat un romb; pentru doi candidați dela liceul din Rădăuți aria dreptunghiului este semiprodusul laturilor; un candidat dela liceul Sft. Sava din Bucureşti scrie: „*Perimetrul dreptunghiului* $= 1/1{,}5129$" şi dă rezultatul $(1/1{,}5129)/31{,}7 = 20{,}95$ întrucât nu ştia cum se împarte o fracție cu un întreg. Un candidat dela liceul Marele Voievod Mihai din Bucureşti şi altul dela Ploieşti iau latura cea mică a dreptunghiului egală cu latura patratului şi se apucă să calculeze pe cea mare ca să iasă ariile egale. Un fost elev al liceului din Bârlad şi altul dela Ploieşti conchide egalitatea perimetrelor din a ariilor. Pentru un fost elev al liceului din Focşani perimetrul dreptunghiului este dublul ariei lui şi scrie:

$$„p/p' = 2ab/31{,}800".$$

Pentru un candidat dela liceul Marele Voievod Mihai din Bucureşti, dreptunghiul este un poligon regulat. Reproduc aci toată soluția sa ca probă de incorență în expunere:

„*Fie dat dreptunghiul* ABCD *în care laturile lui sunt în raportul 1 : 1,5129 şi reprezintă perimetrul lui. Aria acestui dreptunghiu este echivalentă cu a unui patrat de latura 7,925 m.*

In orice poligon raportul ariilor sunt direct proporționale cu raportul perimetrelor. In dreptunghiu care e şi el un poligon se poate aplica de asemeni acest lucru.

Deci $\frac{S}{P} = \frac{S'}{P'} = \frac{S''}{P''}$ etc. S = aria şi P = perimetrul.

Deasemenea în patratul ABCD, *putem aplica această regulă şi anume:*

$$\frac{S_1}{P_1} = \frac{S_2}{P_2} = \frac{S_3}{P_3}.$$

Insă aria dreptunghiului e echivalentă cu a patratului cu latura de 7,925 şi deci putem scrie:

raportul perimetrelor şi al ariilor $\frac{S_1}{P_1} = \frac{S_2}{P_2}$ *şi schimbând extremii* $\frac{P_2}{P_1} = \frac{S_2}{S_1}$ = *raportul perim.* = *rap. ariilor.*

In care S_1 = *aria dreptunghiului;* S_2 *a patratului;* P_1 = *perimetrul dreptunghiului iar* P_2 = *al pătratului.*

Şi înlocuind avem:

$$\frac{S_1}{1{,}5129} = \frac{S_2}{4 \times 7{,}925} \quad \text{sau} \quad \frac{4 \times 7{,}925}{1{,}5129} = \frac{S_2}{S_1}$$

de unde $\frac{S_2}{S_1}$ *care reprezintă raportul ariilor dreptunghiului şi al patratului care sunt echivalente".*

Aci se văd unele reziduuri confuze de geometrie! Cazul nu este unic. Mai iată câteva exemple. Astfel doi candidaţi dela liceele Sft. Sava şi Spiru Haret din Bucureşti spun că raportul perimetrelor este egal cu al laturilor. Primul spune, dar nu face, al doilea dă 1/1,5129 = 0,66098 şi 1/7,925 = 0,126 şi zice că 0,6614/0,126 = 4,44 e raportul cerut! Candidaţii au uitat că figurile trebuie să fie asemenea ca să poată aplica teorema. Alţii au pus proporţionalitatea între laturi şi arii; astfel un candidat dela liceul Ilarian din Târgul Mureşului dă toată soluţia în următoarele rânduri:

„Raportul ariilor a două poligoane este egal cu raportul laturilor sale. Perimetrul dreptunghiului va fi suma laturilor, dar noi nu ştim decât raportul laturilor şi atunci vom avea (1/1,5129) = raportul laturilor patratului".

Câte un fost elev dela liceele Aurel Vlaicu şi Marele Voievod Mihai din Bucureşti, din Ismail şi din Gura Humorului au utilizat proprietatea, — cunoscută lor, — că perimetrele sunt proporţionale cu ariile, şi cum ariile sunt egale au conchis şi la egalitatea perimetrelor dreptunghiului cu al patratului! Un candidat cu memorie

mai bună dela liceul din Bacău şi-a adus aminte că raportul ariilor este egal cu al laturilor la patrat, fără a vedea că aci figurile nu sunt asemenea. Un candidat dela liceul Matei Basarab din Bucureşti merge mai departe şi zice: *„Raportul suprafeţelor este egal cu al laturilor la patrat, deci şi cu al perimetrelor la patrat"*, ceeace face şi un candidat dela liceul Sft. Sava din Bucureşti. Alţii încurcă noţiunile de geometrie şi mai rău. Un candidat dela liceul Şaguna din Braşov spune că: *„Intr'un dreptungiu între cele trei mărimi arie, perimetru şi laturi există relaţia: raportul între arie şi perimetru este egal cu raportul laturilor"*. Un candidat dela Turnu Severin scrie egalitatea:

$$\frac{\text{P dr.}}{\text{P patr.}} = \frac{\text{Rap. lat. dr.}}{\text{Rap. lat. patr.}}$$

de unde scoate P dr. = 20,95 şi apoi raportul cerut 0,66. Un candidat dela liceul din Turnu Măgurele şi-a adus aminte de asemănarea figurilor şi spune: *„Pentru ca să se poată forma raportul perimetrelor trebuie ca poligoanele (patrulaterele să fie asemenea). Dreptunghiul poate fi transformat într'un patrat al cărui perimetru să fie egal cu al lui...."*. E de notat că acest candidat găsise exact laturile patratului.

In fine un candidat dela liceul din Odorhei şi-a adus aminte că latura patratului este $R\sqrt{2}$; se apucă şi calculează $\sqrt{1,5129} = 1,23$; $\sqrt{2} = 1,41$, se întoarce înapoi efectuând $1,41^2 = 1,9981$, — deşi erea mai uşor şi mai exact să ia pe 2, — face scăderea $7,925 - 1,9981 = 5,9369$; scoate acestui număr rădăcina patrată şi găseşte 2,63 şi dă pe 2,63/1,23 ca raportul căutat!

Arbitrarul a avut mulţi adepţi la rezolvarea acestei chestiuni. Astfel doi candidaţi dela liceul Cantemir şi altul dela liceul Aurel Vlaicu din Bucureşti şi altul dela Buzău iau o latură a dreptunghiului egală cu 1; altul o ia 4 m., altul dela liceul Gh. Lazăr din Bucureşti o ia 5. Un candidat dela Călăraşi ia o latură 1,5129 şi alta $1/1,5129 = 0,66$, ideie pe care a avut-o şi un elev dela liceul Aron Pumnul din Cernăuţi dar care găseşte inversul lui 1,5129 egal cu 6,06. Un candidat dela Roşiori de Vede ia o latură 1,5129, dar pe cealaltă o ia $7,925^2/1,5129$. La aceiaşi concluzie au ajuns şi câte un candidat dela liceele Cantemir şi Şincai din Bucureşti, unul dela Brăila şi altul dela Şimlăul Silvaniei. Câte un candidat

dela liceele Meşota din Braşov, din Făgăraşi şi din Buzău iau o latură a dreptunghiului 7,925/1,5129. Altul dela Satul Mare ia invers 1,5129/7,925, iar unul dela liceul Spiru Haret din Bucureşti ia $7{,}925 \times 1{,}5129$. Un candidat dela liceul Şincai şi altul dela Mihai Viteazul din Bucureşti iau o latură a dreptunghiului jumătatea laturii patratului şi alta dublul acesteia. Un candidat dela liceul din Buzău şi altul dela liceul din Găeşti iau laturile dreptunghiului şi scot dreptunghiul, patrat, cu toate că s'a dat raportul 1,5129 între ele! Cam aşa face şi o Domnişoară dela liceul de fete din Soroca.

Pentru rezolvarea problemei, un candidat dela liceul Carol I din Craiova spune că *„laturile le aflăm prin împărţirea în părţi proporţionale“* şi se opreşte aici. Un candidat dela liceul Romano-Catolic dela Braşov şi altul dela Suceava aplică acest principiu împărţind semiperimetrul patratului proporţional cu 1 şi 1,5129, iar câte unul dela liceele Spiru Haret din Bucureşti, dela Bacău şi Ploieşti găsesc laturile dreptunghiului împărţind aria patratului în părţi proporţionale cu 1 şi 1,5129. Un candidat dela Deva găseşte laturile x şi y ale dreptunghiului cu ecuaţiile:

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}51\, xy = 7{,}925^2 \quad \text{şi} \quad \frac{1}{2}\, 1{,}51\, x - y = 0.$$

In privinţa raportului cerut, un candidat dela liceul din Turnu Măgurele îl găseşte 1; altul dela liceul Real No. 2 din Cernăuţi îl trânteşte dintr'o dată 1/2; un candidat dela liceul Mihai Viteazul din Bucureşti îl găseşte 1,25 *metri*. Am mai menţionat înainte pe unul dela Târgul Mureşului pentru care raportul între laturile patratului este 1,5129! Un candidat dela liceul Marele Voievod Mihai din Bucureşti dă ca raport al perimetrelor (2/1,5129)/4 şi neştiind împărţi o fracţie cu un întreg dă ca rezultat 5,28.

Acestui din urmă candidat i-a căzut exponentul dela expresiunea $7{,}925^2$ a arii patratului şi a dat *„S, dr = 18,850 m²“* reuşind a da aria patratului ca dublul laturii şi reuşind a greşi la înmulţirea cu 2. Un candidat dela Tighina, la egalitatea bună dar rău scrisă:

$$1{,}5129\, y^2 = 7{,}925\, m^2,$$

simplifică cu exponentul 2 şi scoate $y = (7{,}925/1{,}5129)\, m$. Un altul dela liceul Şincai din Bucureşti şi altul dela Târgul Jiu, la calcule

pierd exponentul lui 7,925 şi dau între laturile dreptunghiului relaţia : $a = 7{,}925/b$.

Un candidat dela liceul Spiru Haret din Bucureşti, introduce ideia nouă de *„Suprafaţa unitate a dreptunghiului"* care are valoarea 1,5129 m^2, şi bine înţeles se încurcă.

Un candidat dela acelaşi liceu ia pe 7,925 ca suprafaţă a patratului şi scoate rezultatul exact! Pricina e că rezultatul căutat, — după cum am spus la început, — nu depinde de latura patratului, ci numai de raportul dat între laturi.

Enunţul problemei cerea ca rezultatul să fie dat cu 2 zecimale exacte. Iată cum a rezolvat această parte un elev dela liceul din Târgul Mureşului: *„(32,37/31,50) dat cu 2 zecimale exacte"*. Dacă muta virgulele cu câte o cifră mai spre stânga putea să aibă câte trei cifre zecimale exacte, etc. Iată şi soluţia unui candidat dela liceul Carol I din Craiova:

$1/1{,}5129 = 1 : 1{,}5129 \ldots$ S drp = S p $\ldots$ $1 \times 1{,}5129$ = S drp = Sp...

P drep./P patr = 0,2 zecimale.

Asta-i totul! E aci o ideie cu care nu s'au ocupat matematicianii şi anume a unui număr zecimal cu un număr fracţionar de zecimale!

Reproduc aci soluţia aceluiaşi elev, căruia i-am reprodus şi soluţia dela prima chestiune:

„Aflăm suprafaţa patratului = L^2 = S = 62,81.

Cunoscând latura şi suprafaţa patratului, putem face raportul între perimetrul lui şi suprafaţă şi de asemenea cunoscând suprafaţa dreptunghiului şi perimetrul x *necunoscut, facem cu cele 2 rapoarte o proporţie şi îl aflăm pe* x. $4a'/S = S'/(2a + 2b) = 31{,}7$ m/62,81 m^2 = 62,81 m^2/x *pentrucă perimetrul patratului* = *cu* $7{,}925 \times 4$, *laturile fiind egale şi suprafeţele sunt echivalente.*

Deci avem 31,7 m/62,81 m^2 = 62,81 m^2/124,45 . 124,45 m = cu *perimetrul dreptunghiului. Atunci raportul perimetrelor este*

$$(4a') / (2a + 2b) = (a + a + a + a) / (a + a + b + b) =$$

$$31{,}70/124{,}45 = 1/1{,}5129 = 0{,}03.$$

Pentrucă ştim regula care spune: Suma numărătorilor unei proporţii supra suma numitorilor este egal cu fiecare din raportul dat".

(Va urma). I. Ionescu.

PREMIILE „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU CONCURSUL ŢINUT IN ANUL 1933

La pagina 321 al acestei reviste, s'a publicat rezultatul concursului ţinut în anul acesta în vacanţa Paştilor şi s'a arătat cari corespondenţi s'au distins la probele scrise şi examinările orale.

In şedinţa dela 5 Iulie a. c. s'au semnat diplomele premianţilor la acest concurs.

Graţie donaţiunilor făcute de unii membri ai Societăţii noastre s'au acordat, cu această ocazie, următoarele premii celor patru corespondenţi reuşiţi la concurs:

1. D-lui Ceauşescu Vasile: SILVANUS P. THOMPSON: „Le Calcul Intégral“.
I. IONESCU: „Comparaţiunea rădăcinilor mai multor ecuaţiuni“. Vol. I. şi II.
I. IONESCU: „Isac Newton“.

2. D-lui Mănescu Mircea: SILVANUS P. THOMPSON: „Le Calcul Intégral .
I. IONESCU: „Maşinile de Calcul“.
I. IONESCU: „Nomografia“.
MAURICE D'OCAGNE: „Notions sommaires de Géométrie Projective“.

3. D-lui Cosma Victor: C. A. LAISANT: „Initiation Mathématique“.
JULIUS PETERSEN: „Constructions Géométriques“.
I. IONESCU: „Geometrografia“.
GHEORGHE LAZĂR: „Trigonometria“.

4. D-lui Popa Traian: GHEORGHE LAZĂR: „Trigonometria“.
I. IONESCU: „Un nou metod pentru studiul Trigonometriei Plane“.
P. AUBERT & G. PAPELIER: „Exercices d'Algébre, d'Analyse et de Trigonométrie“.

Totodată, conform regulamentului fondului «LT.-COL. GH. A. TĂNĂSESCU», s'a acordat D-lui CEAUŞESCU VASILE, clasificat întâiul la concurs, volumul «Eléments de Géométrie Analytique» de A. TRESSE, cumpărat din venitul acestui fond.

Cărţile şi diplomele se găsesc la D-l Inginer DAN VASILIU, «Monitorul Oficial», Bucureşti, de unde se pot lua sau cere să fie expediate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

51. *Asupra problemei No. 4007.*

In această problemă se cerea să se studieze din punct de vedere matematic, cazul vulpei urmărită de câine.

In legătură cu ea, îmi propun să rezolv următoarea chestiune: *să se găsească curba descrisă de câine, ştiind că mişcarea sa e mereu îndreptată către vulpe.*

Voiu presupune că cele două mişcări se fac cu viteze uniforme, şi că vulpea se deplasează pe o dreaptă, pe care o voiu lua drept axă de y. Segmentul determinat de tangenta la curba căutată pe acest ax este:

$y - x \cdot \frac{dy}{dx}$ şi prin ipoteză creşterea sa infinit de mică e proporţională cu creşterea arcului. Notând $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ cu p, avem:

$$-x.dp = h.\sqrt{1+p^2}.dx$$

sau

$$h.\frac{dx}{x} + \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Integrând, obţinem:

$$\log x^h + \log(p + \sqrt{1+p^2}) + \log A = 0$$

$$\therefore \log(p+\sqrt{1+p^2}) = -\log . A . x^h = \log A^{-1} . x^{-h}$$

$$(1) \qquad p + \sqrt{1+p^2} = A^{-1} . x^{-h}.$$

Insă

$$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{1+p^2} - p.$$

De aci deducem:

$$p - \sqrt{1+p^2} = -A . x^h .$$

Adunând (1) cu (2) avem:

$$2p = A^{-1} . x^{-h} - A . x^h .$$

Dacă integrăm din nou, putem scrie:

$$2y = C - \frac{A^{-1}}{h-1} . x^{-h+1} - \frac{A}{h+1} . x^{h+1}.$$

Curba descrisă de câine, va fi deci algebrică, devenind transcendentă numai în cazul când viteza câinelui este egală cu aceea a vulpei, adică atunci când avem $h = 1$, căci

$$-\frac{x^{1-1}}{1-1} = \log x \ ^{1}).$$

MARIUS MARGULIUS.

Notă. Problema studiată mai sus este cunoscută, dar o publicăm pentru soluţia ei.

I. L.

52. *Identităţi şi inegalităţi algebrice.*

I. Imi propun ca pornind dela relaţii trigonometrice cunoscute dintre unghiurile unui triunghiu, să stabilesc câte-va identităţi şi inegalităţi algebrice.

Relaţiunile dintre unghiurile unui triunghiu sunt bazate pe condiţia:

$$A + B + C = \pi.$$

Noi o vom înlocui cu următoarea:

$$(a) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = 1$$

convenind mai bine scopului.

Astfel fiind putem considera relaţiile dintre unghiurile A, B, C condiţionate de (a). Exprimând apoi în aceste relaţii liniile trigonometrice în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ şi făcând substituţia:

$$(b) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = x \ , \ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = y \ , \ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = z$$

vom avea identităţi şi inegalităţi algebrice *condiţionate.*

II. Să considerăm identităţile trigonometrice:

1) $\Sigma \sin A = 4 \cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C$

2) $\Sigma \cos A = 1 + 4 \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$

3) $\Sigma \operatorname{tg} A = \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C$

4) $\Sigma \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B = 1$

5) $\Sigma \sin^2 A = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

6) $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$

7) $$\Sigma \frac{\sin B - \sin C}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A} = 0.$$

1) Vezi Saint Laurent. Annales de Gergonne, Vol. XIII şi „Courbes planes" par G. SALMON.

Făcând operaţiile arătate la (I) obţinem respectiv identităţile algebrice următoare:

1) $\Sigma \frac{x}{1+x^2} = \frac{2}{N}$ 2) $\Sigma \frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{4xyz}{N}$ 3) $\Sigma \frac{x}{1-x^2} = \frac{4xyz}{M^2}$

4) $\Sigma \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{xy} = 4$ 5) $\Sigma \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = 1 + \frac{M^2}{N^2}$ 6) $\Sigma \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{8xyz}{N^2}$

7) $\frac{y(1+z^2)-z(1+y^2)}{x(1+y^2)(1+z^2)} + \frac{z(1+x^2)-x(1+z^2)}{y(1+z^2)(1+x^2)} + \frac{x(1+y^2)-y(1+x^2)}{z(1+x^2)(1+y^2)} = 0$

cari au toate loc pentru:

$$xy + yz + zx = 1.$$

Pentru uşurinţa scrisului am însemnat:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = N^2 \quad \text{şi} \quad (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = M^2.$$

Identitatea (3) se găseşte în «Culegere de probleme de algebră» de A. G. Ioachimescu Cap. IV. Inainte de a trece mai departe observăm că înlocuind în (3) şi (4) pe x, y, z respectiv prin $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ obţinem aceleaşi identităţi (3) şi (4) însă valabile şi sub noua condiţie:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$$

sau:

$$x + y + z = xyz.$$

III. Să stabilim acum şi câteva inegalităţi şi pentru aceasta să considerăm următoarele inegalităţi trigonometrice (Culegere de probleme, trigonometrice, cap. XVII):

1) $\Sigma \sin^2 \frac{1}{2}A \geqslant \frac{3}{4}$ 2) $\Sigma \operatorname{cotg}^2 A \geqslant 1$ 3) $\Sigma \sin 2A \leqslant \Sigma \sin A$

şi urmând după metoda indicată obţinem respectiv inegalităţile algebrice:

1) $\Sigma \frac{z^2}{1+x^2} \geqslant \frac{3}{4}$ 2) $\Sigma \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2 \geqslant 4$ 3) $\Sigma \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \leqslant \Sigma \frac{x}{1+x^2}$

cari au loc, evident, tot pentru:

$$xy + yz + zx = 1.$$

Cezar Ivănescu.

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Tomul XLVII. No. 5. Mai 1933. Gembloux. Asupra unei teoreme de geometrie infinitezimală, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra deplasărilor cu unul sau două parametre, de F. BACKES. Asupra suprafeţelor în spaţiu, de R. GODEAU. Asupra configuraţiunii formate de două triunghiuri şi două puncte, de N. G. BOTEA. Suprafeţe strâmbe având ca asimptotice linia de contact cu desfăşurata isotropă circumscrisă. de R. DEAUX.

Boletin Matematico. Anul VI. No. 1. Martie 1933. Buenos Aires. Rezumat al teoriei numerelor raţionale generalizate, de M. O. GONZALES.

Boletin Matematico. *Supplemento informativo.* Anul I. No. 2. Buenos Aires. Aprilie 1933.

Boletin Matematico Elemental. Anul IV. No. 2. Aprilie 1933. Buenos Aires. O teoremă interesantă asupra trapezului, de B. I. BAIDAFF.

Sphinx. Anul III. No. 6. Iunie 1933. Bruxelles.

Idem. Anul III. No. 7. Iulie 1933. Bruxeles. Valoarea lui *e* cu 707 zecimale, de D. H. LEHMER. Marile numere prime, de M. KRAITCHIK. Primele două Congrese ale matematicianilor români, de P. SERGESCU.

Journal de Mathematiques Elémentaires publié par H. VUIBERT. Anul 57, No. 17. Iunie 1933. Paris.

Idem. No. 18. Iunie 1933.

Biblioteca de la Faculdad de Ciencias exactas, fisicas y naturales de la Universidad de Buenos Aires. Buletinul No. 20. Lista publicaţiunilor periodice care se primesc regulat de această bibliotecă. (Clasificarea după materii). Martie 1933. Buenos Aires.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 4. 1933. Timişoara. Sur un théorème de géométrie, par V. THÉBAULT. Teoreme în legătură cu două triunghiuri sau două poligoane, de N. G. BOTEA.

Natura. Anul XXI. No. 5. Mai 1933. Bucureşti. Evoluţia ştiinţelor matematice în ţara noastră, de G. ŢIŢEICA.

V. TEODOREANU. *Cuvântările adresate foştilor săi elevi în ziua de 14 Mai 1933.* Iaşi 1933.

VITO VOLTERA. *Le calcul des Variations, son évolution, et ses progrès son rôle dans la physique mathématique.* Praga-Brno 1932 (Conferinţe făcute în 1931 la Facultatea de ştiinţe Charles la Praga şi la Facultatea de ştiinţe a Universităţii Massaryk la Brno).

J. Sahanek. *Buzeni Hertzovych diodami.* (Emisiunea undelor herziane prin diode). Brno 1932. (Publicaţiune a Facultăţii de ştiinţe a Universităţii Masaryk).

B. Hostinski. *Sur une équation fonctionelle de la théorie des probabilités.* Brno 1932. (Publicaţiune a Facultăţii de ştiinţe a Universităţii Masaryk).

Jan Ptocek. *O dispersi v teorii Markovovych retezu.* (Asupra dispensiunii în teoria şirurilor lui Markoff). Brno 1932. (Publicaţiune a Facultăţii de ştiinţe a Universităţii Masaryk).

Josef Zahradnicek. *Mereni gravitacni konstanty tocyvymi vazkami.* (Măsura constantei gravitaţiunii prin balanţa de torsiune). Brno 1932. (Publicaţiune a Facultăţii de ştiinţe a Universităţii Masaryk).

Cl. Servais. *Sur la géométrie du tétraèdre.* Supliment la *Mathesis.* (Extras din *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique).* Bruxelles 1933

A. Devresse. *Sur la problème de la carte par les méthodes de fausses positions et du relevement italien.* (Supliment la *Mathesis*).

J. B. Pomey. *Application des imaginaires au calcul vectoriel.* Complément à la conférence sur le calcul vectoriel. Paris 1933.

Aplicaţiunile calculului vectorial la electricitate cer un studiu al imaginarelor pe care autorul îl face în o broşură de 70 de pagini. Ea începe cu teoria cantităţilor complexe aplicate la geometrie şi fizică şi cu aplicaţiuni la mecanică, electrotecnică. Alte capitole se ocupă cu teoria vibraţiunilor eliptice, sfera complexă şi formula lui Cayley relativă la rotaţiunile finite.

Este o broşură utilă pentru fizicieni şi inginerii electriciani.

I. I.

M. Ghermanesco. *Sur l'analycité des solutions d'une certaine équation aux dérivés partielles non linéaire.* (Extras din *Rendinconti della reale Accademia nazionale dei Lincei).* Roma 1933.

M. Ghermanesco. *Sur l'équation aux différences finies.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia nazionale dei Lincei)* Roma 1933.

N. G. Botea. *Sur les fonctions holomorphes.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris).* Paris 1933.

R. L. Moore. *Foundations of point set theory.* 1932. New York.

Acest volum face parte din Colecţia *«Colloquium publications»*, care apare sub supravegherea Societăţii matematice americane. Fiecare volum, acesta e al XIII-lea, e punerea la punct, cu toate desvoltările necesare, a unei

părţi interesante şi de actualitate din domeniul matematicelor superioare, făcută de o persoană competentă.

Volumul de faţă cuprinde fundamentele teoriei mulţimilor, pe care se intemeiază intreaga matematică actuală. Metoda expunerii este cea axiomatică, dar, spre deosebire de alte publicaţii, autorul procedează gradat. La fiecare grup de axiome se dau cât mai multe aplicaţii, inainte de a se trece la alt grup.

Aşa de exemplu, în Cap. I se dau consecinţele şi aplicaţiile axiomelor 0 şi 1. Şi nu sunt puţine. In acest capitol se stabilesc cu ajutorul celor două axiome 121 teoreme.

La fel în Cap. II se dau aplicaţiile şi consecinţele axiomelor 1 şi 2, în Cap. III ale axiomelor 1, 2, 3 şi 4, şi aşa mai departe. Sunt în total şapte capitole.

Toate chestiunile fundamentale din teoria mulţimilor sunt atinse în această expunere largă, care se termină cu o intinsă bibliografie.

Expunerea, fără să se citească prea uşor în toate părţile, e clară şi o recomand mai ales tinerilor care vor să se iniţieze în acest domeniu al matematicei moderne.

G. Ţ.

J. F. Ritt. *Differential equations from the algebraic standpoint.* 1932. New-York.

Şi acest volum face parte din colecţia *«Colloquium publications»*, e a XIV-lea volum.

Autorul se ocupă de sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare sau cu derivate parţiale, care sunt algebrice în raport cu necunoscutele şi cu derivatele lor.

Problema fundamentală pe care o studiază autorul, cu toate mijloacele pe care i le dă Algebra actuală, este problema sistemelor reductibile sau ireductibile într'un câmp dat. De exemplu ecuaţia:

$$(1) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0$$

este reductibilă în câmpul tuturor constantelor şi este echivalentă cu următoarele două sisteme;

$$(2) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

şi

$$(3) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2 = 0$$

amândouă ireductibile.

Cercetările, care aparţin în mare parte autorului, ating astfel în acelaş timp teoria ecuaţiilor diferenţiale şi parţiale cele mai înalte şi mai noi ale Algebrei.

Expunerea e bine făcută şi sforţările cerute pentru citirea ei sunt răsplătite de cunoaşterea şi de rezultate interesante şi de metode fecunde.

G. Ţ.

K. H. STONE. *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, New York, 1932.

Acesta e al XV-lea volum din colecţia americană *«Colloquium publications»*.

Noţiunea de spaţiu a căpătat în Analiză o extindere neaşteptată. Nu se consideră numai spaţii cu un număr oarecare finit de dimensiuni, cu 3, cu 4, cu 5 etc. dimensiuni, dar şi spaţii cu un număr infinit de dimensiuni, spaţii funcţionale. Pentru aceste spaţii, definite în chip potrivit, se pot studia proprietăţi metrice sau proprietăţi proiective.

Volumul de faţă studiază spaţiile lui HILBERT, care au o infinitate numerabilă de dimensiuni şi au proprietăţi caracteristice pe care nu le putem desvolta aici. Proprietăţile acestor spaţii şi aplicaţiile lor sunt numeroase şi de cel mai mare interes. În rândul întâi sunt aplicaţiile la ecuaţiile integrale, cuprinzând toate proprietăţile acestora. Vin apoi proprietăţile matricelor infinite, care s'au impus în teoriile cele mai noi ale fizicei moderne.

Volumul de faţă dă prin urmare un punct de vedere înalt de unde se pot privi şi stăpâni mai uşor multe din capitolele cele mai noi ale matematicei actuale.

G. Ţ.

CERERI

225. Aşi ruga *Redacţia Gazetei Matematice* să admită ca în *Tabla de materii* să fie alcătuită şi rubrica *„Cereri"* după aceleaşi norme ca şi Problemele rezolvate, indicând chestiunile la care nu s'a publicat încă răspunsul, cu începere dela No. 1. Aceasta ar ispiti pe mulţi să caute răspunsuri dacă ştiu că ele n'au fost încă date şi că deci cercetarea nu e inutilă.

P. SERGESCU.

Această dorinţă va fi satisfăcută anul acesta. D-l GH. GHEORGHIU a şi întocmit o tabelă în acest sens.

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de ştiinţe, Secţiunea matematică a ţinut şedinţă în seara zilei de 12 Iunie. D-nii FOCŞA, NICULESCU şi STAMATESCU au prezentat un referat de matematici elementare şi de pedagogie matematică; D-l G. SUDAN a făcut o comunicare despre ideale şi D-l GH. TH. GHEORGHIU, asupra unui mod de introducere al funcţiunilor metasferice.

La Cambridge în anul 1934, în zilele de 3 — 9 Iulie se va ţine un Congres de Mecanică Aplicată. Doritorii de a participa la acest Congres se vor adresa la: „The Secretary, 4-th International Congress for Aplied Mechanics, Engineering Laboratory, Cambridge, England. Taxa de înscriere este de 15 şilingi.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4071. *Si l'on ajoute le nombre 117 au quadruple du reste de la racine cubique entière à unité près, du produit de six entiers conséqutifs, on obtient un carré.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l ŞTEFAN E. OLTEANU. (Elev inginer).

Fie:

$$P = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5).$$

Inmulţind factorii egali depărtaţi de extremi găsim:

$$P = (x^2+5x)(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) =$$

$$\therefore \quad P = [(x^2+5x+3)-3][(x^2+5x+3)+1] \times$$

$$[(x^2+5x+3)+3] =$$

$$\therefore \quad P = (x^2+5x+3)^3 + (x^2+5x+3)^2 - 9(x^2+5x+3) - 9.$$

De aci se vede că (x^2+5x+3) e rădăcină cubică a lui P, şi că restul R este:

$$R = (x^2+5x+3)^2 - 9(x^2+5x+3) - 9.$$

Formăm după enunţ expresiunea $(4R+117)$ şi găsim:

$$4R+117 = 4(x^2+5x+3)^2 - 36(x^2+5x+3) + 81$$

$$= [2(x^2+5x+3)-9]^2,$$

$$\therefore \quad 4R+117 = (2x^2+10x-3)^2,$$

ceeace erea de arătat.

Notă. Soluţia este justă din punct de vedere algebric. Din punct de vedere aritmetic cere oarecare examinare. Mai intâi restul R trebuie să fie pozitiv sau nul, adică:

$$(x^2+5x+3)^2 - 9(x^2+5x+3) - 9 \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad (x^2+5x+3)(x^2+5x-6) - 9 \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad (x-1)(x+6)(x^2+5x+3) \geqslant 0.$$

Se vede că pentru $x = 1$ neegalitatea nu este satisfăcută. Pentru a se verifica propietatea, trebuie luată rădăcina produsului 1. 2. 3. 4. 5 .6 prin spor şi considerat ca rest — 9. Ea nu se verifică în sens strict aritmetic. Pentru $x > 1$ neegalitatea este satisfăcută.

A doua condiţiune pe care trebuie să o îndeplinească R este ca el să fie mai mic ca suma întreitului patratului rădăcinii, întreitului rădăcinii şi 1, adică să avem:

$$(x^2-5x+3)^2-9\ x^2+5x+3\ -9<3(x^2+5x+3)^2+3(x^2+5x+3)+1,$$

$$0<2(x^2+5x+3)^2+12(x^2+5x+3,+10,$$

care e evident satisfăcută pentru valorile întregi pozitive ale lui x.

Reiese dar că aritmeticeşte propietatea nu este valabilă de cât pentru produse de şase numere, mai mari toate decât 1.

I. I.

PROBLEMA 4086. *Să se determine* a, b, c *astfel ca polinomul*

$$(m-2)x^m+ax^{m-1}+bx+c\ ^1)$$

să fie divizibil cu $(x-1)^3$. *Fie* $P(x)$ *polinomul găsit. Se cere câtul lui* $P(x)$ *prin* $(x-1)^3$.

Să se găsească numărul rădăcinilor reale ale acestui cât.

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema cum a fost propusă D-nii: IOAN CURCHI, GEORGE ŞT. ROŞCA.

Soluţie. Presupunând *a, b, c* determinaţi putem scrie:

$$P(x)=(m-2)x^m+ax^{m-1}+bx+c.$$

Din faptul că $P(x)$ este divizibil prin $(x-1)^3$ rezultă o primă condiţie

$$P(1)=m-2+a+b+c=0.$$

Această egalitate ne permite, să eliminăm pe c din $P(x)$ şi să scriem.

$$P(x)=(m-2)(x^m-1)+a(x^{m-1}-1)+b(x-1).$$

---

1) In enunţ din eroare s'a publicat ax^{m-2} în loc de ax^{m-1}.

Sau încă punând pe $x-1$ în factor

$$P(x) = (x-1)\,P_1(x)$$

şi notând

$$P_1(x) = (m-2)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) + a(x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x + 1) + b.$$

Dar $P_1(x)$ trebue să se dividă cu $(x-1)^2$ şi deci avem egalitatea:

$$P_1(1) = m(m-2) + a(m-1) + b = 0.$$

Procedând ca în cazul lui $P(x)$ putem scrie, eliminând pe b

$$P_1(x) = (m-2)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1 - m) + a(x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x + 2 - m).$$

Dând pe $x-1$ în factor obţinem egalitatea:

$$P_1(x) = (x-1)\,P_2(x),$$

câtul $P_2(x)$ fiind, după cum se vede lesne,

$$P_2(x) = (m-2)\sum_{p=0}^{m-2}(p+1)x^{m-2-p} + a\sum_{p=0}^{m-3}(p+1)\,x^{m-3-p}.$$

Polinomul $P_2(x)$ la rândul lui se divide prin $x-1$, de unde rezultă condiţia:

$$P_2(1) = (m-2)\frac{m(m-1)}{2} + a\frac{(m-1)(m-2)}{2} = 0$$

$$\therefore \qquad a = -m.$$

Înlocuind pe a prin valoarea găsită în polinomul $P_2(x)$, avem:

$$P_2(x) = \sum_{p=0}^{m-2}(m-2-2p)\,x^{m-2-p}.$$

Polinomul $P_2(x)$ este un polinom reciproc căci coeficienţii termenilor egali depărtaţi de extremi, sunt egali şi de semne contrare.

Se găseşte cu uşurinţă legea de formare a câtului $Q(x)$ a lui $P_2(x)$ prin $x-1$

$$(1) \qquad P_2(x) = (x-1)\,Q(x).$$

$$(2) \qquad Q(x) = \sum_{p=0}^{m-3}(m-2-p)(p+1)\,x^{m-3-p}.$$

Am găsit astfel polinomul $P(x)$ precum şi câtul lui prin $(x-1)^3$.

In mersul operaţiilor am determinat pe a, iar din identitatea (1) deducem ţinând seamă de valoarea lui $Q(x)$ dată de identitatea (2).

$$b = m \quad , \quad c = -m + 2,$$

prin urmare avem:

$$P(x) = (m-2)\,x^m - mx^{m-1} + mx - (m-2).$$

Corespondenţii noştri au scris condiţiile de divizibilitate prin $(x-1)^3$ cu ajutorul derivatelor. Aici s'a evitat întrebuinţarea noţiunii de derivată. In fond cele două metode sunt aceleaşi.

Să determinăm acuma numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$P(x) = 0 \tag{3}$$

din care evident rezultă acela a ecuaţiei:

$$Q(x) = 0. \tag{4}$$

Din teorema lui DESCARTES rezultă că prima ecuaţie are cel puţin atâtea rădăcini imaginare câte rădăcini imaginare are ecuaţia

$$-mx^{m-1} + mx = 0$$

sau încă

$$x^{m-2} - 1 = 0.$$

Avem două cazuri:

1°. m par, ecuaţia binomă are $m-4$ rădăcini imaginare.

2°. m impar, ecuaţia binomă are $m-3$ rădăcini imaginare.

Rezultă dar că ecuaţia (3) pentru m par are $m-4$ rădăcini imaginare, căci are pe 1 ca rădăcină triplă şi pe -1 ca simplă; pentru m impar are $m-3$ rădăcini imaginare căci are pe 1 ca rădăcină triplă.

Prin urmare ecuaţia (4) are pentru m par, rădăcina -1 şi celelalte $m-4$ rădăcini sunt imaginare; pentru m impar are toate rădăcinile imaginare.

Observare. Ecuaţia are toate rădăcinile situate în cercul cu centru în origină şi cu raza 2. In adevăr din egalitatea

$$|\,(m-2)\,x^m\,| = |\,m\,x^{m-1} - mx + (m-2)\,|$$

deducem că modulele rădăcinilor ecuației (3) satisfac inegalitatea:

$$(m-2)r^m - m\,r^{m-1} - m\,r - (m-2) \leqq 0$$

unde s'a pus

$$|\,x\,| = r.$$

Prin urmare rădăcinile ecuației (3) sunt situate în cercul cu centru în origina și cu raza ρ, rădăcina pozitivă a ecuației:

$$(m-2)\rho^m - m\,\rho^{m-1} - m\,\rho - (m-2) = 0.$$

Dar pentru $m=3$ și $m=4$ modulele rădăcinilor ecuației (3) sunt egale cu 1. Iar pentru $m \geqq 5$ avem inegalitatea:

$$(m-2)\,2^m - m\,2^{m-1} - 2\,m - (m-2) > 2$$

sau încă:

$$m\,(2^{m-1} - 3) > 2^{m+1} - 2,$$

care rezultă din egalitatea:

$$5\,(2^{m-1} - 3) > 2^{m+1} - 1$$

$$\therefore \qquad 2^{m-1} > 13.$$

---

*PROBLEMA 4133. *Să se găsească două numere întregi* A *și* B *în următoarele cazuri:*

a) Când diferența lor este egală cu m *ori câtul lor;*

b) Când diferența patratelor lor este egală cu n *ori patratul câtului lor.*

In ambele cazuri m *și* n *sunt întregi.*

Aplicație pentru m = 9 *sau* n = 3.

IOAN CURCHI.

I. Să tratăm problema pusă sub forma:

$$A^n - B^n = m\,\frac{A^n}{B^n} \qquad (1)$$

și să presupunem că A și B nu se divid unul cu altul adică să cercetăm cazul cel mai general. Punem ca de obicei: A = MD și B = ND

unde D este cel mai mare comun divizor al numerelor A şi B. Egalitatea (1) se va scrie:

$$D^n (M^n - N^n) = m \frac{M^n}{N^n} \qquad (2)$$

şi pentru a avea şi membrul al doilea întreg şi cum M este prim cu N nu rămâne decât ca N^n să fie un divizor al lui m.

Vom pune deci: $m = KN^n$ şi atunci (2) se scrie:

$$D^n (M^n - N^n) = KM^n$$

$$\therefore \quad M^n (D^n - K) = D^n N^n$$

$$\therefore \quad M^n = N^n \frac{D^n}{D^n - K} .$$

Dacă $D^n - K$ ar fi un divizor al lui D^n egalitatea de mai sus ne spune că M şi N sunt divizibili unul cu altul, contrar ipotezei. Atunci $D^n - K$ este neapărat un divizor al lui N^n.

Să punem deci: $N^n = p^n (D^n - K)$ ceeace ne permite a scrie egalitatea (3) în ultima ei formă:

$$M^n = p^n D^n \quad \text{sau} \quad M = pD.$$

Soluţiunile generale ale problemei sunt:

$$A = MD \; ; \; B = ND \; ; \; M = pD \; ; \; N = p \sqrt[n]{D^n - K} \; ; \; m = Kp^n (D^n - K)$$

sau:

$$A = pD^2 \; ; \; B = pD \sqrt[n]{D^n - K} \; ; \; m = Kp^n (D^n - K).$$

Să trecem acum la aplicaţiunile cerute de problemă.

— *Cazul (a) , $m = 9$, când avem şi $n = 1$.*

Găsim pe: K, p şi D rezolvând în numere întregi ecuaţia:

$$Kp (D - K) = 9$$

care este verificată de valorile:

$K = 1$,	$p = 1$,	$D = 10$	dând soluţiile	$A = 100$, $B = 90$
$K = 1$,	$p = 3$,	$D = 4$	» »	$A = 48$, $B = 36$
$K = 1$,	$p = 9$,	$D = 2$	» »	$A = 36$, $B = 18$
$K = 3$,	$p = 1$,	$D = 6$	» »	$A = 36$, $B = 18$
$K = 3$,	$p = 3$,	$D = 4$	» »	$A = 48$, $B = 12$
$K = 9$,	$p = 1$,	$D = 10$	» »	$A = 100$, $B = 10$

adică cinci soluţiuni distincte.

Cazul (b) , $m = 3$, când avem şi $n = 2$.

Găsim aceleaşi elemente, rezolvând în numere întregi ecuaţia:

$$Kp^2 (D^2 - K) = 3$$

care este verificată de valorile:

$K = 1$, $p = 1$, $D = 2$ dând soluţiile $A = 4$, $B = 2\sqrt{3}$

$K = 1$, $p = \sqrt{3}$, $D = \sqrt{2}$ » » $A = 2\sqrt{3}$, $B = \sqrt{6}$

$K = 3$, $p = 1$, $D = 2$ » » $A = 4$, $B = 2$

dintre cari numai $A = 4$, $B = 2$, sunt numere întregi şi raţionale. Se observă cu această ocazie că putem lua $\pm A$ şi $\pm B$ făcând să corespundă semnele de câte ori avem n par.

Dacă s'ar fi tratat problema neocupându-ne de m şi scriind numai: $A = BK$, ajungem la soluţiile generale:

$$A = rK^2 \; ; \; B = rK \; ; \; m = r^n (K^n - 1)$$

cari precum se poate verifica, nu dau decât trei din soluţiile găsite şi anume: $A = 100$; 48 ; 36 la cari corespund respectiv: $B = 10$; 12 ; 18.

II. Putem avea încă cazul:

$$A^n - B^n = m \frac{B^n}{A^n} \qquad (3)$$

ale cărei soluţiuni generale, urmând acelaşi procedeu ca la (1) şi în cazul $A > B$ sunt:

$$A = pD \sqrt[n]{D^n + K} \; , \; B = pD^2 \; , \; m = Kp^n (K + D^n).$$

Trecând şi aci la aplicaţii avem:

— *Cazul (a) , $m = 9$ şi $n = 1$.*

Rezolvim în numere întregi ecuaţia:

$$Kp (K + D) = 9$$

şi obţinem valorile:

$K = 1$, $p = 1$, $D = 8$ dând soluţia $A = 72$; $B = 64$

$K = 1$, $p = 3$, $D = 2$ » » $A = 18$; $B = 12$

$K = 1$, $p = 9$, $D = 0$ » » nedeterminare

$K = 3$, $p = 1$, $D = 0$ » » nedeterminare.

Cazul (b) , $m = 3$, $n = 2$.

Rezolvim ecuația :

$$Kp^2 (K + D^2) = 3$$

care e verificată de :

$K=1, p=1$, $D = \pm\sqrt{2}$ dând soluția $A = \pm\sqrt{6}$ $B=2$

$K=1, p=\sqrt[4]{3}, D=\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}$ » » $A=\pm\sqrt{3\sqrt{3}-3}B=\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-1)$

$K=1, p=\sqrt{3}, D=0$ » » nedeterminare

$K=\sqrt{3}$, $p=1, D=0$ » » nedeterminare

adică nu se obțin soluții întregi și raționale.

Să analizăm acum același caz dar să presupunem $A < B$.

Urmând aceiași medodă și păstrând notațiile ajungem la :

$$D^n M^n = N^n (K + D^n).$$

Dar pentru că $A < B$, vom avea și $M^n < N^n$. Cum $D^n < K+D^n$ urmează că egalitatea de mai sus nu poate să existe. Problema nu are deci soluțiuni pentru $0 < A < B$ și în cazul (II) pe care îl tratăm acum.

Să presupunem deci $A < 0$. Dacă n este par atunci dăm peste unul din cazurile studiate. Vom considera deci pe n impar. Egalitatea (3) devine :

$$-A^n - B^n = m\frac{B^n}{-A^n} \qquad (4)$$

și sub această formă vom verifica soluțiunile ce vom găsi. Ele sunt :

$$A = pD\sqrt[n]{K - D^n} \; ; \; B = pD^2 \; ; \; m = Kp^n (K - D^n)$$

și trecând la aplicații, numai pentru $m = 9$, căci în cazul $m = 3$ avem $n = 2$, adică par, ori aci studiem un caz unde n a trebuit să fie impar, avem :

$$Kp (K - D) = 9$$

care pentru K , p , D întregi și pozitive aduce soluțiile noui.

$K = 3$, $p = 3$, $D = 2$ $\quad A = 6$, $B = 12$

$K = 9$, $p = 1$, $D = 8$ $\quad A = 8$, $B = 64$.

Pentru a verifica aceste soluțiuni introducem în (4) valorile de mai sus și avem:

$$-6-12=9\frac{12}{-6} \quad ; \quad -8-64=9\frac{64}{-8}$$

și cu acestea presupunem problema rezolvată.

Au deslegat problema 4133, așa cum a fost enunțată, găsind soluțiunile ce se arată în dreptul fiecăruia D-nii:

N. N. Aldea (st. mat. Buc.): 3 soluții din cele 5 ale cazului *(a)* de sub I, apoi soluția numere întregi a cazului *(b)* de sub I, observând că se pot lua ambele semne $\pm$ și este singurul care a dat cele două soluțiuni corespunzătoare lui $A<0$.

C. Ivănescu (bacalaureat Bârlad): este singurul care a dat cele 5 soluții dela (I, *a*) și apoi soluția (I, *b*) cu remarca semnelor.

Marius Margulius (Lic. Sp. Haret, Buc.), George St. Roșca (Craiova) și Iancu N. Sager (Focșani) au dat 3 soluții (I, *a*) și soluția (I, *b*) fără remarca semnelor.

Em. Mereuță (st. Buc.) cu soluțiile:

$$A = 36\ ;\ 48\ ;\ 100 \qquad A = \pm 4\ ;\ \mp 4$$

și

$$B = 18\ ;\ 12\ ;\ 10 \qquad B = \pm 2\ ;\ \pm 2$$

Nici un corespondent nu a dat soluțiunile (II, *a*) și (II, *b*) ale formei (3).

Cpt. Gh. N.

---

*PROBLEMA 4164. *Se consideră în același plan două triunghiuri* ABC, A'B'C' *și un punct* M.

1°. *Dacă dreptele* AM, BM, CM *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului* A'B'C' *în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci și dreptele* A'M, B'M, C'M *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului* ABC *în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.*

2°. *Dacă perpendicularele coborâte din* M *pe* AM, BM, CM *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului* A'B'C' *în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci și perpendicularele coborâte din* M *pe* A'M, B'M, C'M *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului* ABC *în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.*

3°. *Să se dea cazuri particulare remarcabile.*

N. Botea.

1°. *Generalizare.* ABC, A'B'C' şi M fiind datele problemei, dacă trei drepte duse prin M şi înclinate de acelaş unghiu φ şi în acelaş sens, respectiv pe AM, BM, CM, taie laturile triunghiului A'B'C' în trei puncte α', β', γ', colineare sau picioare a trei ceviene concurente, atunci şi dreptele $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, ce fac cu A'M, B'M, C'M unghiul $(\pi - \varphi)$, taie laturile triunghiului ABC în trei puncte α, β, γ, colineare sau picioare a trei ceviene concurente.

Proprietatea rezultă din faptul că punctele α, β, γ, situate pe laturile triunghiului ABC, în cazul general, satisfac relaţia:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B}} = 1,$$

α', β', γ' fiind puncte situate oricum pe laturile triunghiului ABC, dar obţinute în urma construcţiilor indicate.

Avem în adevăr:

$$\frac{\alpha' B'}{\alpha' C'} = \frac{B'M}{C'M} \cdot \frac{\sin(\alpha' MB')}{\sin(\alpha' MC')}$$

şi analoagele; de unde:

$$\frac{\alpha' B'}{\alpha' C'} \cdot \frac{\beta' C'}{\beta A'} \cdot \frac{\gamma' A'}{\gamma' B'} = \frac{\sin(\alpha' MB')}{\sin(\alpha' MC')} \cdot \frac{\sin(\beta' MC')}{\sin(\beta' MA')} \cdot \frac{\sin(\gamma' MA')}{\sin(\gamma' MB')}$$

însă

$$\sphericalangle\, \alpha' MB' = \sphericalangle\, AM\beta \;;\; \sphericalangle\, 'MC'\alpha = \sphericalangle\, AM\gamma \text{ etc.}$$

Pe de altă parte punctele α, β, γ satisfac relaţiei:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\sin(\alpha MB)}{\sin(\alpha MC)} \cdot \frac{\sin(\beta MC)}{\sin(\beta MA)} \cdot \frac{\sin(\gamma MA)}{\sin(\gamma MB)}$$

şi proprietatea este astfel învederată în cezul general.

Teoremele lui CEVA şi ale lui MENELAUS ne arată că dacă α, β, γ sunt colineare sau picioare a trei ceviene concurente pe laturile lui ABC atunci şi punctele α', β', γ' sunt în linie dreaptă sau sunt picioarele a trei ceviene concurente pe laturile lui A'B'C'.

Dacă $\varphi = 0^0$ sau $\varphi = 90^0$ se obţine problema 4164.

Problema se poate generaliza şi mai larg în felul următor:

Fie în plan două poligoane de acelaş număr de laturi T, T' şi M un punct în planul lor. Fascicolul de drepte cu vârful în M şi făcând cu dreptele ce unesc pe M cu vârfurile lui T, unghiuri

egale cu φ, împarte laturile corespunzătoare ale poligonului T' în rapoarte ale căror produs luat în acelaș sens este egal cu inversul rapoartelor ce le determină pe laturile poligonului T fascicolul cu vârful în M, ale cărui raze fac unghiul $(\pi - \varphi)$ cu dreptele ce unesc pe M cu vârfurile lui T'.

N. N. MIHĂILEANU.

2°. *Generalizare.* Amintim mai întâi un rezultat cunoscut. Fie un sistem de axe perpendiculare în plan. Să considerăm două puncte $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$ și o dreaptă de ecuație $Ax+By+C=0$. Această dreaptă întâlnește dreapta PQ în punctul R, astfel ca:

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{Ax_p + By_p + C}{Ax_q + By_q + C}.$$

Să luăm punctul M ca origină a axelor considerate și să notăm cu (x_i, y_i) coordonatele vârfurilor A, B, C și cu (x'_i, y'_i) coordonatele vârfurilor A', B', C' $(i = 1, 2, 3)$.

Fie deasemenea $K = \operatorname{tg}\varphi$. Dreptele duse prin M și înclinate de același unghiu φ, în același sens, pe AM, BM, CM, taie laturile triunghiului A'B'C' în α', β', γ' și fie α, β, γ punctele analoage cu α', β', γ' ce se obțin schimbând între ele triunghiurile ABC, A'B'C' și înlocuind pe φ cu $(\pi - \varphi)$.

Ecuația dreptei MA este:

$$y = \frac{y_1}{x_1} x.$$

Ecuația dreptei $M\alpha'$ va fi:

$$y = \frac{y_1 - Kx_1}{x_1 + Ky_1} x$$

sau

$$(Ky_1 + x_1)\, y + (Kx_1 - y_1)\, x = 0$$

și conform celor spuse la început, vom avea:

$$\frac{\alpha'B'}{\alpha'C'} = \frac{K(x_1x'_2 + y_1y'_2) + x_1y'_2 - y_1x'_2}{K(x_1x'_3 + y_1y'_3) + x_1y'_3 - y_1x_3}$$

și prin permutări circulare deducem:

$$\frac{\beta'C'}{\beta'A'} = \frac{K(x_2x'_3 + y_2v'_3) + x_2v'_3 - y_2x'_3}{K(x_2x'_1 + y_2y'_1) + x_2y'_1 - y_2x'_1};$$

$$\frac{\gamma'A'}{\gamma'B'} = \frac{K(x_3x'_1 + y_3v'_1) + x_3v'_1 - v_3x'_1}{K(x_3x'_2 + y_3y'_2) + x_3y'_2 - y_3x'_2}.$$

Schimbând în aceste relații cantitățile (x_i, y_i), (x'_i, y'_i) între ele și înlocuind pe K cu $-K$ obținem relațiile:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{K(x_2x'_1 + y_2y'_1) + x_2y'_1 - y_2x'_1}{K(x_3x'_1 + y_3y'_1) + x_3y'_1 - y_3x'_1};$$

$$\frac{\beta C}{\beta A} = \frac{K(x_3x'_2 + y_3y'_2) + x_3y'_2 - y_3x'_2}{K(x_1x'_2 + y_1y'_2) + x_1y'_2 - y_1x'_2};$$

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{K(x_1x'_3 + y_1y'_3) + x_1y'_3 - y_1x'_3}{K(x_2x'_3 + y_2y'_3) + x_2y'_3 - y_2x'_3}.$$

Se verifică imediat relația:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha' B'}{\alpha' C'} \cdot \frac{\beta' C'}{\beta' A'} \cdot \frac{\gamma' A'}{\gamma' B'} = 1.$$

In spațiu problema se poate generaliza astfel:

Să considerăm două triunghiuri ABC, A'B C absolut oarecare, o dreaptă Δ și un punct M.

a) Dacă planele $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ce trec prin dreapta Δ și fac cu planele (A, Δ), (B, Δ), (C, Δ) același unghiu φ întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului A'B'C' în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci și planele $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ ce trec prin dreapta Δ și fac cu planele (A', Δ), (B', Δ), (C', Δ) unghiuri egale cu $(\pi - \varphi)$ întâlnesc laturile lui ABC în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.

Demonstrația se face imediat folosind rezultatele găsite pentru plan și proprietățile proiecțiunei.

E suficient să considerăm un plan perpendicular pe Δ, ce întâlnește pe Δ în ω. Se proiectează apoi cele două triunghiuri pe planul considerat.

b) Dacă planele ridicate în M perpendicular pe AM, BM, CM taie laturile corespunzătoare ale triunghiului A'B'C' în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci și planele ridicate în M perpendicular pe A'M, B'M, C'M întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.

Pentru a demonstra această proprietate să luăm punctul M ca origină a trei axe perpendiculare. Ecuația planului dus în M, perpendicular pe AM este:

$$x_1x + y_1y + z_1z = 0.$$

Acest plan este înțepat de latura B'C' în punctul α'_1, astfel că:

$$\frac{\alpha'_1 B'}{\alpha'_1 C'} = \frac{x_1 x'_2 + y_1 y'_2 + z_1 z'_2}{x_1 x'_3 + y_1 y'_3 + z_1 z'_3}.$$

Mai departe calculele se fac exact ca în problema corespunzătoare de Geometrie plană și concluziile sunt analoage; singura deosebire e că avem o variabilă z în plus.

3°. Să examinăm câteva cazuri particulare:

a) Trecând punctul M la infinit, din primul punct al problemei 4164, deducem proprietatea:

Se dau două triunghiuri ABC, A'B'C' în același plan. Dacă paralelele duse prin vârfurile unuia din ele cu o direcție dată întâlnesc laturile corespunzătoare ale celuilalt în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci și paralelele duse prin vârfurile celuilalt triunghiu, cu aceiași direcție, întâlnesc laturile primului în trei puncte colineare, sau în picioarele a trei ceviene concurente.

b) Se poate enunța o proprietate analoagă pentru spațiu, trecând dreapta Δ la infinit.

c) Se consideră un triunghiu oarecare ABC și unul A'B'C', înscris în el și omologic cu el, iar M un punct oarecare în planul lor. Dreptele AM, BM, CM întâlnesc laturile B'C', C'A', A'B' în picioarele a trei ceviene concurente (L. Hamburger. G. M. XXII. p. 187).

In adevăr, dreptele A'M, B'M, C'M întâlnesc pe BC, CA, AB chiar în A', B', C', cari sunt prin ipoteză picioarele a trei ceviene concurente în triunghiul ABC.

Cezar Coșniță.

d) M fiind un punct în planul triunghiului ABC, perpendicularele în N pe cevienele AM, BM, CM întâlnesc laturile triunghiului podar A'B'C' al lui M în trei puncte colineare.

In adevăr perpendicularele în M pe A'M, B'M, C'M întâlnesc laturile triunghiului de referințe în trei puncte situate pe dreapta dela infinit și suntem în cazul 2° al problemei 4164.

e) Fiind dat un punct N în planul triunghiului ABC, triunghiul pedal al lui N față de triunghiul podar al unui punct M în raport

cu ABC, este omologic cu ABC, când M descrie cubica lui DARBOUX a lui ABC. (N. BOTEA. *Curierul Matematic.* 1927. III. p. 137).

N. N. MIHĂILEANU.

f) Transformând prin polare reciproce prima proprietate a problemei propuse, obținem:

Se consideră două triunghiuri oarecare ABC, A'B'C' în același plan. O dreaptă situată în planul lor taie laturile primului în α, β, γ respectiv, iar pe ale celuilalt în α', β', γ' respectiv. Dacă dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sunt concurente sau determină pe laturile B'C', C'A', A'B' trei puncte colineare, atunci și dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$ $C\gamma'$ sunt concurente sau determină pe laturile BC, CA, AB trei puncte colineare.

In particular trecând dreapta dată la infinit avem teorema triunghiurilor metaparalele (Culegere de probleme de Geometrie de D-l ȚIȚEICA XI pr. 45).

g) Transformând prin polare reciproce proprietatea a doua a problemei propuse, punctul M fiind ales drept centru al cercului director, obținem teorema triunghiurilor ortologice (C. d. p. G. IX. 24).

CEZAR COȘNIȚĂ.

Observațiuni. 1°. O parte a primului punct al problemei 4164 era cunoscut și se află publicată în prob. 51 din C. d. p. G. cap. XII, cu următorul enunț:

Se consideră în același plan două triunghiuri ABC, A'B'C' și un punct M. Dacă dreptele MA' MB' MC' întâlnesc laturile BC, CA, AB în punctele α, β, γ în linie dreaptă, atunci și dreptele MA, MB, MC întâlnesc respectiv dreptele B'C', C'A', A'B' în punctele α', β', γ' în linie dreaptă.

Această proprietate se mai află publicată în exercițiul 32 din *Mathesis* 1932 p. 408. Asupra acestui exercițiu revine D-l MINEUR în articolul *Exercices de Géométrie projective* din *Mathesis* 1933 p. 121.

2°. Generalizarea D-lui N. MIHĂILEANU pentru două poligoane plane se poate extinde în spațiu pentru două poligoane strâmbe, de același număr de laturi, cum a făcut D-l COȘNIȚĂ pentru triunghiuri.

3°. Iată o soluție geometrică a următoarei proprietăți particulare:

ABC și A'B'C' fiind triunghiuri coplanare și M un punct în planul lor dreptele ce trec prin M și sunt înclinate de unghiul φ pe cevienele lui M în ABC întâlnesc laturile lui A'B'C' în α', β', γ' iar dreptele ce trec prin M și sunt înclinate de unghiu $(\pi - \varphi)$ pe cevienele lui M în triunghiul A'B'C' întâlnesc laturile lui ABC în α, β, γ. Dacă punctele α', β', γ' sunt colineare, atunci și punctele α, β, γ sunt colineare.

Vom folosi o cunoscută teoremă a lui DESARGUES (C. d. p. G. XIII. pr 24). Triunghiul A'B'C' şi dreapta $\alpha'\beta'\gamma'$ formează un patrulater complet. Perechile de drepte (Mα', MA'), (Mβ', MB'), (Mγ', MC') sunt raze omoloage într'un fascicol în involuţie. Fascicolul M (A, α, B, β, C, γ) se obţine din fascicolul M (α', A', β', B', γ', C') printr'o rotaţie de unghiu $(\pi - \varphi)$. Deci perechile de drepte (Mα, MA), (Mβ, MB), (Mγ, MC) sunt raze omoloage într'un fascicol în involuţie, şi conform reciprocei teoremei lui DESARGUES, punctele α, β, γ sunt colineare.

4°. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca trei perechi de puncte (a, a'), (b, b'), (c, c') situate pe aceiaşi dreaptă să fie în involuţie este dată de relaţia :

$$\frac{ab'}{ac'} \cdot \frac{bc'}{ba'} \cdot \frac{ca'}{cb'} = 1.$$

(A se vedea de ex. Ex. de Géométrie moderne par G. PAPELIER VIII. p. 37).

Dacă se consideră punctele colineare a', b', c' ca vârfurile unui triunghiu deformat, punctele a, b, c pot fi considerate (după teorema lui MENELAUS) ca trei puncte colineare pe laturile lui $a'b'c'$.

Vom avea proprietatea :

Se consideră în acelaş plan un triunghiu ABC, *un punct* M *şi o dreaptă* Δ, *care este suportul unei diviziuni în involuţie. Dreptele duse prin* M, *înclinate de acelaş unghiu* φ *pe dreptele* MA, MB, MC *întâlnesc pe* Δ *în punctele* A_1, B_1, C_1. *Se construesc conjugatele* A'_1, B'_1, C'_1, *ale punctelor* A_1, B_1, C *în involuţia aflată pe* Δ. *Dreptele duse prin* M *şi înclinate de unghiu* $(\pi - \varphi)$ *pe dreptele* MA'_1, MB'_1, MC'_1 *întâlnesc laturile lui* ABC *în trei puncte colineare.*

In particular dacă $\varphi = 0$ şi punctul M este la infinit se obţine (Wiskundige. Archiev voor Wiskunde. 1932 — 173) următoarea teoremă a D-lui J TUMMERS.

Fiind date în acelaş plan un triunghiu ABC şi o dreaptă Δ, care este suportul unei involuţii, se proiectează octogonal vârfurile A, B, C ale triunghiului în A_1, B_1, C_1 pe dreapta Δ şi se construesc conjugatele A'_1, B'_1, C'_1 ale punctelor A_1, B_1, C_1 în involuţia considerată pe Δ. Perpendicularele pe această dreaptă în A'_1, B'_1, C'_1 taie laturile BC, CA, AB ale triunghiului în punctele colineare A_2, B_2, C_2.

5°. Problema 4164 a mai fost publicată sub numărul 184 în *Curierul Matematic* II. 1926. p. 191. Ne-am permis de a o reproduce întrucât soluţia ni s'a părut interesantă şi nu a putut fi publicată, din cauza încetării apariţiei *Curierului.*

6°. După ce problema a fost redijată s'a mai primit o soluţiune dela D-l MARIUS MARGULIUS.

N. B.

*PROBLEMA 4188. *Să se găsească forma trigonometrică a condiţiunei de existenţă a triunghiului de laturi inverse triunghiului dat de laturi* $a > b > c$.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

Soluţie dată de D-nii: CEZAR IVĂNESCU (st. Iaşi) şi MARIUS MARGULIUS (Buc.). In *Gazeta Matematică,* Anul XXXVII, No. 7, s'a stabilit că se poate întotdeauna construi triunghiul de laturi inverse triunghiului dat de laturi $a > b > c$ dacă a, b şi c îndeplinesc condiţiunea:

$$c(a+b) > ab. \tag{1}$$

Pentru a avea o condiţiune trigonometrică în sensul de relaţie între unghiuri, ţinem seamă de formulele:

$$a = 2R \sin A \ , \ b = 2R \sin B \ , \ c = 2R \sin C$$

în baza cărora condiţiunea (1) se scrie:

$$\sin C (\sin A + \sin B) > \sin A \sin B$$

şi cum:

$$\sin A + \sin B = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

rezultă că vom avea:

$$2 \sin C \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} > \sin A \sin B. \tag{2}$$

Aceasta este forma trigonometrică a condiţiunei cerute în enunţ. Când ni se dau unghiurile unui triunghiu, vedem dacă ele verifică relaţia (2) şi în caz afirmativ ştim că se poate construi şi triunghiul de laturi inverse celui dat de unghiuri A, B şi C.

Scriind acum relaţia (1) sub forma:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$$

care prin acelaş fel de înlocuiri devine:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} > \frac{1}{\sin C}$$

ajungem la o altă formă trigonometrică a condiţiunei (1):

$$\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B > \operatorname{cosec} C,$$

sau:

$$\Sigma \operatorname{cosec} A > 2 \operatorname{cosec} C,$$

expresiune ce poate fi utilizată în anumite cazuri, cu mai mult folos.

CPT. GH. N.

PROBLEMA 4189. *Ecuația* $x^3 + 3x - a = 0$ *are cel mult o singură rădăcină de modul subunitar, oricare ar fi* a *real.*

P. SERGESCU.

Soluție dată de D-l I. ZARDA (Cluj).

Ecuația are o singură rădăcină reală x_1. In adevăr, dacă a e pozitiv, teorema lui DESCARTES arată că ea are cel mult o rădăcină pozitivă și niciuna negativă. Dacă a e negativ, ecuația are numai permanențe deci nicio rădăcină pozitivă; dar are una negativă. De altfel:

$$f(0) = -a\ ,\ f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$$

așa că rădăcina x_1 e cuprinsă între 0 și $\frac{a}{3}$. Rădăcinile imaginare x_2 și x_3 sunt conjugate și deci au același modul. Insă relațiile dintre coeficienți și rădăcini dau

$$x_1 x_2 x_3 = a.$$

Cum $|x_1| < \frac{(a)}{3}$, rezultă

$$|x_2 x_3| > 3$$
$$|x_2|^2 = |x_3|^2 > 3$$
$$|x_2| = |x_3| > \sqrt{3} > 1.$$

Prin urmare, cel mult rădăcina x_1 poate fi de modul subunitar. Proprietatea e stabilită.

Observare: Problema aceasta, ca și problema 4209 sunt cazuri particulare ale următoarei proprietăți generale: Ecuația $x^n + nx + a = 0$ are cel mult o rădăcină de modul subunitar, oricare ar fi a, real sau imaginar. Să se vadă nota D-lui P. SERGESCU: Quelques points de la théorie des équations algébriques în volumul Congresului dela Zürich 1932.

*EXERCIŢII

35. Expresiunea :

$$E = 7^{7n} + 5^{5n} + 2^{2n} - 1$$

se divide cu 3, când n este intreg şi $\geqslant 1$.

N. N. VELICESCU.

R. Intr'adevăr expresiunea dată se scrie succesiv :

$$E = (3.2+1)^{2k_1+1} + (3.2-1)^{2k_2+1} + (3-1)^{2k_3} - 1,$$

sau :

$$E = 3m_1 + 1 + 3m_2 - 1 + 3m_3 + 1 - 1 = 3(m_1 + m_2 + m_3),$$

adică E se divide cu 3.

36. Să se stabilească identitatea

$$n \cdot \frac{1}{n+2} + (n-1)\frac{2!}{(n+2)^2} + (n-2)\frac{3!}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{n!}{(n+2)^n} = 1 - \frac{(n+1)!}{(n+2)^n}$$

G. ŞT. ROŞCA.

R. Punem : $u^p = \dfrac{p!}{(n+2)^p}$ şi atunci avem

$$(n+2)\,u_1 = 1$$
$$(n+2)\,u_2 = 2u_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+2)\,u_n = nu_{n-1}$$

egalităţi care adunate, ne dau

$$nu_1 + (n-1)\,u_2 + \ldots + 2u_{n-1} + u_n = 1 - (n+1)\,u_n$$

şi care nu este altceva decât relaţia din enunţ.

37. Să se pună sub o formă iraţională remarcabilă ecuaţia :

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz - 6xz - 4xy = 0.$$

SUB.-LOC. IOAN C. SAVIN.

R. Putem scrie succesiv :

$$(x+2y)^2 - 6z\,(x+2y) + 9z^2 = 8xy$$
$$(x+2y-3z)^2 = 8xy.$$

Extrăgând rădăcina patrată avem :

$$x + 2y - 3z = \pm 2\sqrt{2xy}$$

sau

$$x + 2y \pm 2\sqrt{2xy} = 3z$$
$$(\sqrt{x} \pm \sqrt{2y})^2 = 3z$$
$$\sqrt{x} \pm \sqrt{2y} = \pm\sqrt{3z}$$

de unde în fine

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{2y} \pm \sqrt{3z} = 0.$$

PROBLEME PROPUSE

*4271. Când diferența bipatratelor a două numere se divide cu diferența cuburilor acelor numere?

I. Ionescu.

4272. Să se demonstreze că $c.m.m.d.c.$ al numerelor $a+b$ și ab este un multiplu al $c.m.m.d.c.$ al numerelor a și b.

Col. Gh. Buicliu.

*4273. Dacă într'un triunghiu a', b', c' sunt laturile triunghiului ortic, i_a, i_b, i_c distanțele dela ortocentru la vârfurile triunghiului, ω unghiul lui Brocard, celelalte notații fiind cele obișnuite, să se demonstreze relațiile:

(I) $$R\sum\frac{a.a'}{i_a}=2S\operatorname{cotg}\omega.$$

(II) $$\frac{\Sigma i_a b}{2p}=2R.$$

N. Th. Donciu.

*4274. Se dă triunghiul ABC și se cere să se construiască patru cercuri egale, dintre care unul tangent la celelalte trei iar acestea tangente la câte două laturi ale triunghiului.

V. Thébault.

*4275. Cunoscându-se poziția centrelor cercurilor înscris, circumscrise și razele lor, precum și poziția centrului de greutate, să se construiască triunghiul.

D. Arg. Dumitrescu.

*4276. Ecuația:

$$(\lambda^2-1)x^2-(2\alpha+\lambda-1)x-\alpha(\alpha-1)=0$$

în care :

$$\lambda \geqslant 0 \quad ; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

are totdeauna o rădăcină $0 \leqslant x' < 1$.

N. C.

4277. Să se rezolve inegalitatea :

$$I(n) < \sqrt{n},$$

unde I arată indicatorul lui n.

Ion B. Florescu.

*4278. Să se găsească locul unui punct egal luminat de două felinare fixe, de intensităţi diferite.

Cpt. I. Linteş.

4279. Să se demonstreze că :

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$$

. . . . . .

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

Gh. Vasiliu-Leoben.

4280. In un plan vertical se dă o dreaptă XY înclinată de un unghiu Θ pe horizontală şi un inel O situat deasupra lui XY. Un fir AOM trece prin inelul O şi are agăţat în M o sferă de masă m.

Se trage de extremitatea A dealungul horizontalei ce trece prin O aşa ca M să se deplaseze dealungul lui XY. Să se studieze mişcarea lui M.

A. Pârvu.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Anonim (4253); *Borza Al. N.* (4244, 53, 54); *Chiriac C.* (4168, 228, 38, 42, 59); *Cseke W.* (4244, 53, 61, 68); *Cristopol A. C.* (4253, P); *Dobrescu Paul* (4244); *Gheorghiu Ad.* (N); *Ivănescu C.* (4125, 35, 54, 56, 58, 59, 75, 223, 53, N, P); *Lencò Ion* (4165); *Mavrodin D.* (4129, 267, 68); *Mazilu C. Panait* (4196); *Rotaru D.* (4260); *Şabac Gh. I.* (4196, 229); *Sager N. I.* (4233, 50, 53, 60, 62, 63, 64, 65, 67, 68); *Stoica D. Al.* (4253, 61, 62, 63, 65, 67); *Ziff S. M.* (4129, 262, 67, 68).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugărei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVIII

NUMARUL 12. — AUGUST 1933

SUMARUL

1. Invățământul aritmeticii în liceele noastre (urmare dela pagina 412) . . . . . *I. Ionescu*
2. Asupra curbelor de gr. IV . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu*
3. Note matematice: 53 — 57
4. Bibliografie
5. Cereri
6. Diverse
7. Probleme rezolvate: 3918, 4057, 4077, 4116, 4143, 4193, 4209, 4212, 4231
8. Exerciții: 38 — 40
9. Probleme propuse: 4281 — 4290
10. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 47, 48, 50, 51, 55, 63, 67, 69, 70, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 24, 25, 26, 30, 35, 36, 37, 40, 43, 46, 47, 48, 49, 52, 56, 57, 69, 70, 73, 74, 75, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
DANS LE MONDE ENTIER

Abonnements 1 an: Belgique, 30 fr.; France 25 fr.
Etranger, 7 belgas

ADMINISTRATION:

SPHINX, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel: 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338
Paris No. 160061

INVĂȚĂMÂNTUL ARITMETICII IN LICEELE NOASTRE

(Urmare dela pagina 412)

A treia chestiune era de natură comercială. Enunțul ei a fost dat mai lung pentru ca să nu mai încapă fel de fel de interpretări. Problema era următoarea: [1])

Trei Comune A, B, C, *având respectiv 861, 574 și 1435 locuitori, sunt situate pe o aceeași șosea, în ordinea aci arătată, la distanțele* AB — 4776 m *și* BC = 2388 m *între localurile Primăriilor lor. La 1791 m dela* B *în spre* A *este un râu cu un pod șubred. Cele trei Comune se asociază ca să facă acolo un pod nou, repartizând între ele cheltuielile totale în raport direct cu populația și în raport invers cu distanțele dela Primăriile lor la acel pod.*

Ele angajează un inginer care să le facă planurile și să le controleze lucrările, plătindu-i pentru planuri 2% din valoarea totală a lucrărilor proiectate și 6% asupra valorii lucrărilor executate și plătite antreprenorului, care va face podul. Inginerul a prezentat un proiect în valoare de 434000 lei. După cererea Comunelor, se suprimă lucrări în valoare de 54000 lei, iar restul se dă în licitație și se obține un scăzământ de 10%. In timpul lucrărilor se constată însă că mai sunt unele lucrări necesare în valoare de 20000 lei, pe care antreprenorul consimte să le facă însă fără scăzământ. In fine Comunele au convenit cu inginerul și cu antreprenorul ca plata să se facă după terminarea lucrărilor, la 1 Ianuarie 1933.

Comunele nedispunând de bani, se împrumută pe data de 1 Ianuarie 1933 dela o Bancă cu sumele necesare pentru achitarea inginerului și a antreprenorului. Condițiunile împrumutului sunt următoarele: dobânda va fi de 10%, plătibilă cu anticipație la începutul anului, iar capitalul se va restitui, pe jumătate la 1 Ianuarie 1934 și cealaltă jumătate la 1 Ianuarie 1935. Comunele au acceptat aceste condițiuni.

Se cere ce sume trebue să înscrie acele Comune în bugetele

1) *Problema* 4202. Vezi pagina 234.

lor pe anii 1933 şi 1934 pentru achitarea sumelor luate dela Bancă.

Problema aceasta comportă trei părţi:

1. Determinarea sumei S pentru plata inginerului şi a antreprenorului la 1 Ianuarie 1933, adică suma totală la care se ridică cheltuiala facerii podului.

2. Determinarea sumei S' ce trebue luată dela Bancă la acea dată şi repartizarea plăţilor ei şi a dobânzilor la datele de 1 Ianuarie ale anilor 1934 şi 1935.

3. Determinarea sumelor ce revin fiecărei Comune pentru achitarea sumelor datorite Băncii la aceste din urmă două date, sume pe care trebue să le înscrie în bugetele lor pe anii 1933 şi 1934.

Această problemă nu a fost de loc încercată de 42 de candidaţi.

Privitor la prima parte, adică determinarea lui S, 12 candidaţi nu s'au ocupat deloc de dânsa, pierzându-şi timpul cu teorii de dobânzi, reguli de asociaţiune, sau trântind valori fără niciun calcul. Toate calculele de făcut erau acestea:

Plata antreprenorului: $(434000-54000)\times 0{,}9 + 20000 = 362000$ lei

Plata inginerului: . . $0{,}02\times 434000 + 0{,}06\times 362000 = 30400$ „

Plata totală . . . . . 392400 lei

Suma de 392400 lei a fost bine găsită de 97 de candidaţi; ceilalţi au făcut fel de fel de erori de raţionament şi de calcule numerice. Suma cea mai mare a găsit-o un fost elev dela liceul Reformat din Târgul Mureşului de 500800 lei, iar cea mai mică unul dela liceul din Brăila, de 5680. Ca probă de refuz mintal de a gândi, de a raţiona puţin, menţionez aci că un candidat dela liceul Marele Voievod Mihai din Bucureşti dă inginerului $6^0/_0$ numai din scăzământul făcut de antreprenor şi din cei 20000 lucrări suplimentare, iar antreprenorului îi dă numai valoarea scăzământului şi cei 20000 lei!

In ceeace priveşte partea II-a, a dobânzilor, se vede că suntem în epoca conversiunilor! In adevăr, mai întâiu 61 de candidaţi nu s'au ocupat de dobânzi, unii repartizând între comune numai suma totată a lucrărilor. Numai trei candidaţi dela liceele Voievodul Mihai din Bucureşti, Ion Meşota din Braşov şi Traian din Turnu-Severin au deslegat corect şi simplu problema, printr'o regulă de trei simplă:

dacă pentru 100 lei îndatorire la Bancheri, Comunele primesc în mână 90 lei, cât trebuesc să împrumute ca să ia suma S? Se găseşte $S' = 10\,S/9 = 436000$ lei. Un fost elev al liceului din Bacău şi altul din Ploieşti rezolvă problema scriind $S' - 0{,}1\,S' = S$, de unde scot suma S'. Un candidat dela liceul Spiru Haret a tratat chestiunea ca o problemă de scont când cunoaştem valoarea reală şi se cere cea nominală, dar nu a putut trage tot folosul din această idee, necunoscând diferenţele dintre cele două feluri de sconturi. Alţi 6 candidaţi: doi dela liceul Spiru Haret şi 1 dela liceul St. Iosif din Bucureşti, câte 1 dela Câmpulung (Muscel), Timişoara şi Hotin, cu mai puţine cunoştinţe şi abilitate aritmetică decât precedenţii, dar cu spirit de discernământ şi judecată, şi-au zis: dobânda la suma de 392400 împrumutată pentru primul an este de 39240 lei. Comunele ar trebui să o dea Băncii prin anticipaţie, dar nu au bani. Trebue dar să împrumute şi această sumă de 39240 lei. Dar şi acestei sume împrumutate i se cuvine o dobândă anticipată de 3924 lei, pe care Comunele nu au de unde să o dea. Trebue dar să împrumute şi această sumă, şi aşa mai departe până ce, cum zice un candidat, dobânzile se „nimicesc". Suma de împrumutat se găseşte atunci exact printr'o adunare ca aceasta:

392400
39240
3924
392,4
39,24
3,9240
0,3924
0,03924
0,003924
0,0003924

435999,9999564 = 436000 lei.

Nu toţi candidaţii au mers atât de departe cu aproximaţia, luând un număr mai mic de dobânzi de adunat. E curios însă că toţi fiind bacalaureaţi, cu algebra cunoscută, n'au văzut că au aci deaface cu o progresiune geometrică descrescătoare nelimitată, la care se cerea suma.

Toate celelalte 243 de soluţiuni date sunt eronate şi cores-

pund numai cu sumarea primelor două numere dela adunarea de mai sus, adică au luat $S' = 1{,}1\,S$. E un rezultat extrem de dezastruos pentru cunoştinţele practice de aritmetică cu care es elevii din liceele noastre, mai ales că cei de care ne ocupăm aici se mai pregătiseră pentru concurs. Chiar majoritatea celor 13 soluţiuni bune menţionate au rezultatele afectate de erori de calcule numerice. Nu au lipsit şi excursiuni prin dobânzile compuse.

Impărţirea datoriei de 436000 lei pe cei doi ani, e uşor de făcut căci revine a restitui câte 218000 lei anual iar la 1 Ianuarie 1934 de dat şi dobânda de 21800 lei pentru suma nerestituită atunci. Comunele vor trebui să înscrie deci în cei doi ani în bugetele lor sumele de $218000 + 21800 = 239800$ lei pe anul 1933 şi 218000 lei pe anul 1934. Dintre toţi candidaţii, numai cei dela Braşov şi Bacău au ajuns exact la aceste cifre, ceilalţi având erori de calcul la partea I a problemei sau la dobânzi.

Cele două sume aci găsite trebuesc repartizate la cele trei Comune. Pentru a uşura expunerea voiu nota cu s suma de distribuit cu s_1, s_2, s_3 sumele ce revin comunelor A, B, C; cu $p_1 = 861$, $p_2 = 574_3$, $p = 1435$ populaţia celor trei comune; cu $d_1 = 476 - 1791 = 2985$, $d_2 = 1791$, $d_3 = 1791 + 2388 = 4179$ m distanţele Primăriilor la pod, cu $p = 2870$ populaţia totală a comunelor; cu $d = 8955$ suma distanţelor Primăriilor la pod; cu S suma inverselor lui d_1, d_2, d_3; cu r suma fracţiilor p_1/d_1, p_2/d_2, p_3/d_3, care se găseşte uşor că sunt proporţionale cu 63, 70, 75 sau egale aproximativ cu fracţiile zecimale 0,29; 0,32; 0,34. Cerându-se ca repartizarea sumelor la Comune să se facă proporţional cu populaţia şi invers proporţional cu distanţele problema revine la a divide suma s proporţional cu aceste fracţiuni. Mulţi au lucrat cu fracţiile directe 861/2985, 574/1791 şi 1435/4179 şi s'au înomolit repede.

Partea ce revine fiecărei Comune este $p_1 s/d_1 r$, $p_2 s/d_2 r$, $p_3 s/d_3 r$.

Distribuirea sumelor la Comune nu a fost încercată de 80 de candidaţi. Dintre cei cari au încercat-o, numai 32 au urmat procedee corecte, însă toţi au avut erori de calcul. Candidaţii aceştia sunt dela următoarele licee: câte trei dela liceele Sf. Sava şi Spiru Haret din Bucureşti; câte doi dela liceele Cantemir din Bucureşti şi Israelit din Galaţi, şi câte unul dela liceele Mihai Viteazu, Lazăr, Marele Voievod Mihai, St. Iosif şi Libros din Bucureşti, liceul Meşota din Braşov, liceul Internat din Iaşi, Alexandri din Galaţi, Carol I

din Craiova, Aron Pumnul din Cernăuți, Lugoș, Târgu-Jiu, Câmpulung (Muscel), Pitești, Brăila, Constanța, Buzău, Tecuci, Ploiești, Focșani, Bălți, Cetatea-Albă; iar unul dela liceul Evangelic din București, după ce luase o cale bună, a părăsit-o pentru alta eronată.

Unii candidați, în număr de 37, neștiind cum să împartă un număr invers proporțional cu numere date, au făcut împărțirea numai proporțional cu populația. Un candidat dela liceul din Tulcea spune chiar că: *„presupun că cele trei Comune e la aceeași distanță"*, ipoteză, nu numai contrară datelor, dar imposibilă, căci ar urma după dânsa ca una din Comune să fie deoparte a podului, alta de alta și a treia peste una din ele, deoarece toate sunt pe o șosea! Mulți din aceștia au calculat direct, partea a două Comune iar pentru a treia a dedus-o prin scăderea din suma totală, pierzând astfel ocaziunea de a-și putea verifica rezultatele. Un candidat dela liceul Șimlăul Silvaniei a distribuit proporțional cu distanțele iar altul dela Turnu-Severin a vrut să facă același lucru, dar a înmulțit suma s cu d/d_1, . . . în loc de d_1/d, . . .

Unii candidați au știut cum se împarte și direct și invers proporțional, dar nu au știut cum se face când intervin deodată asemenea condițiuni, și atunci au făcut odată împărțirea în raport direct cu populația și altă dată, aparte, în raport invers cu distanțele, obținând astfel două serii de valori pentru contribuțiile Comunelor. Dintre aceștia, 19 candidați le lasă așa, rămânând ca fiecare să aleagă pe care vrea! Un candidat dela liceul Eminescu din București și altul dela liceul Aurel Vlaicu, tot din București, sumează cele două valori găsite pentru o Comună! Alți 10 candidați văd că printr'un astfel de calcul se dublează datoriile comunelor pe nedrept, și iau semisuma valorile date de cele două moduri de distribuție. S'a găsit și un candidat dela liceul din Turnu-Măgurele care să facă diferența celor două valori! Alții combină relațiunile:

$$x_1/p_1 = x_2/p_2 = x_3/p_3 \quad \text{și} \quad x_1/(1/d_1) = x_2/(1/d_2) = x_3/(1/d_3)$$

într'una; astfel un candidat din Cetatea-Albă le combină sumând numitorii, și scriind $x_1/[p_1 + (1/d_1)]$ . . . altul cu provenienta necunoscută, le înmulțește și sumează termenii, scriind $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s^2$!

Mai întâlnim și alte moduri de distribuire. Un candidat dela liceul din Botoșani distribuie proporțional cu sumele $[p_1 + (1/d_1)]$, . . . ; altul dela liceul Șincai din București proporțional cu $(p_1 + d_1)$, . . . ;

altul din Satu Mare proporţional cu $p_1 d_1$, . . . ; altul dela Deva cu $(1/p_1 d_1)$, . . ; altul dela liceul Mihai Viteazu din Bucureşti cu $\frac{1}{2}[(p_1/p) + d/d_1)]$ . . .

Avem soluţiuni care se depărtează chiar dela o distribuţie arbitrară, întru cât sumele ce se dau ca revenind Comunelor nu sumează împrumuturile făcute la Bancă. Astfel 27 candidaţi au redus astfel problema la o regulă de trei compusă: dacă pentru populaţia totală p şi suma distanţelor d corespunde suma împrumutată s, dar pentru populaţia p_1 şi distanţa d_1 a Comunei A ce sumă va corespunde? Se scoate $x_1 = sp_1 d/d_1 p$, . . . Tot aşa au procedat un candidat dela liceul Matei Basarab din Bucureşti, Al. Russo din Chişinău, liceul din Turnu-Măgurele şi Seminarul pedagogic din Cluj, numai că au considerat că contribuţiile variază direct cu distanţele.

Un fapt curios este marea răspândire a ideii că contribuţiile Comunelor se găsesc înmulţind suma totală de repartizat cu populaţia unei comune şi împărţind produsul prin distanţa ei la pod! Sunt 47 de candidaţi cari au făcut această eroare gravă, dând $x_1 = sp_1/d_1$, $x_2 = sp_2/d_2$, $x_3 = sp_3/d_3$! Ei sunt câte 4 dela liceele Aurel Vlaicu şi Gh. Lazăr, câte doi dela Sf. Sava, Marele Voevod Mihai, Spiru Haret şi Matei Basarab, câte unul dela Şincai, Titu Maiorescu, St. Iosif, şi Regina Maria din Bucureşti, câte unul dela Seminarul pedagogic din Cluj şi dela liceele Alexandri şi Israelit din Galaţi, Russo din Chişinău, Ilarian din Târgu-Mureş, Lazăr din Sibiu, Roth din Mediaş, Diaconovici din Timişoara, Real No. 2 din Cernăuţi şi din oraşele Severin, Caracal, Râmnicu-Vâlcea, Piteşti, Găeşti, Giurgiu, Oltenita, Câmpina, Buzău, Brăila, Deva, Bălţi şi încă doi, cărora nu li s'a putut stabili proveniența.

Un elev dela liceul din Târgu-Jiu şi altul dela Seminarul pedagogic din Iaşi au dat $x_1 = sd_1/p_1$, . . . ; unul dela liceul St. Sava din Bucureşti $x_1 = spd_1/pd$; altul dela liceul Alexandri din Galaţi $x_1 = sp_1/p_2 p_3$; altul dela Turnu-Măgurele $x_1 = sp_1 d/pd_1$; altul dela liceul Spiru Haret din Bucureşti $x_1 = s(p_1 + d_1)/(p_2 + d_2 + p_3 + d_3)$; altul dela liceul din Bacău $x_1 = sp_1/pd$; altul din Bârlad $x_1 = sp_1/pdd_1$; altul dela liceul Spiru Haret din Bucureşti $x_1 = s^2 p_1/dd_1 p$; etc.

La unii candidaţi găsim egalităţi stranii. Astfel la un fost elev al liceului Bruckental din Sibiu găsim: 2985 m = 861 loc.,

1791 m = 574 loc., 4179 m = 1435 loc; la un elev dela liceul Matei Basarab din Bucureşti găsim $x_1 = s/861 = x_2 = s/574 = x_3 = s/1435$; la un elev dela liceul Mihai Viteazul din Bucureşti $s = p_1/d_1 + p_2/d_2 + p_3/d_3$; acelaşi lucru la un elev dela liceul Marele Voievod Mihai din Bucureşti; un elev dela liceul Cantemir din Bucureşti, scrie fără să controleze, că $s^2 = p_1/d_1$, iar altul dela liceul Carol I din Craiova că $s_2 = p_1 d_1$, etc.

Unii candidaţi, mai expeditivi, au dat rezultatul direct! Astfel un candidat dela liceul Regina Maria din Chişinău a dat ca contribuţii ale Comunelor în primul an 67910 lei, 74892 lei şi 83236 lei şi în al doilea an 83236 lei, 62908 lei şi 67372 lei. Sumele contribuţiilor anuale nu corespund cu suma datorată Băncii. Dar că cifrele sunt fantastice, se vede imediat, căci de unde prima Comună dă mai mult în anul al doilea celelalte două dau mai puţin, ceeace este inadmisibil în condiţiunile uniforme admise de cele trei Comune.

Mă opresc aci cu spicuirile din teze. Din ele se vede că nivelul învăţământului aritmeticei (ca să nu mai vorbesc şi de constatările ce am făcut privitor la geometrie şi algebră în această Comunicare) este foarte scăzut în liceele noastre. Trebue să ne mai gândim că elevii, de care am vorbit, veneau la un concurs şi că şi-au reînprospătat materiile pe care le făcuseră în licee şi care se cerea la acel concurs. Pătrunderea chestiunilor, vederea clară a faptelor şi judecata dreaptă lasă mult de dorit. In schimb puterea de imaginaţie pentru căi imaginare de rezolvat problemele e în creştere, iar grafomania împinsă prea departe, până la rea credinţă. Sunt în multe teze afirmaţiunea că s'au verificat calcule la soluţii eronate, şi că s'au găsit bune, iar un candidat încearcă o verificare, care văzând că nu reuşeşte, o trage de păr schimbând cifre ca să dea aparenţa că se ajunge la rezultatul urmărit. Imaginaţia este împinsă aşa de departe încât găsim în teze idei noui la care nu ştiu să se fi gândit matematicianii până azi. Aşa este de exemplu existenţa numerelor zecimale cu un număr fracţionar de zecimale.

Iată rezultatele dezastroase pe care le dă indulgenţa la darea notelor şi necercetarea cu toată seriozitatea a tezelor de matematici. După cum am spus acum 20 de ani repet şi azi:

Elevilor nu li se face niciun bine real, ci numai unul momentan imaginar, deoarece desnădejdea şi amărăciunea lor sufletească este mai târziu enormă când văd că din lipsa de cunoştinţe mate-

matice solide din liceu, își văd înmormântată dorința lor de a intra în o școală tehnică superioară și visul copilăriei lor de a ajunge ingineri. Iar dacă din lipsă de candidați, sau din alte motive, se admit uneori mai mulți candidați decât ar trebui, apoi vai de cei ce intră cu cunoștințe insuficiente, căci îi apucă prin școli viața probabilă a omului de 37 ani, cum e azi un astfel de elev în penultimul an al Școalei Politehnice. Iar bieții părinți așteaptă an cu an ca să le cază copilul din povara vieții lor... Cine nu se poate împrieteni cu EUCLID să se ducă din timp la OMER.

Desființarea liceelor reale a distrus frumosul învățământ matematic pe care-l aveam în țară. Am menționat ceea ce am găsit și bun, dar e prea puțin pentru nevoile unei țări care așteaptă dela știință și tehnică mijloace de propășire. Lumea se aștepta dela clasicism între altele la mai multă cinste, sinceritate. Nu am putut constata decât un singur caz. Un elev al liceului Al. Papiu Ilarian din Târgu-Mureșului, după ce a scris enunțul primelor două chestiuni, a mai adăugat un rând :

„Rezultatul se va da la . . . anu".

E o manifestare de sinceritate care trebuia menționată.

Ce are să fie la anul ?

Nu știm. Ne găsim acum și noi ca acel grup eterogen, format dintr'un surd, un mut, un olog, un ciung și un orb, cari mergeau într'o noapte întunecoasă printr'o pădure deasă. La un moment dat *Surdul* zice :

«Stați ! Par'că aud zgomot de pași străini...»

Mutul : «Ce mai așteptăm ? Să strigăm ajutor !»

Ciungul : «Mai bine să punem mâna toți pe câte o bâtă cu care să ne apărăm la nevoie».

Ologul : «Ce mai stăm pe loc ? S'o luăm repede la fugă înapoi».

Orbul, foarte liniștit le răspunde răspicat : «Stați fraților, nu vă pierdeți cumpătul, că ce o fi om vedea».

I. IONESCU.

ASUPRA CURBELOR DE Gr. IV

Problema ce vreau să tratez în rândurile de față este următoarea: *„Fiind dată o curbă de gradul IV, prin ecuația ei, poate ea întotdeauna fi socotită ca podara unei conice în raport cu un punct din planul său? În caz că este, să se determine conica și punctul“*. După ce voi rezolva problema generală voi face și două aplicații ale ei.

1. Pentru a răspunde la prima întrebare voi proceda indirect. Fie:

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ecuația generală a unei conice și $M(a, b)$ un punct oarecare din planul său. Îmi propun să găsesc ecuația podarei conicei (1) în raport cu punctul M. Ecuația tangentei într'un punct oarecare depe conică este:

$$(2) \quad (Ax_0+By_0+D)x+(Bx_0+Cy_0+E)y+(Dx_0+Ey_0+F)=0$$

cu condiția:

$$(1') \qquad Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F = 0$$

iar a perpendicularei din M pe tangentă

$$(3) \qquad y - b = \frac{Bx_0 + Cy_0 + E}{Ax_0 + By_0 + D}(x - a).$$

Pentru a găsi ecuația podarei căutate va trebui să eliminăm pe x_0 și y_0 între ecuațiile (1'), (2) și (3). Vom rezolva ecuațiile (2) și (3) în raport cu x_0 și y_0 și valorile găsite le vom introduce în (1'). Înainte însă de a face aceste calcule să introducem niște notații. Anume, să notăm cu Δ discriminantul ecuației (1) iar minorii lui după cum urmează:

$$\delta_1 = CF - E^2 \ , \ \delta_2 = ED - BF \ , \ \delta_3 = AF - D^2,$$
$$\delta_4 = BE - CD \ , \ \delta_5 = BD - AE \ , \ \delta_6 = AC - B^2.$$

Rezolvând acum ecuațiile (2) și (3) în raport cu x_0 și y_0 se găsește:

$$(4) \begin{cases} x_0 = \dfrac{\delta_4(x^2+y^2) - (a\delta_4 + \delta_1)x - (b\delta_4 + \delta_2)y + a\delta_1 + b\delta_2}{\delta_6(x^2+y^2) - (a\delta_6 + \delta_4)x - (b\delta_6 + \delta_5)y + a\delta_4 + b\delta_5} \\ y_0 = \dfrac{\delta_5(x^2+y^2) - (a\delta_5 + \delta_2)x - (b\delta_5 + \delta_3)y + a\delta_2 + b\delta_3}{\delta_6(x^2+y^2) - (a\delta_6 + \delta_4)x - (b\delta_6 + \delta_5)y + a\delta_4 + b\delta_5} \end{cases}$$

şi ecuaţia podarei o vom găsi introducând aceste valori în (1'). Dar mai întâi vom face câteva observări cari vor simplifica mult calculul. Se ştie că dacă în Δ se înlocueşte o linie oarecare cu alta se capătă un determinant nul, ceeace se traduce prin relaţiile :

$$(5)\quad \begin{cases} B\delta_1+C\delta_2+E\delta_4=0\ ,\ A\delta_2+B\delta_3+D\delta_5=0\ ,\ A\delta_4+B\delta_5+D\delta_6=0 \\ D\delta_1+E\delta_2+F\delta_4=0\ ,\ D\delta_2+E\delta_3+F\delta_5=0\ ,\ B\delta_4+C\delta_5+E\delta_6=0 \end{cases}$$

iar dacă dezvoltăm determinantul după liniile sale mai căpătăm relaţiile :

$$(5)\qquad A\delta_1+B\delta_{\cdot}+D\delta_4=\Delta\ ,\ B\delta_2+C\delta_3+E\delta_5=\Delta\ ,$$

$$D\delta_4+E\delta_5+F\delta_6=\Delta.$$

In fine vom scrie pe (1') sub forma :

$$(1'')\quad (Ax_0+By_0+D)x_0+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+(Dx_0+Ey_0+F)=0$$

şi introducând aci valorile (4') şi gonind numitorii, se găseşte în virtutea relaţiilor (5) şi (5') că parantezele sunt respectiv egale cu

$$\Delta(-x+a)\ ,\ \Delta(-y+b)\ ,\ \Delta[(x^2+y^2)-(ax+by)].$$

Simplificând pe (1'') cu Δ, pe care-l presupunem diferit de zero, conica fiind presupusă propriu zisă, găsim :

$$(-x+a)[\delta_4(x^2+y^2)-(a\delta_4+\delta_1)x-(b\delta_4+\delta_2)y+a\delta_1+b\delta_2]$$
$$+(-y+b)[\delta_5(x^2+y^2)-(a\delta_5+\delta_2)x-(b\delta_5+\delta_3)y+a\delta_2+b\delta_3]$$
$$+[(x^2+y^2)-(ax+by)][\delta_6(x^2+y^2)-(a\delta_6+\delta_4)x-(b\delta_6+\delta_5)y+a\delta_4+b\delta_5]=0$$

unde făcând înmulţirile şi ordonând avem în definitiv :

$$(6)\quad \begin{cases} \delta_6(x^2+y^2)^2-2[(a\delta_6+\delta_4)x+(b\delta_6+\delta_5)y](x^2+y^2) \\ \qquad +(a^2\delta_6+4a\delta_4+2b\delta_5+\delta_1)x^2 \\ +2(ab\delta_6+a\delta_5+b\delta_4+\delta_2)xy+(b^2\delta_6+4b\delta_5+2a\delta_4+\delta_3)y^2 \\ -2[a(a\delta_4+\delta_1)+b(a\delta_5+\delta_2)]x-2[a(b\delta_4+\delta_2) \\ \qquad +b(b\delta_5+\delta_3)]y+(a^2\delta_1+2ab\delta_2+b^2\delta_3)=0. \end{cases}$$

Acest rezultat este foarte important. El ne spune că, pentru ca o curbă de gr. IV să fie podara unei conice, trebuie ca să fie *bicirculară*. Vom vedea însă mai departe că această condiţie nu este suficientă.

2. Să presupunem acum că ni se dă ecuația:

$$(7)\qquad \alpha_1(x^2+y^2)^2+2(\alpha_2x+\alpha_3y)(x^2+y^2)$$
$$+\alpha_4x^2+2\alpha_5xy+\alpha_6y^2+2\alpha_7x+2\alpha_8y+\alpha_9=0$$

pe care s'o presupunem ca reprezentând podara unei conice față de un punct din planul său, și să ne propunem să găsim conica și punctul care i-a dat naștere. Pentru asta trebuie să identificăm între ele ecuațiile (6) și (7). Găsim condițiile [1]):

$$(8)\quad \begin{cases} \delta_6=\alpha_1 \\ a\delta_6+\delta_4=-\alpha_2 \\ b\delta_5+\delta_5=-\alpha_3 \\ a^2\delta_6+4a\delta_4+2b\delta_5+\delta_1=\alpha_4 \\ ab\delta_6+a\delta_5+b\delta_4+\delta_2=\alpha_5 \\ b^2\delta_6+4b\delta_5+2a\delta_4+\delta_3=\alpha_6 \\ a(a\delta_4+\delta_1)+b(a\delta_5+\delta_2)=-\alpha_7 \\ a(b\delta_4+\delta_2)+b(b\delta_5+\delta_3)=-\alpha_8 \\ a^2\delta_1+2ab\delta_2+b^2\delta_3=\alpha_9 \end{cases}$$

Din primele șase condiții scoatem imediat:

$$(9)\quad \begin{cases} \delta_1=3\alpha_1a^2+2\alpha_1b^2+4\alpha_2a+2\alpha_3b+\alpha_4 \\ \delta_2=\alpha_1ab+\alpha_3a+\alpha_2b+\alpha_5 \\ \delta_3=2\alpha_1a^2+3\alpha_1b^2+2\alpha_2a+4\alpha_2b+\alpha_6 \\ \delta_4=-(\alpha_1a+\alpha_2) \\ \delta_5=-(\alpha_1b+\alpha_3) \\ \delta_6=\alpha_1. \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în ultimele trei din condițiile (8) se găsesc ecuațiile:

$$(10)\quad \begin{cases} 2\alpha_1(a^2+b^2)a+\alpha_2(3a^2+b^2)+2\alpha_3ab+\alpha_4a+\alpha_5b+\alpha_7=0 \\ 2\alpha_1(a^2+b^2)b+2\alpha_2ab+\alpha_3(a^2+3b^2)+\alpha_5a+\alpha_6b+\alpha_8=0 \\ 3\alpha_1(a^2+b^2)^2+4(\alpha_2a+\alpha_3b)(a^2+b^2)+\alpha_4a^2+2\alpha_5ab+\alpha_6b^2=\alpha_9. \end{cases}$$

1) Am scris direct că coeficienții celor două ecuații sunt egali, căci dacă am introduce un factor de proporționalitate, acesta dispare în calcule.

Formulele (9) ne determină conica. Intr'adevăr se ştie că ecuaţia ei punctuală este [1]):

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_4 & x \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_5 & y \\ \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

iar din primele două ecuaţiuni din (10) scoatem pe a şi b coordonatele punctului M. Coordonatele acestui punct astfel găsite trebuiesc să verifice şi ultima ecuaţie din (10). Aceasta este condiţia ce o anunţasem mai sus, pentru ca ecuaţia (7) să fie podara unei conice. Să dăm o altă formă acestei condiţii. Pentru asta observăm mai întâi că dacă însemnăm cu $f(x, y)$ partea întâia a ecuaţiei (7) atunci primele două ecuaţiuni din (10 nu sunt altceva decât: $f'_z(a, b) = 0$ şi $f'_y(a, b) = 0$. In plus dacă în loc de ecuaţia treia considerăm pe cea ce se capătă scăzând din suma primelor două pe a treia, găsim tocmai: $f(a, b) = 0$. In rezumat ecuaţiile (10) se pot înlocui prin:

$$(10') \qquad f'_x(a, b) = 0 \ , \ f'_y(a, b) = 0 \ , \ f(a, b) = 0$$

dar aceste trei condiţiuni nu însemnează altceva decât că punctul M trebuie să fie un punct dublu al curbei: $f(x, y) = 0$.

Rezultatul final este deci următorul: pentru ca o quartică să fie podara unei conice în raport cu un punct din planul său, ea trebuie să fie bicirculară şi să aibă punct dublu.

3. Aplicaţii. *a)* Ca o aplicaţie a celor stabilite până aci să considerăm problema 2809 rezolvată în „G. M." Vol. 35 la pag. 27. Iată în ce constă această problemă: se consideră un triunghiu dreptunghic ABC şi un punct M pe ipotenuză. Din proecţia lui M pe AB, Q se scoboară o perpendiculară pe MD în P, D fiind mijlocul lui AC. Se cere locul lui P când M variază. Axele au fost luate cum se vede în figură şi s'a găsit că locul este cubica:

$$(13) \qquad (bx + cy)(x^2 + y_2) + bcx^2 + c^2xy - bcy^2 = 0.$$

---

1) A se vedea de ex. „Lecţiuni de Geometrie Analitică", de N. ABRAMESCU.

Conform celor stabilite mai sus această cubică va fi podara parabolei (căci $\delta_6 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2bc & c_2 & -b & x \\ c^2 & -2bc & -c & y \\ -b & -c & 0 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

în raport cu origina (adică D) după cum se vede uşor din (13), căci

$$f'_x(0,0) = 0 \ , \ f'_y(0,0) = 0 \ , \ f(0,0) = 0.$$

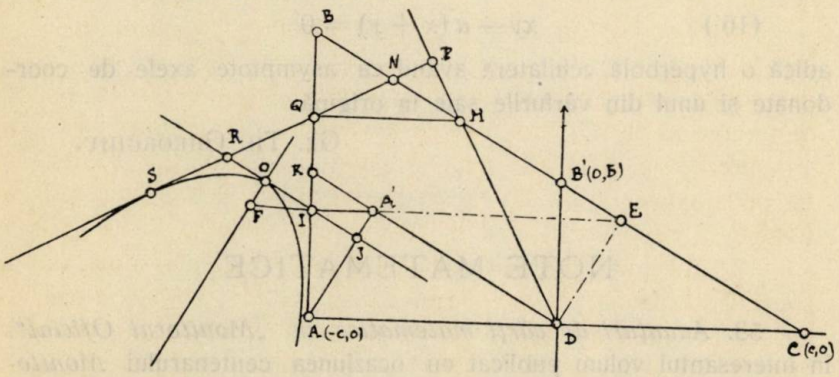
Ecuaţia (14) dezvoltată dă :

$$(14') \quad c^2x^2 - 2bcxy + b^2y^2 + 2c(2b^2+c^2)x - 2bc^2y + c^2(4b^2+c^2) = 0.$$

Făcând reducerea acestei conice, printr'o metodă oarecare se găseşte că :

$$p = \frac{2b^3c}{(b^2+c^2)^{1/2}} \ , \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b} \ , \ x_0 = -\frac{b^3c}{(b^2+c^2)^{3/2}} \ , \ y_0 = \frac{c^2(3b^2+c^2)}{(b^2+c^2)^{3/2}}$$

unde am notat prin: p parametrul parabolei, cu α unghiul axei parabolei, iar cu (x_0, y_0) coordonatele vârfului ei. Iată o construcţie



a acestei parabole: ducem din D o paralelă la BC pe care proectăm pe A în A'. Pe A' îl proectăm în I pe AB, iar pe I în J pe AA'. Vârful parabolei O este simetricul lui J faţă de I, iar focarul F este simetricul lui A' faţă de I. Axa parabolei este OF. Justificarea acestei construcţii este uşor de făcut aşa că nu mă opresc asupra ei. Cunoscând acum parabola se poate încerca şi o soluţie geometrică directă a problemei.

b) In fine în „Revue de mathématiques spéciales" D-l Prof. N. ABRAMESCU a propus următoarea problemă (Vol. 42, p. 104): Se consideră un unghiu drept xOy şi fie B şi C intersecţiile laturilor lui cu o dreaptă variabilă ce trece printr'un punct fix A depe bisectoarea unghiului xOy. Cercurile ce trec prin A şi sunt tangente la laturile unghiului xOy respectiv în B şi C se taie într'un al doilea punct I. Printre alte chestiuni problema cerea ca să se arate că locul punctului I este podara unei hyperbole echilatere în raport cu unul din vârfurile sale.

Luându-se ca axe pe Ox şi Oy se găseşte că ecuaţia locului lui I este:

$$(15)\quad (x^2+y^2)^2-2a(x+y)(x^2+y^2)+a^2x^2-2a^2xy+a^2y^2=0$$

care va fi podara conicei:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} a^2 & -a^2 & a & x \\ -a^2 & a^2 & a & y \\ a & a & 1 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

în raport cu origina axelor, adică O. Ecuaţia (16) se mai scrie:

$$(16')\quad xy-a(x+y)=0$$

adică o hyperbolă echilateră având ca asymptote axele de coordonate şi unul din vârfurile sale în origină.

GH. TH. GHEORGHIU.

NOTE MATEMATICE

53. *Anunţuri de cărţi matematice în „Monitorul Oficial".* In interesantul volum publicat cu ocaziunea centenarului *Monitorului Oficial* este reprodusă o pagină din *Monitorul Oficial* dela 1864, No. 210, în care găsim şi următoarele două anunţuri:

«A eşit de sub tiparu *Algebra* şi *Aritmetica* prelucrată de Locotenent-Colonel GEORGE MANU. *1 forte volum de peste 500 feţe;* şi se află de vendare la libreria D-lui Daniilopulo pe preţul de un galbenu».

După el urmează următorul anunţ:

«La toate librăriile din Bucuresci se afla de vendare: *Fisica Populara* pentru scoalele primare. Carte autorizată de Consiliul Instrucțiunii pentru clasa a IV primară».

După acesta e următorul anunț:

«Sub presă, și va apare peste câteva zile *Aritmetica Rationata* pentru usul claselor Gimnasiali, școalei Militare, etc. de D. I. FALCOIANU, licențiat în Științele Matematice de la Facultatea din Paris, fost Profesore la Facultatea de sciințe din Bucuresti și la Scoala Militară, etc.».

Anunțurile sunt puse amestecate. Așa primul din anunțurile date aci vine după următorul:

«D. HERMANN, renumitul prestidigitator, a sosit aici dela Londra. El este în plecare a da mai multe reprezentațiuni, în arta sa, în care posedă o ghibăcie rară».

I. I.

54. *Asupra unor medii.* In *„The mathematical papers from the far East"* de YOSHIO MIKAMI se menționează o lucrare a lui T. HAYASSHI publicată în *Journal of the Physic Scool in Tokio* 1897 și 1904 în care se tratează și mediile de care s'a ocupat D-l A. ANGELESCU în *Gazeta Matematică* în Anul XXXVII, pag. 244.

Tot acolo se arată că în *Bulletin des Sciences Mathématiques,* Tomul XXVI, e un articol: *„Sur un théorème relatif à des moyennes"* al lui A. DURAND, care tratează despre asemenea chestiuni.

I. I.

55. *Serie de locuri geometrice.*

Redijând exercițiul propus de D-l I. SAGER cu No. 32 la pagina 358 din *Gazeta Matematică* Vol. XXXVIII, am ajuns la o generalizare și o extindere a locului geometric cerut de D-l I. SAGER.

1°. *Fie* A_1 *un punct care descrie curba* Γ *dată de*

$$F(x, y) = 0$$

B_1 *proecția lui* A_1 *pe o dreaptă fixă* Δ *și* A_2 *proecția lui* B_1 *pe* OA_1. *Știind că* O *este fix pe* Δ *și că axele de coordonate sunt* $O\Delta$ *și perpendiculara în* O *pe* Δ, *se cere locul lui* A_2.

Acesta este enunțul generalizărei imediate a problemei D-lui I. SAGER în care A_1 descrie o elipsă, iar Δ era axa mare a elipsei.

2°. *Fie acum* B_2 *proecția lui* A_2 *pe* Δ, A_3 *proecția lui* B_2 *pe* OA_1, B_3 *proecția lui* A_3 *pe* Δ, A_4 *proecția lui* B_3 *pe* OA_1 ... *și în general* B_i *proecția lui* A_i *pe* Δ, A_{i+1} *proecția lui* B_i *pe* O_1 .... *Se cer locurile geometrice ale punctelor* $A_2, A_3, A_4, \ldots A_i \ldots$ *atunci când* A_1 *descrie curba* Γ.

Numesc aceste locuri *serii de locuri geometrice* sau *locuri geometrice în serie* din cauza felului cum se deduc unele din altele și a legăturei cu curba Γ, descrisă de unul din ele.

Fie $A_1 (x_1\ y_1)$, $A_2 (x_2\ y_2)$. Ținând seamă de proprietățile triunghiurilor dreptunghice, se deduce:

$$A_2B_2^2 = OB_2 \cdot B_2B_1$$

$$\therefore \quad y_2^2 = x_2 (x_1 - x_2)$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{x_2^2 + y_2^2}{x_2} . \tag{1}$$

Pe de altă parte de oare ce

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

se deduce:

$$y_1 = \frac{y_2 (x_2^2 + y_2^2)}{x_2^2} . \tag{2}$$

Inlocuind în $F(x_1, y_1)$ pe x_1 și y_1 prin valorile (1) și (2) și trecând la coordonate curente, se găsește că A_2 descrie curba

$$F\left[\frac{x^2 + y^2}{x} , \frac{y (x^2 + y^2)}{x^2}\right] = 0$$

și cu aceasta am rezolvat prima din problemele propuse în această notă.

Coordonatele lui A_3 se deduc din ale lui A_2, după cum s-au dedus acestea din ale lui A_1, așa că vom avea:

$$x_2 = \frac{x_3^2 + y_3^2}{x_3} \quad , \quad y_2 = \frac{y_3 (x_3^2 + y_3^2)}{x_3^2}$$

pe care ducându-le în (1) și (2), dau:

$$x_1 = \frac{(x_3^2 + y_3^2)^2}{x_3^3} \quad , \quad y_1 = \frac{y_3 (x_3^2 + y_3^2)^2}{x_3^4} . \tag{3}$$

Continuând așa din punct în punct se găsește că:

$$x_1 = \frac{S_2}{x_2} = \frac{S_3^2}{x_3^3} = \frac{S_4^3}{x_4^5} = \ldots = \frac{S_{i+1}^i}{x_{i+1}^{2i-1}} = \ldots \qquad (4)$$

$$y_1 = \frac{y_2 S_2}{x_2^2} = \frac{y_3 S_3^2}{x_3^4} = \frac{y_4 S_4^3}{x_4^6} = \ldots = \frac{y_{i+1} S_{i+1}^i}{x_{i+1}^{2i}} . \qquad (5)$$

în care

$$S_i = x_i^2 + y_i^2 .$$

Ecuațiile (4) și (5) rezolvă problema *locurilor geometrice în serie,* enunțată la 2°. Pentru a găsi locul lui A_i este destul să se înlocuiască în ecuația lui Γ coordonatele lui x, y prin coordonatele corespunzătoare a șirurilor (4) și (5).

3°. *Plecând dela punctele* A_1, B_1 *ale figurei care a servit la problema* 2° *să facem următoarele construcții: perpendiculara în* A_1 *taie pe* Δ *în* C_2, *perpendiculara în* C_2 *pe* Δ *taie pe* OA_1 *în* D_2. *Se cere locul punctului* D_2 *și în general ale punctelor* $D_3, D_4, \ldots D_i \ldots$ *deduse unele din altele prin aceleași construcții.*

Problema este analoagă cu 2°, dar conduce la rezultate puțin diferite. Fie (x_2, y_2) coordonatele lui D_2. Coordonatele lui D_2 se leagă cu ale lui A_1 după cum ale lui A_1 s'au legat cu ale lui A_2 la cazul 1°. Prin urmare:

$$x_2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1} \quad ; \quad y_2 = \frac{y_1 (x_1^2 + y_1^2)}{x_1^2}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{x_2^3}{x_2^2 + y_2^2} \quad ; \quad y_1 = \frac{y_2 x_2^2}{x_2^2 + y_2^2} . \qquad (6)$$

La fel se găsește că între coordonatele lui D_2 și ale lui D_3 avem

$$x_2 = \frac{x_3^3}{x_3^2 + y_3^2} \quad ; \quad y_2 = \frac{y_3 x_3^2}{x_3^2 + y_3^2} .$$

Se duc aceste valori în (6) și se găsesc x_1, y_1 în funcție de x_3, y_3. Procedând astfel din aproape în aproape ca la 2° se găsește că *seria de locuri geometrice* cerute la 3° este dată de:

$$x_1 = \frac{x_2^3}{S_2} = \frac{x_3^5}{S_3^2} = \frac{x_4^7}{S_3^3} = \ldots = \frac{x_{i+1}^{2i+1}}{S_{i+1}^i} = \ldots$$

$$y_1 = \frac{y_2 x_2^2}{S_2} = \frac{y_3 x_3^4}{S_3^2} = \frac{y_4 x_4^6}{S_4^3} = \ldots = \frac{y_{i+1} x_{i+1}^{2i}}{S_{i+1}^i} = \ldots$$

unde S_i are semnificația dela 2°.

Ca rezultat se poate enunța că dacă A_1 descrie curba (1) punctele A_i și D_i descriu respectiv curbele:

$$F\left[\frac{S_{i+1}^{i}}{x_{i+1}^{2i+1}}\ ,\ \frac{y_{i+1}\,S_{i+1}^{i}}{x_{i+1}^{2i}}\right]=0, \qquad (7)$$

și

$$F\left[\frac{x_{i+1}^{2i+1}}{S_{i+1}^{i}}\ ,\ \frac{y_{i+1}\,x_{i+1}^{2i}}{S_{i+1}^{i}}\right]=0. \qquad (8)$$

Curba Γ împarte deci planul în 2 regiuni, una a punctelor A_i care descriu curbele (7) și alta a punctelor D_i care descriu curbele (8).

COL. GH. BUICLIU.

56. *Asupra problemei 2809.*

In articolul „*Asupra curbelor de gr. IV*" publicat în numărul de față, la aplicații am spus că cunoscând parabola învelitoare a dreptelor PQ (mă refer la notațiile și figura din articolul citat) s'ar putea încerca și o soluție geometrică a acestei chestiuni. Iată una, pe care o cred eu cea mai simplă.

Pentru a arăta că dreapta PQ rămâne tangentă parabolei cu vârful O și cu focarul în F va fi destul să arătăm, după o proprietate cunoscută a parabolei, că dreapta FR este perpendiculară pe RQ. Pentru asta vom arăta că patrulaterul RFIQ este inscriptibil. Insă acest patrulater va fi inscriptibil atunci când: ungh. IRQ = ungh. IFQ. Dar: ungh. IRQ = ung. MNP = ungh. MDE după cum se vede ușor. Va trebui deci să arătăm că: ungh. IFQ = ungh. MDE. Acest lucru îl vom face arătând că triunghiurile dreptunghice QFI și MDE sunt asemeni, adică: (1) FI : DE = QI : ME. Cum QM și IE sunt paralele rezultă că: QI : ME = BQ : BM. Dar IF = IA' și DE = AA' prin construcție, deci: FI : DE = IA' : AA'. Cu alte cuvinte relația (1) se transformă în: IA' : AA' = BQ : BM relație adevărată, căci triunghiurile dreptunghice BQM și IAA' sunt asemeni ca având unghiurile ascuțite egale.

Patrulaterul RFIQ este deci inscriptibil adică FR este perpendiculară pe PQ.

GH. TH. GHEORGHIU.

57. *Asupra problemei 4176.* Această problemă a mai fost rezolvată de D-nii: I. CURCHI (st. Buc.) și M. MARGULIUS (Buc.), care a trimis o bună soluție analitică.

CPT. GH. N.

BIBLIOGRAFIE

Buletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXIX. No. 4. Aprilie 1933. New-York. Spaciuri admiţând paralelism complect absolut, de L. P. EISENHART. Problema lui PLATEAU, de J. DOUGLAS. Pseudo-covarianţi, de A. D. CAMPBELL. Notă asupra echivalenţei algebrelor de gradul doi, de A. A. ALBERT. Notă asupra formelor biliniare, de R. E. A. C. PALEI. Asupra identităţilor δ şi Φ Asupra algebrelor divlziunii primare normale de gradul opt, de A. A. ALBERT. Domenuri convexe şi combinaţiuni lineare ale funcţiunilor continui, de I. J. SCHOENBERG. Ecuaţiuni integrale lineare ale funcţiunilor de două variabile, de T. S. PETERSON. Soluţiunea lui HUNTIGTON a problemei rezolvate din algebra boleană, de A. A. BENNETT. Concurenţe şi nenumărabilitate, de N. E. RUTT. Transformările lui HAUSDORFF pentru secuenţe duble, de C. R. ADAMS.

Idem. Vol. XXXIX. No. 5. Mai 1933. New-York. Adunarea din Februarie dela New-York, de J. R. KLINE. Adunarea din Martie dela Palo Alto, de B. A. BERNSTEIN. OSMOND STONE (1847—1893), de J. J. LUCK. Geometria intuiţională a lui HILBERT, de A. EMCH. OSGOOD asupra teoriei funcţiunilor, de A. A. BENNETT. Fundamentele geometriei diferenţiale ale lui VEBLEN-WHITEHEAD, de C. C. MAC DUFFER. Datele matematicilor, de H. BATEMAN. KAMKE asupra probabilităţilor, de E. L. DODD. DUBISLAV asupra fundamentelor matematicilor, de E. S. ALLEN. Rezumate de comunicări.

Idem. No. 6. Iunie 1933. Notă asupra seriei de măsură positivă, de H. BLUMBERG. Notă asupra giroscopului, de W. F. OSGOOD. Notă asupra unui sistem special ciclic, de M. FOSTER. Reducerea unei matrice la forma ei raţională canonică, de M. H. INGRAHAM. Asupra reprezentării numerelor mondulo m, de E. D. RAINVILE. Notă asupra unui articol, de B. F. KIMBALL. Asupra unei independenţe complecte a unui şir de postulate pentru câmpuri, de N. H. MCCOY. Asupra numărului de $(q+1)$ secante S_{q-1} a unui oarecare V_k^n în un $S_{qk+q+k+1}$, de B. C. WONG. Asupra convergenţii seriilor lui FOURIER, de W. RANDELS. O notă asupra compacităţei, de E. H. HANSON. O tratare mai apropiată a spaciului general topological, de W. O. GORDON. Notă asupra suprafeţelor cubice în câmpurile lui GALOIS de ordinul 2^n, de A. D. CAMPBELL. O metodă de comparare pentru reţele de linii drepte, de LUISA D. CUMMINGS. Sisteme diofantine reductibile, de E. T. BELL. Notă asupra propietăţii a patru puncte, de L. M. BLUMENTHAL. Un câmp modular asociat cu câmpul generalizat al lui KUMMER. $(p = 3)$, de E. R. OTT. Transformări involutoriale de linii determinate de involuţiile plane ale lui CREMONA, de J. M. KLARKSON. O teoremă de separaţiune, de W. A. WIHSON. Asupra determinantului VALDERMONDE generalizat şi funcţiunile simetrice, de A. DRESDEN Teoremele lui BLOCH pentru suprafeţele minima, de E. F. BECKENBACH. Convergenţa factorilor pentru seriile duble, de W. H. DURFEE.

The Mathematical Gazette. † Edward Mann Langley (22 Ianuarie 1851—9 Iunie 1933). Unele ecuaţii în legătură cu secţiunile plane în conicoid, de H. G. Green. Continuitate şi numere iraţionale, de G. J. Whitrow. Studiul statisticei în şcoli, de F. Sandon, C. O. Tuckey, J. Wishart, R. M. Wright, Hamley, Sheppard. Utilizarea simboalelor operatoare în sumarea seriilor algebrice, de H. Freeman. Dinamica fără ecuaţii diferenţiale, de V. V. Narlikar. Discriminarea grafică a cubicilor şi cuarticilor, de J. P. Dalton.

Boletin Matematico elemental. Anul IV. No. 3. Mai 1933. Buenos-Aires. O teoremă a paralelelor, de B. I. Baidaff.

Idem. Anul IV. No. 4. Iunie 1933. Buenos-Aires. Notaţiunile uzuale în triunghiu.

Boletin Matematico. Supliment informativ. Anul I. No. 3. Mai 1933. Buenos-Aires.

Journal de Mathématiques Elémentaires publié par H. Vuibert. Anul 57. No. 19. Iulie 1933. Paris.

Idem. Anul 57. Nr. 20. Iulie 1933. Paris.

Sphinx.. Anul III. No. 8. August 1933. Bruxelles. Regula lui Gauss pentru determinarea zilei Paştelor, de B. Laurel. Asupra împărţirii apropiate a cercului, de P. Poulet.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 5. Iulie 1933. Timişoara. Câteva teoreme în legătură cu terminaţiunea puterilor numerelor întregi, de I. V. Mătieş. Eroarea mediei aritmetice, de G. Leoben Vasiliu.

Maior I. Linteş. Studiu critic asupra uzurii gurilor de foc. Timişoara 1933.

Henri Galbrun. *Théorie mathématique de l'assurance invalidité et de l'assurance nuptialité. Calcul des primes et des reserves.* Paris. Gauthier-Villars, Editeur. 1933.

Acest volum este continuarea celui despre care am vorbit la pag. 342 din acest an. El conţine următoarele capitole: I. Capitalurile amânate şi rente viagere; II. Capitaluri datorate la moarte sau la sosirea unui eveniment: III. Anuităţi viagere cu folosinţă la sosirea evenimentului; IV. Ecuaţia generală a primelor; V. Teoria rezervelor matematice; VI. Aplicarea teoremei lui Tschebichef la prevederea soldurilor compturilor de categorii.

Tratarea chestiunilor este făcută în vederea aplicaţiunilor practice şi de aceea chestiunile sunt rezolvate cu formele simple şi adaptate calculelor numerice.

I. I.

Jean Chazy. **Cours de Mécanique Rationelle.** *Tome II. Dynamique des systèmes matériels.* Editure Gauthier-Villars, Paris. Este urmarea cursului făcut de D-l Chazy la facultatea de Ştiinţe din Paris, despre care am făcut o dare de seamă în numărul depe luna Aprilie 1933 al G. M. Este

conceput şi tratat în acelaşi spirit ca şi precedentul: clar, chestiunile tratate discutate amănunţit, în special din punctul de vedere analitic şi al principiilor, face un larg uz de metodele vectoriale.

Cuprinde următoarele capitole:

Cap. IX. Teoreme generale asupra mişcării sistemelor. Stabileşte, sub formă analitică şi vectorială, ecuaţiile universale în mişcarea sistemelor, atât pentru cazul când sistemul de comparaţie e considerat ca fix, cât şi în cazul când el are o mişcare cunoscută. In *Cap. X* se ocupă cu legea *Gravităţii Universale,* dă oare care noţiuni de mecanică cerească, arată cum se pune problema celor 2 corpuri, apoi pentru 3.... *n* corpuri. *Cap. XI. Momente de inerţie şi mişcarea unui corp solid în jurul unei axe fixe.* Face studiul obişnuit al momentelor de inerţie mecanice şi proprietăţile lor; de asemenea în ceeace priveşte proprietăţile mişcării unui corp solid în jurul unei axe şi reacţiunele axei. *Cap. XII. Mişcarea unui corp solid în jurul unui punct* este tratată prin introducerea unghiurilor şi ecuaţiilor lui EULER, examinează amănunţit cazurile POINSOT, LAGRANGE şi POISSON; face aplicaţiuni la giroscoape şi girostate. Tot în acest capitol se menţionează sumar problema mişcării unui corp solid liber. *Cap. XIII. Contactul corpurilor solide,* introduce noţiunele de frecări şi examinează efectul lor asupra mişcărilor. *Cap. XIV. Principiul lucrurilor virtuale,* stabileşte condiţiunile generale de echilibru cu ajutorul acestui principiu, precizând modul cum el trebue aplicat. *Cap. XV. Principiul lui* d'ALEMBERT *şi ecuaţiile lui* LAGRANGE. Reduce orice problemă de dinamică la una de statică; examinează cazul legăturilor holonoame şi stabileşte ecuaţiile LAGRANGE; examinează de asemenea legăturile neholonoame. *Cap. XVI. Stabilitatea echilibrului şi micile mişcări.* Stabileşte teorema lui DIRICHLET şi examinează diferite cazuri de mişcări ale unui sistem în jurul unei poziţiuni de echilibru stabil. *Cap. XVII. Ciocniri şi percursiuni.* Este capitolul cel mai desvoltat. Stabileşte ce devin teoremele generale ale dinamicei în timpul foarte scurt al unei ciocniri; aplică de asemenea la acest studiu principiile lucrurilor virtuale şi a lui d'ALEMBERT, stabileşte teorema lui CARNOT şi face diferite aplicaţiuni. *Cap. XVIII. Echilibru firelor.* Acest capitol poate fi considerat ca un fel de introducere în problema echilibrului şi mişcării sistemelor continui deformabile. Problema echilibrului unui fir inextensibil este discutată amănunţit în diferite ipoteze. *Cap. XIX. Hidrostatica.* Studiază problema echilibrului fluidelor în general, lichide sau gaze. Stabileşte condiţiunile comune de echilibru şi cele complimentare în cazul unui lichid sau unui gaz. Acest capitol se termină cu studiul echilibrului corpurilor plutitoare. *Cap. XX. Hidrodinamica.* Introduce mai întâiu variabilele lui LAGRANGE, apoi acelea ale lui EULER; examinează cazul când există un potenţial al iuţelelor, precum şi mişcările când nu există un asemenea potenţial. In fine ultimul *Cap. al XXI* se ocupă de teoria *atracţii şi potenţialului newtonian,* examinează cazurile centrelor atractive discontinui şi continui, stabileşte ecuaţiile lui LAPLACE şi POISSON, teoremele lui GAUSS, şi face diferite aplicaţii.

A. G. I.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 197. Ceram acolo date biografice asupra inginerului ELIE ANGELESCU, care a fost profesor de matematici în București.

In numărul din Monitor, de care vorbesc în Nota 53 din acest număr, găsesc un anunț al Pensionului ȘIAICARU-IONESCU, în care se spune că va avea ca profesor *„de matematică,* D. ANGHELESCU, care, terminându-și studiile în Francia, s'a numit Profesore de Matematică la Gimnaziul Mateiu Basarab".

Adaog aici și notița pe care am pus-o despre el în *„Istoricul Învățământului Inginerii în România"* pe care l'am tipărit în 1932 :

„Absolvent al Școalei centrale de arte și manufacturi din Paris. Profesor de matematici și autor de cărți didactice. Numit profesor de Geometrie și Trigonometrie la Anul preparator și de calcul diferențial și integral la Anul I al Școalei de Poduri, Sosele și Mine din București la 4 Noiemvrie 1867. Suprimat postul la 30 Iunie 1868. Numit din nou profesor la acea Școală în toamna anului 1870, profesor de topografie și nivelment la Anul I și de mecanică generală la Anul II, catedre la care a funcționat până în toamna anului 1873".

I. I.

DIVERSE

Distinsul colaborator și premiat al *Gazetei Matematice,* D-l TIBERIU POPOVICIU, a obținut titlul de Doctor în științele matematice la Facultatea de științe din Paris, cu teza pe care o anunțăm la Bibliografii.

F. GOMES TEIXEIRA, membru al Academii de științe din Coimbra a murit la etatea de 82 ani.

AUGUSTIN MESNAGER, membru al Academiei de științe din Paris, secțiunea de mecanică, și care a lăsat lucrări importante în domeniul mecanicii aplicate la arta inginerului, a încetat din viață.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3918. *Să se rezolve cu ajutorul trigonometriei dar fără ajutorul logaritmilor, ecuațiunile:*

$$1)\quad x^3 + 2x^2 - 1 = 0$$

$$2)\quad 2x^3 + x - 3 = 0.$$

ION S. ANTONIU.

1. Chestiunea rezolvirei unei ecuațiuni de gr. II cu ajutorul trigonometriei este tratată în toate manualele clasice de trigonometrie. Formulele de rezolvire sunt date, dealtfel, în toate formularele, aide-memoires, etc.

Reamintim în câteva cuvinte modul cum se rezolvă trigonometric ecuațiunea de gr. II.

Fie $$Ax^2 + Bx + C = 0$$

ecuațiunea ce voim să rezolvăm. Ecuațiunea poate avea rădăcini reale sau imaginare, după semnul realizantului

a) $$B^2 - 4AC \geqslant 0$$

ecuațiunea are rădăcini reale. Distingem 3 cazuri:

1°. $C > 0$.

Din

$$B^2 - 4AC \geqslant 0$$

$$\therefore \frac{4AC}{B^2} \leqslant 1.$$

punând

$$\frac{4AC}{B^2} = \sin^2\varphi$$

rădăcinile ecuației sunt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{B}{A}\sin^2\varphi \\ x_2 &= -\frac{B}{A}\cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

2°. $C < 0$

$$\therefore -\frac{4AC}{B^2} > 0$$

punem

$$-\frac{4AC}{B^2} = \operatorname{tg}^2\varphi$$

rădăcinile ecuației sunt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{B}{A} \cdot \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \\ x_2 &= -\frac{B}{A} \cdot \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

3°. $C = 0$.

Avem imediat

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{B}{A} \quad \text{(III)}$$

b) $B^2 - 4AC < 0$

ecuațiunea are rădăcini imaginare. Se deduce imediat că

$$\frac{4AC}{B^2} > 1$$

punem atunci

$$\frac{4AC}{B^2} = \sec^2\varphi$$

și rădăcinile ecuațiunei sunt

$$x_{1,2} = -\frac{B}{2A}(1 \mp i\,\mathrm{tg}\,\varphi) \qquad (i = \sqrt{-1}) \quad \text{(IV)}$$

Notă. — Toate aceste formule se deduc prin simple calcule trigonometrice, pornind dela formula generală de rezolvire a ecuației de gr. II.

2. In cazul particular al problemei 3918 avem:

a) Ecuațiunea (1), după ce am reparat factorul $(x + 1$. rămâne:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Avem:

$$B^2 - 4AC = 5 > 0$$

$$C = -1 < 0$$

rădăcinile ecuațiunei sunt date deci de grupul de formule (II) Calculând se găsește:

$$x_1 = 0{,}61803$$

$$x_2 = -1{,}61803$$

$$x_3 = -1.$$

b) Ecuațiunea (2), după reducerea factorului $(x - 1)$, ne dă

$$2x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\therefore \; B^2 - 4AC = -20 < 0$$

ecuațiunea are două rădăcini imaginare. Ele vor fi date de grupa (IV) de formule. Calculând se găsește:

$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm 1{,}11803\, i \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$x_3 = 1$$

toate calculile se fac cu ajutorul tabelelor de linii trigonometrice naturale, fără ajutorul logaritmilor.

Observațiune. — La pag. 35 vol. XXXVI, al *Gazetei Matematice* s'a publicat din eroare o soluțiune eronată a acestei probleme. In nota dela pag. 212 a aceluiaș volum s'a arătat acest lucru, chestiunea rămânând mai departe deschisă. Deatunci, nici un corespondent nu a mai încercat rezolvarea acestei probleme.

I. S. A.

PROBLEMA 4057. *Se dau două progresiuni a câte opt termeni, una aritmetică și alta geometrică. Știind că ambele progresiuni încep cu aceeași cifră, iar rația este de asemenea aceeași, se cere cele două progresiuni, în cazul când avem:*

$$l_1^2 = l_2 \text{ , între ultimii termeni}$$

$$7 \cdot S_1 = S_2 - 6 \text{ , între sume;}$$

indicele 1 fiind al progresiunei aritmetice și 2 al progresiunei geometrice.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Fie progresiunile;

$$\div \; a \;,\; (a + r) \;,\; (a + r) \;,\; \ldots \;(a + 7r)$$

$$\div\div \; a \;,\; a \cdot r \;,\; a \cdot r^2 \;,\; \ldots \; a \cdot r^7.$$

Conform enunțului problemei avem:

1) $$(a + 7r)^2 = a \cdot r^7$$

2) $$28\,(2a + 7r) = \frac{a\,(r^8 - 1)}{r - 1} - 6.$$

Presupunând a şi r întregi, atunci observăm din 1) că a şi r trebue să fie *pari* şi $a = Mr$. In acest caz, din 2) vedem că trebue să avem $6 = Mr$, deci r poate avea valorile (numai acele pare):

$$r = 2 \ , \ 6.$$

Pentru $r = 2$, ecuaţia 2) ne dă $a = 2$.

Pentru $r = 6$, ecuaţia 2) ne dă a subunitar.

Singurele progresiuni vor fi deci:

$$\div \ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$$
$$\div\div \ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.$$

A dat o soluţie algebrică D-l VARLAM M. PETRE.

Celelalte soluţiuni primite presupuneau dala inceput $a = r$.

Dacă a şi r n'ar fi întregi, atunci eliminând pe a am obţine, din cele două relaţii, ecuaţia:

$$49 \cdot r^{18} - 196 \cdot r^{17} - 6 \cdot r^{16} - 2744 \cdot r^{11} + 13902 \cdot r^{10} - 10522 \cdot r^{9} - 330 \cdot r^{8} + 38416 \cdot r^{4} - 87416 \cdot r^{3} - 25229 \cdot r^{2} - 2010 \cdot r + 36 = 0$$

a cărei soluţie găsită de corespondenţii Gazetei, o vom publica-o bucuroşi.

I. L.

PROBLEMA 4077. *Să se elimine* x *între relaţiile:*

$$a \sin\alpha \ (+ x) + b \sin \ (\beta + x) = c$$
$$a' \cos\alpha \ (+ x) + b' \cos \ (\beta + x) = c'.$$

N. C.

Soluţie dată de D-l CEZAR IVĂNESCU (student Iaşi).

Desvoltând şi grupând după $\cos x$ şi $\sin x$ relaţiile date se pot scrie:

$$\begin{cases} (a \sin\alpha + b \sin\beta) \cos x + (a \cos\alpha + b \cos\beta) \sin x = c \\ (a' \cos\alpha + b' \cos\beta) \cos x - (a' \sin\alpha + b' \sin\beta) \sin x = c'. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de ecuaţii în raport cu $\cos x$ şi $\sin x$ avem:

$$\cos x = \frac{c \ (a' \sin\alpha + b' \sin\beta) + c' \ (a \cos\alpha + b \cos\beta)}{(a \sin\alpha + b \sin\beta)(a' \sin\alpha + b' \sin\beta) + (a \cos\alpha + b \cos\beta)(a' \cos\alpha + b' \cos\beta)}$$

$$\sin x = \frac{c' \ (a \sin\alpha + b \sin\beta) - c \ (a' \cos\alpha + b' \cos\beta)}{(a \sin\alpha + b \sin\beta)(a' \sin\alpha + b' \sin\beta) + (a \cos\alpha + b \cos\beta)(a' \cos\alpha + b' \cos\beta)}$$

Dar

$$(a\sin\alpha + b\sin\beta)(a'\sin\alpha + b'\sin\beta) + (a\cos\alpha + b\cos\beta)(a'\cos\alpha + b'\cos\beta) =$$
$$aa'\sin^2\alpha + ab'\sin\alpha\ \sin\beta + a'b\ \sin\alpha\ \sin\beta + bb'\ \sin^2\beta +$$
$$aa'\cos^2\alpha + ab'\cos\alpha\cos\beta + a'b\cos\alpha\cos\beta + bb'\cos^2\beta =$$
$$aa'(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (ab' + a'b)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) +$$
$$bb'(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = aa' + bb' + (ab' + a'b)\cos\alpha(-\beta).$$

Eliminarea lui x se face ținând seama de relația:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Avem deci:

$$[c(a'\sin\alpha + b'\sin\beta) + c'(a\cos\alpha + b\cos\beta)]^2$$
$$+ [c'(a\sin\alpha + b\sin\beta) - c(a'\cos\alpha + b'\cos\beta)]^2 =$$
$$[aa' + bb' + (ab' + a'b)\cos(\alpha - \beta)]^2.$$

Dar

$$[c(a'\sin\alpha + b'\sin\beta) + c'(a\cos\alpha + b\cos\beta)]^2$$
$$+ [c'(a\sin\alpha + b\sin\beta) - c(a'\cos\alpha + b'\cos\beta)]^2 =$$
$$c^2[(a'\sin\alpha + b'\sin\beta)^2 + (a'\cos\alpha + b'\cos\beta)^2]$$
$$+ c'^2[(a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2] +$$
$$2cc'[(a'\sin\alpha + b'\sin\beta)(a\cos\alpha + b\cos\beta)$$
$$- (a\sin\alpha + b\sin\beta)(a'\cos\alpha + b'\cos\beta)] =$$
$$c^2(a'^2\sin^2\alpha + b'^2\sin^2\beta + 2a'b'\sin\alpha\sin\beta + a'^2\cos^2\alpha + b'^2\cos^2\beta + 2a'b'\cos\alpha\cos\beta)$$
$$+ c'^2(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta + a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta + 2ab\sin\alpha\sin\beta)$$
$$+ 2cc'(aa'\sin\alpha\cos\alpha + a'b\sin\alpha\cos\beta + ab'\sin\beta\cos\alpha + bb'\sin\beta\cos\beta$$
$$- aa'\sin\alpha\cos\alpha - ab'\sin\alpha\cos\beta - a'b\sin\beta\cos\alpha - bb'\sin\beta\cos\beta) =$$
$$c^2[a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos(\alpha - \beta)] + c'^2[a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)]$$
$$- 2cc'(ab' - a'b)\sin(\alpha - \beta).$$

Rezultatul eliminării este deci:

$$c^2[a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos(\alpha - \beta)] + c'^2[a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)] -$$
$$2cc'(ab' - a'b)\sin(\alpha - \beta) = [aa' + bb' + (ab' + a'b)\cos(\alpha - \beta)]^2.$$

Soluţii analoage date de D-nii: N. N. ALDEA (stud. Bucureşti); G. ŞT. ROŞCA; M. MARGULIUS şi ŞT. E. OLTEANU.

D-l MIRCEA L. NEGREA pune rezultatul eliminării sub forma:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\alpha+b\sin\beta}{a\cos\alpha+b\cos\beta}+\operatorname{arc\,tg}\frac{a'\cos\alpha+b'\cos\beta}{a'\sin\alpha+b'\sin\beta}$$

$$=\operatorname{arc\,sin}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\beta)}}$$

$$+\operatorname{arc\,sin}\frac{c}{\sqrt{a'^2+b'^2+2a'b'\cos(\alpha-\beta)}}.$$

Soluţii necomplete dela D-l Sub-Lt. I. C. SAVIN şi I. C. ŞOVA precum şi una nesemnată.

N. C.

PROBLEMA 4116. *Să se rezolve sistemul:*

$$x-y+\frac{x}{z}+\frac{y}{z^2}=0$$

$$y-z+\frac{y}{x}+\frac{z}{x^2}=0$$

$$z-x+\frac{z}{y}+\frac{x}{y^2}=0.$$

O. ORĂNESCU.

Vom considera prima ecuaţie, căci celelalte două se deduc din aceasta prin permutări circulare; o vom scrie în modul următor;

$$x\left(1+\frac{1}{z}\right)=y\left(1-\frac{1}{z^2}\right)=y\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right);$$

deci

$$(1)\quad 1+\frac{1}{z}=0 \text{ şi } (2)\quad x=y\left(1-\frac{1}{z}\right).$$

Din ecuaţia (1) avem:

$$z+1=0 \quad \therefore \quad z=-1.$$

O soluţie a sistemului este deci

$$x=y=z=-1.$$

Din ecuația (2) se deduce că sistemul dat, se poate înlocui prin următorul:

(3) $xz = y(z-1)$; $zy = x(y-1)$; $yx = z(x-1)$.

Adunând aceste ecuații avem:

$$xz + zy + yx = yz - y + xy - x + zx - z$$

(4) $$\therefore \quad x + y + z = 0.$$

Inmulțind ecuațiile (3) se obține:

$$x^2y^2z^2 = xyz\,(x-1)\,(y-1)\,(z-1).$$

(5) $\therefore \quad xyz = 0$ și (6) $xyz = (x-1)(y-1)(z-1)$.

Ecuația (5) nu dă soluții, întrucât dacă x, y sau z ar fi zero s'ar obține nedeterminare.

Desvoltăm ecuația (6):

$$xyz = xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1$$

sau, dacă ținem seama de ecuația (4):

(7) $$xy + yz + zx = -1.$$

Să înmulțim acum prima din ecuațiile (3) cu xz, a doua cu zy, a treia cu yx și să le adunăm.

Obținem:

(8) $x^2z^2 + z^2y^2 + y^2x^2 = xyz\,(z-1) + xyz\,(x-1) + xyz\,(y-1) =$

$xyz\,(x + y + z - 3) = -3xyz$, deoarece $x + y + z = 0$.

Să ridicăm ecuația (7) la patrat. Avem:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz\,(x + y + z) = 1$$

sau

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 1.$$

Ecuația (8) devine:

$$1 = -3xyz \quad \therefore \quad (9) \quad xyz = -\frac{1}{3}\,.$$

Sistemul dat se poate înlocui cu următorul, luând ecuațiile (4), (7) și (9):

$$x + y + z = 0$$

$$xy + yz + zx = -1$$

$$xyz = -\frac{1}{3}\,.$$

Soluțiile sistemului sunt date deci de rădăcinile ecuației:

$$X^3 - X + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{sau} \quad 3X^3 - 3X + 1 = 0.$$

Făcând transformarea $X = \frac{Y}{3}$ se obține:

$$Y^3 - 9Y + 9 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații aflate printr'una din metodele cunoscute, sunt:

$$Y_1 = -3{,}41154 \; ; \; Y_2 = 2{,}22639 \; ; \; Y_3 = 1{,}18515$$

și deci rădăcinile sistemului sunt:

$$X_1 = \frac{Y_1}{3} = -1{,}13718 \; ; \; X_2 = \frac{Y_2}{3} = 0{,}74213 \; ;$$

$$X_3 = \frac{Y_3}{3} = 0{,}39505.$$

Verificând în sistemul propus aceste valori, se găsește că singurele soluții sunt:

a) $x = -1{,}13718 \; ; \; y = 0{,}74213 \; ; \; z = 0{,}39505$

b) $y = -1{,}13718 \; ; \; z = 0{,}74213 \; ; \; x = 0{,}39505$

c) $z = -1{,}13718 \; ; \; x = 0{,}74213 \; ; \; y = 0{,}39505$

cari împreună cu $x = y = z = -1$,

dau patru grupe de soluții pentru sistemul propus.

Observațiuni.

1. Au rezolvat problema pe o cale mai lungă și într'un mod mai puțin riguros D-nii: Șt. E. Olteanu și I. I. Petrescu.

2. A discutat problema, fără a ajunge la rezultat D-nul I. C. Savin.

3. Soluție cu totul incomplectă dela D-nul I. Curchi.

4. D-nul V. Godeanu pe o cale foarte scurtă găsește soluții, cari au păcatul că nu verifică sistemul.

O. Or.

PROBLEMA 4143. *Pe o linie de autobuze statul încasează o taxă anuală de 120.000 lei. Să se calculeze, ținând seamă că dobânda legală este de 9%, suma care trebuie să o primească statul odată pentru totdeauna, dacă ar voi să concesioneze dreptul de folosință al acestei linii în următoarele două ipoteze:*

1. Chiria anuală ar crește cu 3% pe an.

2. Chiria ar crește cu 5000 lei pe an.

I. B. Florescu.

Soluție dată de D-l I. N. SAGER :

1. Pentru concesionare, statul trebuie să primească în prima ipoteză :

$$S_1 = 120.000 + \frac{120.000 + 1,03}{1,09} + \ldots + \frac{120.000 \times 1,03^n}{1,09^n} .$$

Sau făcând însumarea :

$$S_1 = 2.180.000 \text{ lei.}$$

2. In a doua ipoteză :

$$S_2 = 120.000 + \frac{120.000 + 5000}{1,09} + \ldots + \frac{120.000 + 5000 \times n}{1,09^n}$$

$$= 120.000 \cdot \left[1 + \frac{1}{1,09} + \ldots + \frac{1}{1,09^n} + \ldots\right]$$

$$+ 5000 \cdot \left[\frac{1}{1,09} + \frac{2}{1,09^2} + \ldots + \frac{n}{1,09^n} + \ldots\right] .$$

Prima paranteză are valoarea :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1,09}} = \frac{109}{9}$$

iar a doua paranteză se mai poate scrie :

$$\frac{1}{1,09} + \frac{1}{1,09^2} + \ldots + \frac{1}{1,09^n} + \ldots$$

$$\frac{1}{1,09^2} + \ldots + \frac{1}{1,09^n} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1,09^n} + \ldots$$

Ori însumând pe rând fiecare linie găsim :

$$S^2 = 2.126.172,82 \text{ lei.}$$

Așa dar în prima ipoteză statul este mai avantajat.

Notă. — 1. A rezolvat problema făcând însă greşeli de calcul şi D-l M. MARGULIUS.

2. In general dacă C este taxa anuală de concesiune, α la leu, este creşterea valoarei liniei pe an şi t la leu, este dobânda legală, atunci pentru stat este mai avantajoasă prima ipoteză, dacă:

$$A < C \cdot \frac{t\alpha}{t-\alpha}$$

şi a doua ipoteză, dacă:

$$A > C \cdot \frac{t\alpha}{t-\alpha}$$

unde A este suma cu care creşte taxa anuală de concesiune.

I. L.

---

*PROBLEMA 4193. *Se ştie că produsul a patru numere consecutive mărit cu unitatea este un pătrat perfect. Considerând produsul primelor* p *numere consecutive se întreabă:*

1°. *Câte pătrate perfecte distincte putem obţine până la* p, *luând în toate modurile posibile produsul a patru numere consecutive inferioare lui* p *şi formând pătratele perfecte respective.*

2'. *Până la cel mai mare pătrat perfect din cele formate ca la (1°) câte pătrate perfecte mai există din acelea ce nu răspund legii enunţate.*

CĂPITAN GH. NICULESCU.

Soluţie dată de D-nii: N. N. ALDEA (st. mat. Buc.), CEZAR IVĂNESCU (st. Iaşi) şi MARIUS MARGULIUS (Buc.).

1°. Fie:

$$1, 2, 3, 4 \ldots p-3, p-2, p-1, p$$

primele p numere consecutive. Din acest şir putem forma următoarele produse distincte de patru numere consecutive:

$$1.2.3.4 ; 2.3.4.5 ; \ldots (p-3)(p-2)(p-1)p$$

şi se observă cu uşurinţă că numărul lor este:

$$p-3$$

care este şi numărul pătratelor cerute de (1°).

2°. Ultimul din pătratele formate ca la (1°) este şi cel mai mare. Valoarea lui este:

$$p(p-1)(p-2)(p-3)+1 = (p^2-3p+1)^2.$$

Numărul tuturor pătratelor dinaintea lui este:

$$p^2 - 3p.$$

Intre acestea se găsesc şi cele din (1^0) în număr de:

$$p - 3 - 1 = p - 4.$$

Dacă scădem pe acestea din numărul total, obţinem:

$$p^2 - 3p - p + 4 = p^2 - 4p + 4 = (p - 2)^2$$

care reprezintă numărul pătratelor cerute în punctul 2^0 al problemei şi care şi acest număr este un pătrat perfect.

PROBLEMA 4209. *Ecuaţia* $x^4 + 4x - a = 0$ *are cel mult o singură rădăcină de modul subunitar, oricare ar fi* a *real.*

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-l I. ZARDA (Student Cluj).

Insemnând cu x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei propuse. Vom demonstra proprietatea în cazurile $a < 0$ şi $a > 0$.

Când $a < 0$, ecuaţia nu are nici o rădăcină pozitivă, în baza teoremei lui DESCARTES, dar poate avea două rădăcini negative, fie x_1 şi x_2. Singura rădăcină reală a ecuaţiei derivate fiind -1, rezultă, în baza teoremei lui ROLLE, că o singură rădăcină negativă e cuprinsă în intervalul $-1,0$, fie x_1; cealaltă rădăcină negativă, x_2 e inferioară lui -1. Rădăcinile x_3 şi x_4 sunt imaginare conjugate. Insă relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini dau:

$$x_3 + x_4 = -(x_1 + x_2)$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0$$

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -4$$

de unde:

$$(x_1 + x_2) = -(x_3 + x_4)$$

$$x_1x_2 = (x_3 + x_4)^2 - x_3x_4 = x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2$$

$$(x_3^2 + x_4^2)(x_3 + x_4) = -4.$$

Insă rădăcinile x_3 şi x_4 sunt imaginare conjugate, deci

$$|x_3| = |x_4|$$

şi prin urmare:

$$4 < [|x_3|^2 + |x_4|^2][|x_3| + |x_4|] = 4|x_3|^3$$

de unde:

$$| x_3 | = | x_4 | > 1.$$

Proprietatea e stabilită în acest caz: Dacă ecuația are două rădăcini reale negative una e de modul subunitar; celelalte trei rădăcini ale ecuației sunt de modul supraunitar.

Dacă ecuația propusă nu are rădăcini reale, x_1 și x_2 sunt și ele imaginare conjugate. Eliminând atunci pe x_3 și x_4 între cele trei relații scrise mai sus între coeficienți și rădăcini, obținem în mod analog $| x_1 | = | x_2 | > 1$ și deci în acest caz, când toate rădăcinile sunt imaginare, ele sunt toate de modul supraunitar.

Când $a > 0$, ecuația are o răducină pozitivă și una negativă, în baza teoremei lui DESCARTES. Celelalte două rădăcini sunt imaginare conjugate x_3 și x_4 și raționamentul din cazul I dă imediat:

$$| x_3 | = | x_4 | > 1.$$

Cât despre rădăcinile reale x_1 și x_2, ele sunt separate, în baza teoremei lui ROLLE, prin rădăcina -1 a ecuației derivate. Deci:

$$x_2 < -1 \quad , \quad x_1 > -1.$$

In orice caz, avem deci $| x_2 |$, $| x_3 |$ și $| x_4 | > 1$, iar $| x_1 |$ poate fi sau subunitar, sau supraunitar. Enunțul problemei e astfel demonstrat.

Pentru cazul $a > 0$ se pot întrebuința și *alte considerații*, care dau mai multă precizie asupra limitării lui $| x_3 |$ și $| x_4 |$. Rădăcinile x_3 și x_4 sunt cele două rădăcini imaginare conjugate, pe care le are sigur ecuația propusă.

Pe de altă parte:

$$f(-2) = 8 - a \quad f(-1) = -3 - a < 0 \quad f(0) < 0 \quad f\left(\frac{a}{4}\right) > 0.$$

Se ivesc două cazuri, după cum $a < 8$ sau $a > 8$.

Dacă $a < 8$, avem în baza șirului precedent:

$$0 > x_2 > -2 \qquad x_1 < \frac{a}{4}$$

$$| x_1 x_2 | < \frac{a}{2}.$$

Dar

$$| x_1 x_2 x_3 x_4 | = a,$$

Rezultă:

$$| x_3 x_4 | = | x_3 |^2 = | x_4 |^2 > 2$$

$$| x_3 | = | x_4 | > \sqrt{2}$$

şi

$$| x_1 | < 2 \quad ; \quad 1 < | x_2 | < 2.$$

Dacă $a > 8$, rădăcina pozitivă x_1 e cuprinsă între 1 şi $\frac{a}{\sqrt[4]{2a}}$, căci

$$f(1) = 5 - a < 0 \quad f\left(\frac{a}{\sqrt[4]{2a}}\right) = \frac{a^3}{2} - a + \frac{4a}{\sqrt[4]{2a}} > 0.$$

Pe de altă parte $x_2 > -\sqrt[4]{2a}$, căci

$$f\,0 < 0 \quad f(\sqrt[4]{2a}) = a - 4\sqrt[4]{2a} > 0$$

în baza faptului că $a > 8$.

Rezultă de aci

$$| x_1 x_2 | < a$$

şi cum $(x_1 x_2 x_3 x_4) = a$, urmează $(x_3 x_4) = (x_3)^2 = (x_4)^2 > 1$, aşa că enunţul se poate demonstra şi fără utilizarea teoremei lui ROLLE.

PROBLEMA 4212. *Să se găsească numerele întregi* m *şi* n *ştiind că* m^n *are* n *cifre iar* n^m *are* m *cifre.*

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: AVRAM N. C. (Sub-Locot. din geniu), ZIFF S. M.

m^n şi n^m având respectiv câte n şi m cifre, urmează că:

$$m^n < 10^n \quad \therefore \quad m < 10$$

$$n^m < 10^m \quad \therefore \quad n < 10.$$

Deci m şi n sunt numere de o cifră. Ridicând succesiv pe fiecare din numerele de o cifră la puterile 1, 2, . . . 9 se găsesc următoarele 4 soluţii ale problemei:

1) $m = n = 1$ căci 1^1 are 1 cifră.

2) $m = n = 8$ căci $8^8 = 16777216$ are 8 cifre.

3) $m = 8$ şi $n = 9$ căci

$$8^9 = 134217728 \quad \text{şi} \quad 9^8 = 43046721$$

au respectiv 9 şi 8 cifre.

4) $m = n = 9$ căci $9^9 = 387420489$ are 9 cifre.

Dacă se elimină cazul $m = n$ se vede că problema admite numai soluţia

$$m = 8 \; ; \; n = 9.$$

Notă. Cazul $m = n$ face obiectul problemei 1043 propusă de D-l Col. Gh. Buicliu şi rezolvată la pagina 192, Vol. XI, *Gazeta Matematică.*

PROBLEMA 4231. *Cu numerele prime până la 100 să se formeze o progresie aritmetică cât mai lungă.*

I. Ionescu.

In afară de 2, numerele prime fiind neperechi, diferenţa a două dintre ele este pereche. Deci raţia trebue să fie pereche, dacă în compunerea progresiei nu intră şi 2. Altfel ar putea fi şi nepereche. Dar atunci nu am putea avea decât cel mult un termen înaintea şi altul în urma lui 2, căci diferenţa dintre celelalte numere prime, care ar mai putea fi în progresiune, dau o raţie pereche. Aşa dar utilizând şi numărul prim 2 cea mai lungă progresie aritmetică cu numere prime este 1 . 2 . 3, având trei termeni.

Numărul prim 3 nu poate intra în progresiuni cu mai mult de trei termeni, de oare ce raţia neputând fi $\mathcal{M}3$ va fi $\mathcal{M}3 \pm 1$, şi deci termenii după 3 ar fi $\mathcal{M}3 \pm 1$, $\mathcal{M}3 \pm 2$, $\mathcal{M}3$. Progresia nu ar putea avea decât trei termeni primi, cu excepţia progresiei 1 . 3 . 5 . 7 care are patru termeni întru cât are şi un termen înainte de 3.

Celelalte numere prime sunt de forma $\mathcal{M}6 \pm 1$. Raţia fiind pereche poate fi de forma $\mathcal{M}6$ sau $\mathcal{M}6 \pm 2$. Această formă adunată cu cea de mai înainte a numerelor prime dă $\mathcal{M}6 \pm 3$ care nu poate fi prim. La numerele prime de forma $\mathcal{M}6 \pm 1$ vom aplica dar raţii de forma $\mathcal{M}6 \pm 4$. Atunci termenul următor e de forma $\mathcal{M}4 \pm 5$, iar după acesta vine unul de forma $\mathcal{M}6 \pm 9$ care nu mai e prim. Nu rămâne dar decât să luăm raţii de forma $\mathcal{M}6$ dacă voim să avem progresii cu mai mult de patru termeni, ca progresia găsită mai sus 1 . 3 . 5 . 7.

Pentru ca ultimul termen al progresiei să nu treacă de 100, cum se cere prin enunţ, şi pentru ca progresia să aibă cel puţin 5 termeni, raţia nu poate trece de $100/4 = 25$. Deci raţii admisibile sunt 6, 12, 18 şi 24. Pentru ca să ne iasă progresii cu 5 termeni, primii termeni trebue să nu întreacă 97 micşorat cu de 4 ori aceste raţii adică 73, 49, 25 şi 1. Ultimul caz este inadmisibil căci al doilea termen al progresiunii ar fi $1 + 24 = 25$ care nu mai este număr prim. Să examinăm acum celelalte raţii.

Dacă raţia este 6, termenii progresiei se formează din primul adunându-i pe rând pe 6, 12, 18, 24. Primul termen nu se poate termina cu 9, 3, 7 sau 1 căci atunci al doilea, sau al treilea, sau al patrulea, sau al cincilea sunt $\mathscr{M}5$. Nu rămâne dar de încercat decât cazul când numărul 5 este primul termen. Progresia are atunci cinci termeni: 5 . 11 . 17 . 23 . 29.

Dacă raţia este 12, ultimii patru termeni se formează din primul, adunându-i 12, 24, 36, 48. Se vede, ca şi mai sus, că numai cazul când primul termen este 5 ne-ar putea da o progresiune cu cinci termeni primi. Găsim în adevăr soluţia 5 . 17 . 28 . 41 . 53.

Dacă raţia este 18, ultimii patru termeni se fac din primul adunându-i 18, 36, 54 şi 72. Acelaşi raţionament ne arată că şi aci primul termen nu poate fi decât 5. Găsim progresia 5 . 23 . 41 . 59 numai de patru termeni, căci termenul următor 77 nu mai e număr prim.

Problema admite dar două soluţiuni şi anume progresiunile de cinci termeni:

5 . 11 . 17 . 23 . 29 şi 5 . 17 . 29 . 41 . 53.

Aceste progresiuni nu mai pot fi prelungite căci termenii următori ar fi 35 şi 65 care nu sunt primi.

I. I.

Au rezolvat bine problema prin încercări D-nii: Sub.-Lt. Avram N. Const., Ziff S. Martin, C. Chiriac, Godeanu Ig. Vasile, Mareş I. Emilian.

*EXERCIŢII

38. In ce raport stau două numere a şi b ştiind că mediile lor aritmetică, geometrică şi armonică formează laturile unui triunghiu dreptunghiu.

Gh. Vasiliu-Leoben.

R. Cum media aritmetică este mai mare ca celelalte două medii, avem conform enunțului că :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab + \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$$

de unde urmează :

$$a^4 + b^4 = 18a^2b^2$$

sau încă

$$a^2 - b^2 = 4ab.$$

Pentru fixarea ideilor luând $a > b$ găsim că raportul căutat este:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{5} + 2.$$

39. Să se rezolve sistemul

$$xy - a(x+y) = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = b.$$

Sub.-Loc. I. C. Savin.

R. Din prima scoatem: (1) $xy = a(x+y)$ iar a doua se poate scrie

$$(x+y)^2 - 2xy - b = 0 \quad \therefore \quad (x+y)^2 - 2a(x+y) - b = 0$$

de unde scoatem

$$x + y = a \pm \sqrt{a^2 + b}$$

și cu ajutorul lui (1)

$$xy = a\left(a \pm \sqrt{a^2 + b}\right)$$

care ne spun că x și y sunt rădăcinile ecuației

$$t^2 - \left(a \pm \sqrt{a^2 + b}\right) t + a\left(a \pm \sqrt{a^2 + b}\right) = 0$$

adică

$$x, y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b} \pm \sqrt{b \mp 2a\sqrt{a^2 + b} - 2a^2}}{2}.$$

40. Să se găsească expresia derivatei de ordinul n a produsului

$$y = \sin(p+q)x \cdot \cos(p-q)x.$$

Ar. Ștefănescu.

R. Avem

$$y = \tfrac{1}{2}(\sin 2px + \sin 2qx)$$

și ținând seamă că

$$(\sin 2px)^{(n)} = 2^n p^n \sin\left(2px + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin 2qx)^{(n)} + 2^n q^n \sin\left(2qx + n\frac{\pi}{2}\right)$$

găsim

$$y^{(n)} = 2^{n-1}\left[p^n \sin\left(2px + n\frac{\pi}{2}\right) + q^n \sin\left(2qx + n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

PROBLEME PROPUSE

*4281. Să se determine α şi β astfel încât, dacă $N = 3^{\alpha} . 5^{\beta}$ să avem:

$$\sum_{1}^{n} \varphi_i = N,$$

unde φ_i este indicatorul de ordinul i al lui N.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

*4282. Să se arate că suma puterilor a 9-a a două numere nu se divide cu 27 decât dacă suma membrilor se divide cu 9.

Ce se întâmplă dacă unul din cele două numere se divide cu 9?

SUB.-LOCOT. ION C. SAVIN.

4283. Se consideră un număr întreg $N = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ descompus în factori primi şi se pune $F_1(N) = 1 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n$, $F_2(N) = F_1(F_1(N))$, $F_3(N) = F_1(F_2(N))$, ... etc.

Să se arate că oricare ar fi N valorile finale a lui $F_1(N)$ sunt 7 şi 8 cari se alternează.

Să se examineze aceeaşi problemă când $F_1(N)$ se defineşte prin suma $1 + \alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n$.

TIB. POPOVICIU.

*4284. Să zicem *pseudo-romb* patrulaterului care are diagonalele perpendiculare pe mijlocul numai a uneia din ele. Să se dea proprietăţi ale acestei figuri. (Problemă investigativă).

I. IONESCU.

*4285. Intr'un triunghiu ABC se consideră paralelele $D_c E_b$, $D'_c E'_b$ la latura BC aşa ca:

$$D_c E_b = BD_c . CE_b \quad , \quad D'_c E'_b = BD'_c . CE'_b ,$$

şi dreptele analoage $D_a E_c$, $D'_a E'_c$ şi $D_b E_a$, $D'_b E'_a$ relative la laturile CA şi AB. Să se demonstreze: 1) că dreptele AD_a, BD_b, CD_c şi AE_a, BE_b, CE_c sunt concurente; 2) că punctele D'_a, D'_b, D'_c sunt colineare, ca şi E'_a, E'_b, E'_c.

Să se dea câteva proprietăţi ale acestor puncte şi ale acestor drepte.

V. THÉBAULT.

4286. Axul de omologie dintre triunghiul format de centrele cercurilor exînscrise triunghiului de referinţă şi triunghiul pedal al punctului lui NAGEL este ax radical al cercurilor circumscrise acestui ultim triunghiu şi triunghiului de referinţă.

CONST. IONESCU-BUJOR.

4287. Fără a se desvolta determinantul să se deducă identitatea :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c & 0 \\ 0 & a & 0 & b & c \end{vmatrix} \equiv a^2c^2(a+b+c).$$

Generalizare.

ALEXANDRU AL. ROŞU.

4288. Se consideră determinantul circular de ordinul n:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots x_n \\ x_n & x_1 & x_2 \ldots x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 \ldots x_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2 & x_3 & x_4 \ldots x_1 \end{vmatrix}$$

Să se arate că dacă n este par, în desvoltarea acestui determinant nu se află termenul $x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_n$.

N. BOTEA.

4289. Pe o dreaptă fixă Δ, din plan, se ia un punct fix O. Fie M un punct din plan, M_1 inversul său faţă de O (puterea de inversiune fiind 1), M_2 simetricul lui M_1 faţă de Δ şi M_3 simetricul lui M_2 faţă de O. Să se găsească locul punctului M, aşa fel ca distanţa dintre el şi M_3 să fie constantă. Să se construiască acest loc.

GH. TH. GHEORGHIU.

4290. Să se determine mişcarea plană pentru care avem în fiece moment:

$$\begin{cases} v^2 + a^2 = m^2 + n^2 \\ v . a . \sin\theta = m . n \end{cases}$$

unde v, a, şi θ sunt viteza, acceleraţia şi unghiul direcţiilor lor în orice moment, iar m şi n două constante cunoscute.

D. PÂRVU.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

Aritmetica

		Pag.
I. B. Florescu	Asupra şirului lui Fibonacci	168, 203

Geometria

V. Thébault	Quelques propriétés du triangle rectangle . .	41
V. Thébault	Sur trois figures semblables	81
V. Thébault	Orthopôle et théorème du Droz-Farny . . .	161
M. Niculescu	Chestiuni din geometria triunghiului	163
V. Thébault	Sur le théorème de Feuerbach	281
V. Thébault	Sur les cercles tangents à trois cercles	403

Geometria analitică

N. G. Botea	Proprietăţi ale triunghiului	206, 241, 367
Al. Scodranu	Construcţia normalei la cuartică	286
R. Goormaghtigh	Construction de la normale aux courbes de Lamè d'indices entiers	401
Gh. Th. Gheorghiu	Asupra curbelor de gr. IV	449

Invăţământ

I. Ionescu	Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematică (urmare)	44
G. Călugăreanu	Noui lecţii făcute de savanţii străini la Universitatea din Cluj	121
I. Ionescu	Invăţământul Aritmeticei în liceele noastre	361, 406, 441

Istoria Matematicilor Pag.

P. V. Cazanacli — Un vechiu manuscript de Aritmetică . . . 283, 323

Diverse

R. Racliș — Congresul internațional al matematicienilor . . 83
P. Sergescu — Vasile Conta 87
C. E. Gabrielescu — † Ștefan N. Mirea 201

Chestiuni referitoare la Societatea „Gazeta Matematică"

⁂ — Lista membrilor Soc. „Gazeta Matematică" . . 5
⁂ — Membrii decedați 15
G. Țiteica — Rezumatele articolelor publicate in „Gazeta Matematică" 15
Al. Bunescu, Col. G. I. Liteanu și P. Orășeanu — Concursul „Gazetei Matematice" 16
I. Bușilă și G. Iliescu — Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „Gazetei Matematice" pentru cursul anului 1932—1933 18
Col. Liteanu, Căp. Gh. Niculescu și Ing. C. Orășeanu — Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" pe anul 1931—1932 49
N. Botea, Col. G. Buicliu și Col. Gh. Liteanu — Premiul „Ing. Al. Roșu" 124
⁂ — Regulamentul fondului „V. Cristescu" 125
Delegația Societății — Premiul „Inginer H. Capriel" 125
⁂ — Regulamentul fondului „Spiru Haret" 170
⁂ — Regulamentul fondului „Lt. Col. Gh. A. Tănăsescu" 171
Delegația Societății — Concursul „Gazetei Matematice" 211
⁂ — Regulamentul fondului „Gl. Sc. Panaitescu" . 213
⁂ — Regulamentul fondului „Vasile Conta" 246
⁂ — Regulamentul fondului „Anghel Saligny" . . . 289
G. Țițeica — Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1933 321
Ing. G. Orășeanu, Al. Pantazi și O. N. Țino — Premiul „Inginer H. Capriel" 327
⁂ — Regulamentul fondului „Inginer H. Capriel" . 327
N. Botea, Col. Liteanu și Căp. G. Niculescu — Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „V. Cristescu" 373
Ing. C. Orășeanu, Al. Pantazi și O. N. Țino — Asupra premiului „Inginer H. Capriel" 373
Delegația Societății — Premiile „Gazetei Matematice" pentru concursul ținut în anul 1933 413

B. NOTE MATEMATICE

			Pag.
1.	*I. Ionescu*	Timpul ca măsură a suprafaţelor	21
2.	*Malpig*	O curbă trisectoare	21
3.	*Căp. G. N.*	Asupra problemei 3438	23
4.	*P. M. Varlam*	Asupra problemei 4136	23
5.	*V. Thébault*	Curiosités arithmétiques	50
6.	*V. Thébault*	Sur certaines formules du triangle	51
7.	*O. N. Ţ.*	Asupra problemei 274 din „Reçueil de problémes de Mathématiques" par C. A. LAISANT (vol. II)	53
8.	*Mănescu Mircea*	Generalizarea problemei 4149	87
9.	*T. P.*	Asupra notei 10 din G. M. vol. XXXVII p. 92	88
10.	*C. N. Drâmbă-Putna*	O nouă demonstraţie a proprietăţei: „Înălţimile unui triunghiu sunt bisectoarele triunghiului său ortic"	89
11.	*Căp. Gh. Niculescu*	Alte triunghiuri $(\Delta)_0$	89
12.	*I. V. Mătieş şi I. I.*	Asupra problemei 4136	90
13.	*Abramescu Mariana*	O aplicaţie a coordonatelor tangenţiale . . .	91
14.	*N. N. Mihăileanu*	Generalizarea problemei 4110	92
15.	*V. Thébault*	Sur les produits de quatre nombres entieres .	126
16.	*I. Ionescu*	Probleme investigative	127
17.	*I. Ionescu*	Soluţiile în numere diferite, de o cifră ale ecuaţiei: $xx' + yy' = zz'$	128
18.	*C. Ivănescu*	Asupra problemei 4087	129
19.	*I. B. Florescu*	Soluţiile întregi ale ecuaţiei $\sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$	130
20	*T. Popoviciu*	Asupra pr. 2308 şi asupra notei 3 din G. M. vol. XXI, p. 17	131
21.	*V. Thébault*	Curiosités arithmétiques	171
22.	*G. I. Dumitrescu*	Asupra unei teoreme clasice din geometria în spaţiu	173
23.	*T. P.*	Asupra notei 40 din „G. M." vol. 37 p. 446 .	174
24.	*I. V. Mătieş*	Asupra articolului: „ Asupra ultimului grup de p cifre ale pătratelor perfecte"	175
25.	*I. I.*	Asupra indicatorilor	214
26.	*V. Thébault*	Sur des formules relatives aux triangles . . .	215
27.	*I. B. F.*	Asupra ex. 24 vol. 37	216
28.	*H. P. Ionescu-Biss*	Asupra problemei 4149	216
29.	*H. P. Ionescu-Biss*	O nouă generalizare a problemei 4110	217
30.	*I. C. Vasiliu*	Asupra conicelor înscrise într'un triunghiu . .	218
31.	*I. B. Florescu*	Asupra şirului: $P_n = q\ P_{n-1} + q\ P_{n-2}$ . . .	246
32.	*I. B. Florescu*	Asupra problemei 2608	247
33.	*Gh. Th. Gheorghiu*	Asupra unor relaţii dintre elementele unui triunghiu	248

		Pag.
34. *Col. Gh. Buicliu*	Asupra unui loc geometric	250
35. *V. Thébault*	Sur le triangle isoscèle	251
36. *C. Cinski, R. Dumitrașcu, P. Ghișoiu, C. Lupescu, N. Mihăileanu, M. L. Negrea, I. Parepeanu, C. Rusu și I. Zarda*	Asupra problemei 3937	251
37. *A. Pârvu*	Asupra unei probleme	252
38. *N. N. Mihăileanu*	Proprietăți în legătură cu cubica lui Darboux	254
39. *Col. Gh. Buicliu*	Asupra problemei 3872	291
40. *N. G. Botea*	Asupra articolelor: „Proprietăți ale triunghiurilor" din G. M. vol. 38 p. 206 și 241	292
41. *A. Niculescu*	Asupra unei teoreme de geometrie	294
42. *N. B.*	Asupra articolului: „Chestiuni din geometria triunghiului" de M. Niculescu (G. M. 38 p. 163)	294
43. *Col. Gh. Buicliu*	Rectificări la Nota 39	328
44. *M. Germănescu*	Asupra unor note	32
45. *I. B. F.*	Asupra notei No. 24	330
46. *I. B. Florescu*	Asupra unor medii	331
47. *M. Niculescu*	Asupra notei No. 42	333
48. *A. C. Gheorghiu*	Asupra problemei 4110	333
49. *Col. Gh. Buicliu*	Resturile diviziunei lui N^2 și N^3 prin 101	374
50. *Al. Niculescu*	Asupra problemei 2695	376
51. *M. Margulius și I. L.*	Asupra problemei 4007	414
52. *C. Ivănescu*	Identități și inegalități algebrice	415
53. *I. I.*	Anunțuri de cărți matematice în „Monitorul Oficial"	454
54. *I. I.*	Asupra unor medii	455
55. *Col. Gh. Buicliu*	Serie de locuri geometrice	455
56. *Gh. Th. Gheorghiu*	Asupra problemei 2809	458
57. *Cpt. Gh. N.*	Asupra problemei 4176	458

C. CHESTIUNI DE EXAMEN

Școala Politechnică „Regele Carol II" din București	Sesiunea lunie 1932	54
	Examen de admitere în anul preparator	140
	Examenul de admitere în Ciclul I	219
Universitatea din Cluj Facultatea de Științe	Sesiunea lunie 1932	133
	Sesiunea lunie 1932	176
	Sesiunea Octomvrie 1932	255
Școlile militare, pregătitoare și speciale ale Aeronauticei „Regele Carol II"	Examenul de admitere din August 1932	178

		Pag.
Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti	Sesiunea Octomvrie 1932	295
Gazeta Matematică	Concursul din anul 1933	335

D. BIBLIOGRAFII

Cărţi

***	Statutele şi Regulamentele fondurilor Societăţei „Gazeta Matematică"	24
Eug. Blanc	Problèmes et compléments de mécanique, Paris—Gauthier-Villars et C-ie, 1931 . . . 94,	143
R. Wavre	Figures planétaires et géodésie (Fasc. XVIII din „Cahiers scientifiques" publicate sub dir. D-lui G. Julia). Gauthier-Villars et C-ie, 1932, Paris	94
N. N. Ganea	Calculul betonului armat. Vol. I, II şi III. Bucureşti, 1932 94,	264
R. Risser	Aplications de la statistique à la démographie et à la biologie. Paris 1932 Gauthier-Villars et C-ie.	144
R. de Montessus de Ballore	La méthode de Corrélation—Paris 1932, Gauthier-Villars & C-ie	181
G. Julia	Exercices d'analyse. Tome II, Paris 1933. Gauthier-Villars & C-ie	182
	Idem, Tome III	341
G. Juvet	Leçons d'analyse vectorielle. Première Parte: Géométrie différentielle de courbes et des surfaces. Théorie mathématique des champs. Librairie F. Rouge & Gauthier-Villars, Paris 1933	299
R. Risser et C. E. Traynard	Les principes de la statistique mathématique. Paris 1933. Gauthier-Villars	299
***	Anuarul liceului şi Şc. Comerciale „M. Kogălniceanu"	300
J. Chazy	Cours de Mécanique Rationelle. Tome I. Dynamique du point materiel.	301
R. L. More	Fondations of point set theory. New-York 1932 (Publicat de American Mathematical Society in colecţiunea: „Colloquium publications" Vol. XIII) 341,	418
J. F. Ritt	Differential equations from the algebraic standpoint, New-York 1933 (Publicat de American Mathematical Society, în colecţia „Colloquium publications" Volume XIV, . . 341,	419

		Pag.
M. H. Stone	Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. New-York 1932 (Publicat de American Mathematical Society în colecţiunea: „Colloquium publications". Vol. XV)	341, 420
E. Ceck	Trois théorèmes sur l'Hormologie. Brno 1931 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk)	341
E. Ceck	Réseaux R à invariants égaux. Brno 1931 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk)	341
J. Zahradnicek	Acţiunea forţei substanţelor radioactive asupra balanţei lui Coulomb. Brno 1931 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk)	341
R. Kostal	Vibraţiunile sitzemelor acuplate, Brno 1931 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk)	341
H. Galbrun	Théorie mathématique de l'assurance invalidité et de l'assurance nuptialité. Définitions et relations fondamentales. Gauthier-Villars, Paris 1933	342
A. Horovitz	Abaca pentru dimensionarea plăcilor de beton armat. Buc. 1933.	342
Cr. Niculescu	Curs de contabilitate industrială, predat la Şcoala politechnică din Timişoara, Buc. 1933 . . .	342
G. Julia	Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variable complexe. Gauthier-Villars, Paris 1933	378
P. Montel	Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes. Gauthier-Villars Paris, 1933 . . .	378
V. Voltera	Le calcul des Variations, son évolution, et ses progrès son rôle dans la physique mathématique. Praga—Brno 1932	417
V. Teodoreanu	Cuvântările adresate foştilor săi elevi în ziua de 14 Mai 1933. Iaşi 1933	417
J. Sahanek	Buzeni Hertzovych diodami. Brno 1932 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk)	418
B. Hortinski	Sur une équation fonctionelle de la théorie des probabilités. Brno 1932 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk) . .	418
J. Ptocek	Asupra dispensiunii în teoria şirurilor lui Markoff. Brno 1932 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk)	418

Pag.

J. Zahradnicek Măsura constantei gravitaţiunii prin balanţa de torsiune. Brno 1932 (Publicaţie a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii Masaryk) 418

J. B. Pomey Application des imaginaires au calcul vectoriel, Paris 1933 418

Maior I. Linteş Studiu asupra uzurii gurilor de foc. Timişoara 1933 460

H. Galbrun Théorie mathématique de l'assurance invalidité et de l'assurance nuptialité. Calcul des primes et des reserves. Gauthier-Villars, Paris 1933 460

J. Chazy Cours de Mécanique Rationelle, Tome II. Dynamique des systèmes matériels 460

Reviste

Bulletin of the Mathematical American Society: 23, 58, 143, 180, 222, 263, 297, 340, 377, 459

Mathesis: 23, 24, 93, 181, 222, 263, 298, 377, 417

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 24, 58, 93, 145, 222

Boletin Matematico: 24, 58, 93, 144, 181, 263, 298, 340, 417, 460

Boletin Matematico Elemental: . 24, 58, 93, 145, 222, 298, 340, 378, 417, 460

Journal de mathématiques élémentaires: 24, 93, 144, 145, 181, 222, 263, 298, 340, 377, 417, 460

Revista de Pedagogie: 24

Revista matematică din Timişoara: 24, 58, 94, 145, 181, 223, 264, 298, 341, 378, 417, 460

The Mathematical Gazette: 143, 297, 298, 377, 460

American Mathematical Society: 144

J. R. Pastor Bolletin del Seminario matematico 144, 263

Revista ştiinţifică „V. Adamachi": 145, 263, 378

Bulletin de mathématiques et de phisique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" Buc. . . 181, 378

Revista matematică a elevilor craioveni: 182, 222

Natura: 264, 417

Bulletin Mathématique de la Societé Roumaine des Sciences: 298

Verhandlugen des Internationalen Mathematiker-Kongresses. Zürich 1932: 298

Bulletin de la Section Scientifique de l'Academie Roumaine: 340

Societatea Română de Ştiinţe, secţia Matematici: Buletinul şedinţelor: . 341

Sphinx: 341, 417, 460

Zentralblatt für Mechanik: 378

Mathematica: 378

Index to the Mathematical Gazette: 378

Biblioteca de la Faculdad de Ciencias. Buletinul No. 20. Martie 1933: . 417

Extrase şi Suplimente

		Pag.
V. Thébault	Contribution à la Géométrie du triangle. Gembloux 1932 (Supliment la Mathesis)	24
J. Leemans	Sur une famille de triangles triplement homologiques et triplement métaparallèles (Supliment la Mathesis)	24
V. Thébault	Sur la géométrie du tétraèdre: I. Sphères remarquables du tétraèdre. II. Sphères du Tücker et de Taylor. Gembloux 1931 (Supliment la Mathesis)	94
N. Ciorănescu	Sur la définition fonctionelle des polynomes et quelques „formules à deux et à trois noveaux". (Ex. din Buletinul matematic al Societăţii române de Ştiinţe) Buc. 1932	94
N. Ciorănescu	Sur les conditions linéaires dans l'intégration des équations différentielles ordinaires (Ex. din Mathematische Zeitschrift). Berlin 1932	94
N. Ciorănescu	La détermination d'une fonction harmonique par des conditions initiales globales (Ex. din Rendiconti della Reale Accademia nazionale dei Lincei) Roma 1932	94
N. Ciorănescu	Quelques équations fonctionelles caractérizant la fonction linéaire (Ex. din Buletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine) Buc. 1932	94
N. Ciorănescu	Nouveaux ploblèmes sur les équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hiperbolique. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris) Paris 1932	94
N. Ciorănescu	Quelques propriétés des fonctions polyharmoniques en corrélation avec certaines propriétés des polynomes. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris) 1932 Paris	94
N. Botea	Sur la généralisation d'un théorème de Lord Kelvin. Cluj 1932 (Ex. din „Mathematica" Vol. VI)	94
M. Haimovici şi E. Popa	Corrispondenza per piani tangenti paralleli. (Ex. din Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei) Roma 1932 — X	144
N. Botea	Asupra unor ecuaţii cu derivate parţiale (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris) Paris 1932	223
C. C. Teodorescu	La corrélation statistique. (Ex. din „Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timişoara") Timişoara 1932	264

		Pag.
M. Germanesco	Sur l'équation de Bessel (Ex. din Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timişoara) Timişoara 1932	264
P. V. Cazanachi	Evariste Galois (Ex. din Revista ştiinţifică „V. Adamachi") Iaşi 1932	264
N. Botea	Sur une théorème de M. Pompeiu (Ex. din Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique „Roi Charles II") Buc. 1933	264
N. Botea	Sur quelques équations aux dérivées partielles. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris) Paris 1932 .	300
C. C. Teodorescu	Essais des matériaux. Sur la comparaison de deux séries de mesures. Buc. 1933 (Ex. din Bulletin de mathématiques et de physiques pures et appliquées de l'École Polytechnique „Roi Carol II")	342
R. Raclis	Congresul internaţional al matematicienilor. Zürich 4—12 Septemvrie 1932. Buc. (Ex. „Natura")	342
C. Teodoresco	Confronto fra due tipi di baretti per prove di resilienza. (Ex. din La mettalurgia italiana) Milano 1933.	379
G. Lambert	Des nombres qui se reproduisent à la droite de leurs puissances (Supliment la Mathesis, Aprilie 1933)	379
M. Germănescu	Sur l'intégrale de Poisson. Thèse présentée à la Faculté des sciences de Cluj pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques (Ex. din Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara) 1933	379
R. Woinarowsky	Sur une manière intrinseque d'envisager la distribution des vitesses dans un solide en mouvement (Ex. din Bulletin de mathématiques et de physiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Charles II") Buc. 1933	379
N. Cioranesco	Sur les équation fonctionelles du cosinus et du sinus circulaires et hyperboliques. Paris 1932 (Ex. din l'enseignement mathématique)	379
N. Cioranesco	Quelques nouvelles conditions initiales pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique. Cluj 1932 (Ex. din Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj)	379

		Pag.
N. Cioranesco	Quelques inégalités rélatives aux fonctions monotones. (Ex. din Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi) 1932	379
Cl. Servais	Sur la géométrie du tétraèdre. Supliment la Mathesis (Ex. din Bulletin de l'Académie Royale de Belgique) Bruxelles 1933	418
A. Devresse	Sur la problème de la carte par les méthodes des fausses positions et du relevement italien (Supliment à Mathesis)	418
M. Ghermanesco	Sur l'analycité des solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles non linéaire (Ex. din Rendiconti della reale Accademia nazionale dei Lincei) Roma 1933	418
M. Ghermanesco	Sur l'équation aux différences finies. (Ex. din Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei) Roma 1933	418
N. Botea	Sur les fonctions holomorphes (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris) 1933	418

E. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. Cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1 . . .	24 (XXI)	?	20 . . .	420 (XXI)	?
2 . . .	24 „	223, 301 (XXXVIII)	21 . . .	450 „	123 (XXVII)
			22 . . .	450 „	A
3 . . .	24 „	183 (XXI)	23 . . .	17 (XXII)	?
4 . . .	24 „	?	24 . . .	75 „	?
5 . . .	24 „	?	25 . . .	137 „	90 (XXVII)
6 . . .	24 „	A	26 . . .	161 „	?
7 . . .	59 „	?	27 . . .	187 „	?
8 . . .	59 „	?	28 . . .	213 „	?
9 . . .	91 „	A. 183 (XXI)	29 . . .	231 „	?
10 . . .	91 „	?	30 . . .	258 „	?
11 . . .	144 „	?	31 . . .	277 „	?
12 . . .	145 „	?	32 . . .	277 „	259 (XXIII)
13 . . .	145 „	219 (XXI) ?			39, 186 (XXIV)?
14 . . .	183 „	?	33 . . .	308 „	?
15 . . .	219 „	?	34 . . .	40 (XXIII)	?
16 . . .	254 „	?	35 . . .	40 „	?
17 . . .	298 „	? 264 (XXXVIII)	36 . . .	65 „	?
			37 . . .	86 „	211 (XXIII) ?
18 . . .	341 „	379 (XXXVIII)	38 . . .	112 „	?
			39 . . .	137 „	?
19 . . .	382 „	58 (XXVII)	40 . . .	157 „	?

*) In această tabelă semnul ? indică că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după un răspuns. Litera A indică că răspunsul se trimite autorului.

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
41	185 (XXIII)	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
45	275 „	?
46	13 (XXIV)	?
47	24 „	42 7(XXXIV)
48	39 „	183 (XXXVIII)
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
53	117 „	264 (XXXVIII)
54	134 „	68, 178 (XXVI)
55	152 „	?
56	168 „	?
57	186 „	342 (XXXVII)
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 „	?
62	71 „	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
69	199 „	179, 317 (XXVI)
70	223 „	?
71	251 „	?
72	271 „	122 (XXVI)
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
76	144 „	A
77	198 „	?
78	227 „	?
79	227 „	291 (XXVI)
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
90	397 „	A
91	26 (XXVIII)	?
92	57 (XXVIII)	?
93	57 „	?
94	103 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
106	96 „	246 (XXXVIII)
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
110	339 „	A 181 (XXX)
111		Anulată
112	419 „	?
113	454 „	?
114	454 „	Anulată (identică cu 109)
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
121	306 „	184 (XXXVIII)
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?
125	423 „	464 (XXXI)
126	423 „	?
127	461 „	A
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
132	137 „	A
133	137 „	218, 300, 337, 431 (XXXI) 171, 415 (XXXII), 51 (XXXIII)
134	184 „	?
135	184 „	A
136	257 „	A
137	257 „	A
138	382 „	456 (XXXII)
139	431 „	A
140	28 (XXXII)	102 (XXXII)

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
141	28 (XXXII)	A
142	53 „	?
143	102 „	?
144	142 „	?
145	142 „	A
146	216 „	?
147	259 „	A
148	296 „	?
149	343 „	?
150	375 „	A
151	375 „	A
152	19 (XXXIII)	19 (XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
155	96 „	A
156	96 „	A
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
160	217 „	A
161	254 „	A
162	295 „	?
163	341 „	?
164	377 „	A
165	420 „	A
166	457 „	?
167	22 (XXXIV)	A
168	54 „	A
169	54 „	54 (XXXIV)
170	103 „	A
171	141 „	A
172	187 „	187 (XXXIV)
173	223 „	A
174	260 „	A
175	304 „	A
176	304 „	A
177		Anulată
178	345 „	A
179	385 „	?
180		Anulată
181	24 (XXXV)	?
182	61 „	61 (XXXV)
183	103 „	103 (XXXV)
184	147 (XXXV)	A
185	185 „	185 (XXXV)
186	216 „	?
187	256 „	A
188	305 „	184 (XXXVIII)
189	333 „	423 (XXXV)
190	379 „	A
191	423 „	A
192	423 „	Anulată
193	466 „	?
194	26 (XXXVI)	A
195	26 „	384 (XXXVII)
196	57 „	?
197	102 „	304 (XXXVII) 462 (XXXVIII)
198	102 „	A
199	141 „	296 (XXXVI)
200	178 „	A
201	221 „	?
202	261 „	23 (XXXVII)
203		Anulată
204	296 „	296 (XXXVI)
205	334 „	A
206	385 „	A
207	414 „	?
208	462 „	?
209		Anulată
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
213	179 „	A
214	217 „	?
215	260 „	?
216	304 „	A
217	337 „	A
218	384 „	Anulată
219	425 „	?
220	448 „	?
221	24 (XXXVIII)	?
222	58 „	A
223	94 „	?
224	145 „	223 (XXXVIII)
225	420 „	420 (XXXVIII)

F. DIVERSE

1) Informaţiuni relative la Congresul matematicienilor ţinut la Zürich în luna Septemvrie 1932, la pag. 59.

2) Informaţiuni relative la şedinţele Societăţii române de Ştiinţe, la pag. 95, 145, 184, 223, 265, 302, 343 380, 420.

3) O statuie a lui Laplace, la pag. 223.

4) Premiul Tr. Lalescu pe anul 1932 la pag. 343.

5) Proclamarea D-lui M. Ghermănescu Doctor în Matematici, la pag. 380

6) Sărbătorirea D-lui V. Teodoreanu, la pag. 380.

7) Informaţiuni relative la Congresul de Mecanică Aplicată ce se va ţine la Cambridge în anul 1934, la pag. 420.

8) Proclamarea D-lui Tib. Popoviciu Doctor în Matematici, la pag. 462.

9) Moartea lui F. Gomes Teixeira, membru al Academiei de ştiinţe din Coimbra, la pag. 462.

10) Moartea lui A. Mesnager, membru al Academiei de ştiinţe din Paris, la pag. 462.

G. PROBLEME PROPUSE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica	3491, 4041, 4171, 4172, 4181, 4191, 4192, 4193, 4201, 4202, 4203, 4211, 4212, 4213, 4221, 4222, 4231, 4237, 4241, 4242, 4243, 4251, 4252, 4261, 4262, 4271, 4272, 4277, 4281, 4282, 4283.
Geometria	3335, 3874, 4173, 4174, 4175, 4176, 4177, 4182, 4183, 4184, 4185, 4186, 4194, 4195, 4196, 4204, 4205, 4206, 4214, 4216, 4223, 4227, 4229, 4233, 4234, 4235, 4244, 4253, 4254, 4255, 4256, 4263, 4264, 4265, 4273, 4274, 4275, 4284, 4285, 4286.
Algebra	4178, 4179, 4180, 4187, 4189, 4190, 4197, 4198, 4207, 4208, 4209, 4217, 4218, 4219, 4225, 4226, 4232, 4236, 4238, 4239, 4246, 4247, 4257, 4258, 4266, 4267, 4276, 4287, 4288.
Trigonometria	3908, 4188, 4191, 4200, 4215, 4224, 4228, 4245, 4248, 4259, 4268, 4279.
Geom. Analitică	4249, 4269, 4289.
Analiză	4220.
Cosmografie	4210.
Mecanică	4230, 4240, 4250, 4260, 4270, 4280, 4290.
Fizică	4278.

H. PROBLEME REZOLVATE

b) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
171	76 (II), 198 (XVI)	
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
691	196 „, 278 (XVI)	NR
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXXI)	NR
825	288 (VIII), 358 (XV.)	NR
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	NR
944	52 (X)	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecţiei, în care problema este propusă. De ex. 76 (II) înseamnă că problema 171 a fost propusă la pag. 76 vol. II. Problemele mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunţul, Aşa de ex.: probl. 766 a fost publicată (sau rectificată) pe rând în vol. VIII pag. 124, vol. XVI, pag. 319 şi vol. XXXI, pag. 372.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu scrie niciun număr, redacţia posedă soluţiuni bune care nu au fost încă publicate.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1000	220 (X) / 438 (XVI)	NR
1008	224 (X) / 468 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058	100 „	NR
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1178	172 „	NR
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	NR
1236	64 (XIII)	NR
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1287	256 „	
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1307	320 „	
1310	352 „ / 372 (XXXI)	NR
1333	32 (XIV) / 198 (XVIII)	NR
1342	64 (XIV)	
1355	96 „	95
1364*)	128 „	NR
1367	128 „	NR
1379	160 „	
1384	191 „	NR
1386	192 „	NR
1398	224 „	
1399	224 „ / 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	228 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1534	224 „	
1553	228 „	NR
1563	320 „	
1576	352 „	
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1711	399 (XVI) / 372 (XXXI)	NR
1729	440 (XVI)	NR
1734	463 „	
1735	464 „	
1753	80 (XVII)	NR
1764	120 „	NR
1773	160 „	NR
1778	199 „	
1790	240 „	
1823	400 „	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	446 „	
1858	78 (XVIII)	
1876	119 „	NR
1882	120 „	
1892	160 „	
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „ / 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934	280 „ / 320 „	
1937	318 „	
1944	319 „	
1945	320 „	
1948	358 „	
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1969	399 „	
1976	431 „	
1983	432 „	184
1987	462 „	NR
1991	38 (XIX)	
2003	40 „	NR
2004	40 „	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2035	159 „	
2038	159 „	
2048	198 „	NR
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	

*) A se vedea soluțiile nesatisfăcătoare dela pag. 102, 221, 302 Vol. XXXVI și pag. 185 Vol. XXXVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2063	238 (XIX)	
	280 „	
2065	239 „	
2070	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2081	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2111	360 „	NR
2112	360 „	
2116	398 „	
2117	398 „	
2118	399 „	
2129	438 „	
2130	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2187	160 „	
2194	197 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2281	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	
2298	462 „	
2301	462 „	
2302	462 „	NR
2311	40 (XXI)	
2318	79 „	
	160 „	
2329	118 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2330	118 (XXI)	
2332	119 „	
2337	120 „	
2338	122 „	NR
	422 (XXXI)	
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2346	158 „	
2353	159 „	
2354	198 „	
2356	199 „	
2357	199 „	
2359	199 „	
2360	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2386	279 „	
2390	280 „	
2392	280 „	
2394	318 „	
2397	319 „	
2398	319 „	
2402	320 „	
2405	320 „	NR
	423 (XXXI)	
2408	359 (XXI)	
2414	360 „	59
2421	399 „	
2422	399 „	
2423	399 „	
2430	399 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2440	459 „	
2443	459 „	63
2456	31 (XXII)	
2458	32 „	
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	NR
2469	63 „	
2477	95 „	NR
2481	96 „	
2489	120 „	
2497	144 „	
2500	144 „	
2502	167 „	NR
2503	167 „	NR
	333 (XXXII)	
2510	191 (XXII)	
2529	262 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2537	287 (XXII)	
2539	288 „	
2545	312 „	
2552	47 (XXIII)	
2553	47 „	
2556	48 „	NR
2560	72 „	
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2598	288 „	
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2609	32 „ / 454 (XXXI)	NR
2623	80 (XXIV)	NR
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2640	128 „	
2643	128 „	
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2671	48 „	
2675	63 „	
2682	64 „	
2683	79 „	
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	NR
2694	108 „	
2695	109 „	187
2701	141 „	
2706	142 „	
2709	142 „	NR
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	
2735	192 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2752	264 (XXV)	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2780	104 „	NR
2789	135 „	
2795	159 „	
2803	160 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2837	279 „	
2850	335 „	
2851	335 „	
2860	39 (XXVII)	
2861	40 „	
2865	70 „	NR
2886	104 „	NR
2888	104 „	
2889	104 „	NR
2895	143 „	
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2913	222 „	
2920	262 „	
2922	262 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947	376 „	NR
2953	416 „	
2955	416 „	
2959	448 „	
2960	448 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2972	40 „	
2980	79 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2986	80 „	
2991	119 „	97
2993	119 „	
2996	120 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	NR
3013	199 „	
3019	200 „	
3031	278 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3041	319 (XXVIII)	
3045	319 „	NR
3052	359 „	
3054	360 „	
3059	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „	
	454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3090	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	
3108	80 „	
3109	80 „	
3114	119 „	
3118	120 „	
3127	159 „	NR
3134	198 „	NR
3150	240 „	
3160	280 „	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3169	320 „	NR
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3209	480 „	
3210	480 „	
3220	40 (XXX)	
3223	79 „	NR
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	NR
3232	119 „	
3236	119 „	
3239	120 „	
3244	160 „	387
3245	160 „	
3248	160 „	
3249	160 „	
3250	160 „	
3251*)	198 „	NR
3253	199 „	
3255	199 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3260	200 (XXX)	NR
3267	239 „	
3270	240 „	
3277	280 „	
3279	280 „	
3282	318 „	
3287	320 „	
3288	320 „	
3290	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3299	360 „	
3300	360 „	NR
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	NR
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3313	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3319	440 „	
3320	440 „	
3330	480 „	
3332	39 (XXXI)	
3335	158 (XXXVIII)	
3340	40 (XXXI)	
3341	79 „	NR
3343	79 „	
3350	80 „	NR
3354	120 „	
3356	120 „	
3360	120 „	
3361	159 „	190
3365	159 „	
3368	160 „	
3379	200 „	99
3389	240 „	
3390	240 „	
3396	280 „	
3404	318 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	NR
3448	479 „	
3450	480 „	

*) Începutul soluției acestei probleme a fost dat în vol. XXX la pag. 314.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
3456	39 (XXXII)	
	119 (XXXIII)	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3461	40 „	
3467	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	NR
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	
3489	159 „	NR
3491	78(XXXVIII)	343
3493	160 (XXXII)	NR
3495	199 „	NR
3497	199 „	
3499	199 „	
3503	200 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3517	279 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3524	280 „	NR
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	NR
3536	438 „	NR
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	NR
3547	399 „	
3548	39 (XXXIII)	303
3551	39 „	
3554	400 (XXXII)	
3557	438 „	
3562	440 „	NR
3563	440 „	
3565	479 „	
3571	480 „	
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3574	480 „	
3579	40 (XXXIII)	
3584	79 „	
3588	80 „	NR
3589	80 „	
3593	119 „	
3597	120 „	
3600	120 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
3602	158 (XXXIII)	345
3607	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3613	278 „	308
3620	199 „	NR
3622	239 „	NR
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3630	240 „	
3632	279 „	NR
3635	279 „	
3636	279 „	
3639	280 „	
3640	280 „	
3644	319 „	
3646	320 „	NR
3647	320 „	NR
3649	320 „	265
3650	320 „	
3653	359 „	
3655	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	NR
3675	439 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	479 „	NR
3684	479 „	NR
3689	480 „	
3692	39 (XXXIV)	
3693	39 „	
3694	39 „	65
3697	40 „	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	
3703	79 „	NR
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3714	119 „	
3717	120 „	
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	199 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3739	200 „	
3747	240 „	102

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3749	240 (XXXIV)	
3751	279 „	347
3755	279 „	
3760	280 „	
3762	319 „	
3763	319 „	NR
3764	319 „	
3765	320 „	
3766	320 „	
3768	320 „	
3770	320 „	
3772	359 „	
3775	360 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3782	399 „	350
3784	399 „	
3785	399 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	
3804	479 „	NR
3807	480 „	
3808	480 „	NR
3809	480 „	25
3810	480 „	
3815	40 (XXXV)	192
3817	40 „	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3827	80 „	26
3829	80 „	NR
3832	119 „	
3833	119 „	
3836	120 „	NR
3837	120 „	
3839	120 „	
3840	120 „	
3842*)	159 „	390
3844	159 „	NR
3845	159 „	NR
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3855	199 „	108
3857	200 „	
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3872	279 „	
3873	279 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3874	38 (XXXVIII)	
3875	279 (XXXV)	
3876	279 „	
3878	280 „	
3880	280 „	NR
3883	319 „	
3894	359 „	393
3895	359 „	30
3896	360 „	NR
3898	360 „	
3900	360 „	
3902	398 „	
3906	399 „	
3908	38 (XXXVIII)	
3909	400 (XXXV)	NR
3911**)	439 „	
3913	439 „	NR
3914	439 „	
3915	439 „	NR
3916	439 „	NR
3918	440 „	462
3919	440 „	
3920	440 „	NR
3921	479 „	267
3922	479 „	
3924	479 „	
3925	480 „	
3926	480 „	
3928	480 „	
3929	480 „	69
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3935	39 „	
3936	39 „	
3937	40 „	146
3939	40 „	
3940	40 „	110
3943	79 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3948	80 „	
3949	80 „	
3950	80 „	
3958	119 „	
3959	120 „	269
3961	159 „	
3965	159 „	
3972	199 „	146
3973	199 „	
3974	199 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3977	200 „	
3978	200 „	

*) I s'a mai dat o soluție în vol. XXXVI la pag. 185.
**) Începutul soluției acestei probleme a fost dat în vol. XXXVI la pag. 468.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
3983	238 (XXXVI)	NR
3984	239 „	
3985	239 „	
3987	239 „	NR
3988	240 „	
3989	240 „	
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	
4009	320 „	
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4014	359 „	70
4016	359 „	34
4017	360 „	271
4021*)	398 „	NR
4022	398 „	
4023	399 „	34
4024	399 „	
4025	399 „	
4027	400 „	71
4028	400 „	
4029	400 „	
4030	400 „	NR
4031	439 „	
4032	439 „	111
4033	439 „	
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4036	440 „	148
4037	440 „	35
4038	440 „	
4039	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4042	479 (XXXVI)	224
4044	479 „	
4045	479 „	NR
4046	480 „	
4050	480 „	33
4052	39 (XXXVII)	112
4053	39 „ 120 (XXXVIII)	NR
4055	39 (XXXVII)	
4056	79 „	
4057	40 „	465
4058	40 „	273
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4061	79 „	
4062	79 „	NR
4063	79 „	
4064	79 „	225
4066	80 „	
4067	80 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
4068	80 (XXXVII)	NR
4070	80 „	NR
4071	119 „	421
4073	119 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4077	120 „	466
4079	120 „	310
4080	120 „	NR
4083	159 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4086	160 „	422
4088	160 „	
4089	160 „	
4090	160 „	116
4091	199 „	
4092	199 „	226
4093	199 „	
4094	199 „	150
4095	199 „	36
4096	200 „	
4097	200 „	
4098	200 „	NR
4099	200 „	229
4102	239 „	NR
4103	239 „ 120 (XXXVIII)	NR
4104	239 (XXXVII)	
4105	240 „	
4106	240 „	NR
4107	240 „	
4108	240 „	
4109	240 „	313
4111	279 „	NR
4112	279 „	NR
4113	279 „	
4114	318 „	
4115	279 „	73
4116	280 „	468
4118	280 „	NR
4119	280 „	NR
4120	280 „	
4121	318 „	NR
4122	319 „	196
4123	319 „	NR
4124	319 „	230
4125	319 „	
4126	319 „	NR
4127	320 „	
4128	320 „	394
4129	320 „	
4131	359 „	351
4132	359 „	NR

*) O soluție parțială a acestei probleme a fost dată în vol. XXXVII la pag. 233.

Nr. problemei	Pagina la care a fost. Propusă [1]	Rezolvată [2]
4133	359 (XXXVII)	425
4134	359 „	
4135	359 „	
4137	360 „	
4138	360 „	75
4139	360 „	152
4140	360 „	
4141	398 „	36
4142	398 „	354
4143	398 „	470
4144	398 „	153
4145	438 „	313
4146	399 „	
4147	399 „	NR
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4152	438 „	233
4153	438 „	234
4154	438 „	
4155	439 „	NR
4156	439 „	
4157	439 „	
4158	440 „	
4159	440 „	
4160	440 „	
4161	478 „	NR
4162	478 „	
4163	478 „	NR
4164	478 „	429
4165	479 „	
4166	479 „	
4167	479 „	NR
4168	480 „	
4169	480 „	NR
4170	480 „	NR
4171	38 (XXXVIII)	155
4172	39 „	
4173	39 „	
4174	39 „	
4175	39 „	
4176	40 „	395
4177	40 „	
4178	40 „	
4179	40 „	
4180	40 „	
4181	78 „	
4182	79 „	276
4183	79 „	
4184	79 „	
4185	79 „	
4186	80 „	
4187	80 „	
4188	80 „	436

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4189	80 (XXXVIII)	437
4190	80 „	
	120 „	
4191	118 „	NR
4192	118 „	NR
4193	119 „	472
4194	119 „	
4195	119 „	
4196	119 „	
4197	120 „	
4198	120 „	277
4199	120 „	
4200	120 „	
4201	239 „	NR
4202	159 „	234
4203	159 „	NR
4204	159 „	356
4205	160 „	
4206	160 „	NR
4207	160 „	
4208	160 „	
4209	160 „	473
4210	160 „	NR
4211	198 „	315
4212	198 „	475
4213	198 „	NR
4214	198 „	
4215	199 „	
4216	199 „	NR
4217	199 „	396
4218	199 „	
4219	200 „	
4220	200 „	
4221	239 „	
4222	239 „	316
4223	239 „	
4224	239 „	NR
4225	239 „	NR
4226	240 „	NR
4227	240 „	
4228	240 „	
4229	240 „	
4230	240 „	NR
4231	279 „	476
4232	279 „	
4233	279 „	
4234	279 „	
4235	279 „	NR
4236	280 „	NR
4237	319 „	NR
4238	280 „	
4239	280 „	
4240	280 „	NR
4241	319 „	398

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4242	319 (XXXVIII)	
4243	319 „	NR
4244	319 „	
4245	319 „	
4246	320 „	NR
4247	320 „	NR
4248	320 „	NR
4249	320 „	NR
4250	320 „	
4251	359 „	
4252	359 „	NR
4253	359 „	
4254	359 „	
4255	359 „	
4256	359 „	NR
4257	359 „	NR
4258	360 „	
4259	360 „	
4260	360 „	
4261	399 „	
4262	399 „	
4263	399 „	
4264	399 „	
4265	400 „	
4266	400 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4267	400 (XXXVIII)	
4268	400 „	
4269	400 „	NR
4270	400 „	NR
4271	439 „	
4272	439 „	
4273	439 „	NR
4274	439 „	NR
4275	439 „	NR
4276	439 „	
4277	440 „	NR
4278	440 „	NR
4279	440 „	NR
4280	440 „	NR
4281	479 „	NR
4282	479 „	NR
4283	479 „	NR
4284	479 „	NR
4285	479 „	NR
4286	480 „	NR
4287	480 „	NR
4288	480 „	NR
4289	480 „	NR
4290	480 „	NR

I. EXERCIŢII *)

Aritmetica	12(156), 13(156), 21(237), 24(278), 30(358), 35(438).
Algebra	4(76), 7(77), 10(118), 18(158), 19(197), 20(198), 22(238), 23(238), 25(278), 26(317), 28(318), 36(438), 37(438), 39(478), 40(478).
Geometria	5(76), 6(77), 27(317), 38(477).
Trigonometria	1(37), 2(37), 3(37), 8(77), 9(77), 14(156), 15(157), 29(318), 33(398).
Geom. Analitică	11(118), 16(157), 17(157), 31(358), 32(358), 34(398).

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E. 5, 6, 54, 55, 56, 57, 181, 378.
Abel 297.
Abramescu M. 92, 226, 275.
Abramescu N. 5, 6, 45, 73, 223, 313, 393, 454.
Abruti C. J. 298.
Abson H. 144.
Acikgheozian N. 33, 232.
Adam M. 98.
Adams R. C. 459.
Adkisson W. V. 58.
Ahlfors 84.
Alaci V. 5, 6, 378.
Albert A. A. 180, 459.
Aldea N. N. 30, 70, 71, 75, 108, 111, 112, 116, 155, 192, 194, 196, 224, 239, 303, 310, 313, 397, 429, 468, 472.
d'Alembert 461.
Alexander 299.
Alexandrescu B, B. 75.
Alexandrescu T. I. 15.
Alexandrini O. 15.
Aliman N. I. 194, 310, 347, 349, 350.
Allen S. E. 459.
Almăjan P. 310, 347.
Anastasescu M. 49.

*) Numerele din paranteză indică pagina, iar cele din afară numărul ce-l poartă exercițiul.

Andersen N. P. 127, 144.
Angelescu A. 6, 331, 322, 455.
Angelescu V. A. 310.
Angelescu El. 462.
Angelescu Tr. 98.
Angheluță Th. 5, 6, 160, 184, 271, 320, 360, 422.
Antonescu N. 30, 108, 192, 196.
Antoniu V. A. 98.
Antoniu Fl 70, 111.
Antoniu S. I 5, 6, 78, 200, 322, 393, 462, 465.
Aomean I. 184.
Apollonius 222.
Apostolescu A. G. 350, 393.
Appel P. 298.
l'Arbelon 405.
Arghiriade M. 6, 377.
Arhimede 35, 405.
Arsene A. 347.
Arşavski A. 266, 272
Artaki-Acik N. 155, 313, 344, 356.
Aubel Van 81, 82.
Aubert P. 118, 368, 413.
Auric 314.
Avram N. C. 30, 235, 276, 315, 356, 397, 398, 475, 477.
Avramescu C. 6.

Babini J. 263.
Baciu G. T. 310, 347.
Backes F. 263, 417.
Bădescu E. A. 33, 35, 36, 70, 73, 75, 108, 112, 194, 196, 225, 235, 313, 356, 397.
Bădescu A. L. 6.
Bădescu R. 299.
Bădulescu V. 63.
Baidaff Ig. B. 6, 93, 144, 145, 158, 222, 340, 417, 460.
Balaban I. G. 102, 107.
Balaban V. 15.
Bălan E. 302.
Banciu I. 6, 380.
Bănescu N. 301, 302.
Barbilian D. 6, 95, 181, 223 302, 343, 373, 374.
Barisien N. E. 329.
Barnard A. J. R. 144.
Basoco A. M. 58
Bateman H. 340, 377, 459.
Beckenbach F. E. 459.
Beetle D. R. 143.
Beleş I. 379.
Bell C. 181.
Bell T. E. 58, 180, 459.
Belleville E. 342.
Bennet R. W. 263.
Bennett A. A. 459.
Berdan C. 98.
Bernoulli 83.
Bernstein A. B. 58, 143, 180, 299, 340, 459
Berry H. 377.
Bessel 96, 264.
Bézout 137, 283, 323, 324.
Bianu B. 181.
Bibescu D. 342.
Bidoianu I. A. 349.
Bierbach 299.
Biggeri C. 144, 263.
Birkhof D. G. 377.
Blanc E. 94, 143.
Blascke W. 263.
Bliss A. G. 263.
Bloch 459.
Blumberg H. 459.
Blumenthal M. L. 459.
Bocancea I. K. 98.
Boerescu G. P. 310, 349, 350.
Bogdan I. 211.
Bogoliouboff N 24.
Bohr 299.
Boian C. I. 30, 70, 98, 107, 349, 350.
Bol G. 263.
Bolgar V. D. 310, 349.
Bolza 263.
Boon C. F. 298.
Borcea C. L. 212.
Borel E. 83, 144, 300, 342, 374, 378.
Borneanu G. 6.
Borsuk K. 378.
Borza N. 357, 397.
Botea N. 5, 6, 40, 81, 94, 98, 124, 200, 208, 211, 223, 243, 244, 245, 254, 264, 293, 294, 300, 319, 321, 333, 343, 359, 368, 372, 373, 387, 390, 417, 418, 429, 434, 435, 480.
Bourlet C. 64.
Bratu G 6.
Brădățan St. 275.
Brăileanu Tr. 24.
Brelot M. 378.
Brener M. A. 6.
Brocard 168, 218.
Bromwich 58.
Bruckner V. 6.
Bruwier L. 377.
Bryllinski 378.
Bucur P. I. 310, 347.
Bucur N. V. 211.
Budeanu I. C. 7.
Buicliu Gh. 5, 7, 36, 79, 116, 117, 119, 124, 145, 159, 183, 186, 187, 198, 215, 234, 240, 251, 265, 267, 271, 279, 292, 309, 310, 312, 319, 322, 329, 345, 350, 351, 354, 356, 359, 376, 387, 399, 439, 458, 475, 476.
Bujoreanu N. 7.
Bulancea G. I. 195.
Bunescu D. A. 7, 18.
Bungescu I. 7.
Buradescu Tr. 7.
Burcea Şt N. 212
Burichovici A. 310, 347.
Burlacu E. 347.
Bush E. L. 340.
Bushey H. 378.
Buşilă A. 7.
Buşilă D. C. 7.
Buşilă I. 7, 20.
Buțan A. 33.

Calimachi A. 342.
Călugăreanu G. 123, 298, 340, 378.
Cambureanu V. D. 7.
Cambureanu V. 7.
Campbell D. A. 459.
Capriel H. 18, 19, 125, 327, 373, 374.
Capriel I. 7.
Caraman E. 7.
Caratheodory 299.
Carlitz L. 181, 340.
Carmichael D. R. 180
Carnot 206, 241, 294, 368, 461.
Cârstoiu D. I. 71, 118.
Cartan E 58, 299, 378.
Carty Mc. D. J. 297.
Cassian G. 7.
Caţichi M. E. 266.
Cauchy 84.
Cauer W. 180.
Caumont la Feme 342.

Cavsocalivitul N. 223, 301.
Cazacu N. C. 7.
Cazanacli V. P. 263, 264, 286, 327.
Ceauşescu F. V. 212, 322, 397, 413.
Cech E. 341.
Cercel N. 264.
Césarò 144, 263.
Ceva 69, 430.
Charpantier M. 263.
Chazy 301, 460.
Chiriac I. C. 152, 213, 323, 356, 397, 477.
Chiricuţă A. 7.
Chiriţă M. 156, 212, 238, 400.
Chirnoagă E. 181.
Chiţu P. M. 31, 267.
Chiţulescu I. I. 7, 59, 322.
Cinsky C. 34, 35, 146, 252.
Cioc M. 7.
Cioc M. M. 70.
Ciorănescu N. 5, 8, 94, 111, 120, 145, 160, 199, 223, 224, 225, 226, 239, 265, 273, 280, 298, 320, 322, 343, 360, 379, 394, 395, 396, 397, 400, 440, 466, 468.
Clarkson M. J. 58, 340.
Clémaron 342.
Clenon Mc. B. R. 222.
Climescu C. 283, 324, 327.
Cocea Gh. Th. 108, 119.
Cohn L. A. 357.
Cojocaru V. I. 34, 71.
Comberousse Ch. 30, 89
Comnen I 183.
Conachi Gh. 342
Connell Mc. 143.
Constanda Gh. 223, 301, 302
Constantinescu C. A. 31.
Constantinescu N. M. 350, 393.
Constantinescu T. 8.
Constantinescu Z. 5, 8.
Constantinescu-Buzău 70.
Conta V. 19, 24, 85, 86, 87, 246.
Conta-Kerenbach A. 87, 246.
Cosma V. 212, 322, 413.
Costache N. N. 196, 310, 347, 350.
Costinescu D. 8.
Coşniţă C. 26, 29, 38, 53, 71, 79, 107, 108, 111, 117, 146, 149, 194, 232, 255, 266, 270, 298, 310, 343, 396, 433, 434
Coulin 342
Craig T. A. 340.
Craiu N. I. 29, 30, 70, 111, 310.
Crea Mc. H. W. 298.
Cremona 459.
Creţu D. M. 350.
Cristache N. 349.
Cristescu V. 15, 19, 125, 373.
Cristopol A. C. 344, 357.
Crişan A. 264, 341.
Crivăţ V. 29, 30, 34, 37, 70, 71, 107, 196, 308, 310 347, 350.
Cummings D. L. 180, 459.
Curchi I. 40, 70, 71, 313, 395, 397, 422, 425, 458, 470.
Curcubătă T. 310.

Dalton P. J. 460.
Dan C. 29
Dante 264.
Darboux 254, 371, 372, 434.
Davidescu Em. 15.
Davidsohn S M. 310, 347.
Dăscălescu Şt. H. 310, 349.
Deac I. 70, 71, 111.
Deaux R. 23, 24, 93, 222, 298, 417.
Decker F. F. 143.
Denjoy A 122, 378.
Desargues 435.
Descartes 272, 424, 437, 473, 474.
Devresse A. 418.
Deweck M. 181, 298.
Diaconu C. O. 310.
Dickson 58.
Dieudonné J. 23, 93, 123.
Dieulefait C. 145.
Dimitriu-Şoimu V. 211.
Dinulescu T. N. 266.
Dirichlet 122, 378, 461.
Dockeray C. R. N. 298.
Dodd L. E. 459.
Donciu N. 40, 70, 107, 230, 439.
Dordea Tr. 15.
Douglas J. 459.
Dragodănescu I. N. 49, 50.
Drăgan I. C. 107.
Drăguţ Gh. V. 310.
Drăguţ M. 313.
Drâmba N. C. 89, 265.
Dresden A 143, 459.
Droz-Farny 161, 162.
Dubislav 459.
Duca Gh. 362.
Duffer Mac. C. C. 459.
Dumitraşcu R. 33, 34, 70, 71, 146, 252.
Dumitrescu A. D. 8, 359, 439.
Dumitrescu I. E. 69.
Dumitrescu I. Gh. 5, 8, 59, 62, 99, 120, 174.
Dumitriu-Dădo I. 80.
Durand A. 455.
Durfee H. W. 459.

Echols H. V. 82.
Eeche Ver P. 181.
Efstate S 33, 73.
Egan F. M. 3.7
Eisenhart P. L. 459.
Emanoil V. 49.
Emanuel D. 174.
Emch A. 58, 377, 459.
Enache D. I. 212, 323.
Enică I. C. 196.
Eperson B D. 377.
Epuran I. 30.
Erbiceanu C. 15, 183, 223, 264, 301.
Errera A. 378.
Euclid 448.
Euler 83, 181, 209, 371, 461.
Evans C. G. 263.
Evolceanu V. 15.
Ewen Mc. H. W. 263.

Fabius D. 73, 397.
Falcoianu I. 455.
Farrel 122.
Faţe M. 30, 70.
Feldştein M. S. 40, 395.
Felix C. 8.
Fermat 180.
Feuerbach 93, 209, 282.
Fibonacci 168, 203, 246, 247, 248.
Filipescu Em. G. 8.
Fite B. W. 263
Florescu B. I. 39, 61, 62, 88, 118, 130, 152, 158, 205, 216, 247, 248, 279, 319, 330, 333, 440, 470.

Florescu M. U. 152, 192, 226, 232, 233, 265.
Focşa 343, 420.
Focşeneanu I. M. 8, 49.
Fort T. 23, 297.
Foster M. 459.
Fourrier 58, 59, 84, 459.
Fotino S. 181.
France An. 264.
Freeman H. 460.
Frégier 269.
Fuchs 341.
Fueter R. 83, 299.
Fundăţeanu C. I. 8.

Gabrielescu E. C. 202.
Gabrielescu R. 8.
Galbrun H. 342, 460.
Gâlcă I. T. 8.
Galois Ev. 181, 263, 264, 459
Ganea N. N. 94, 264.
Ganguli S. 297.
Garabedian L. H. 58.
Garver R. 340.
Gauss 300, 460, 461.
Gavrilescu N. C. 212.
Gazi 302
Geiser 83.
Gejer A. 313, 356, 397.
Georgescu D. 95, 97.
Georgescu I. N. 8.
Georgescu N. N. 8, 298.
Georgescu-Racoviţă I. 208, 244, 393.
Georgescu-Roegen N. 8.
Germani D. 378.
Germay J. H. 23, 24, 93.
Gheorghe I. 310, 350.
Gheorghiu C. Ad. 26, 36, 38, 111, 117, 124, 146, 187, 192, 266, 267, 269, 335, 381, 387, 388, 389.
Gheorghiu Th. Gh. 5, 8, 80, 110, 194, 198, 199, 250, 278, 280, 303, 319, 322, 420, 454, 458, 480
Gheorghiu S. I. 9.
Gheorghiu A. M. 8.
Gheorghiu A. S. 9.
Ghermănescu N. M. 5, 8, 33, 34, 35, 64, 97, 120, 160, 174, 264, 302, 320, 322, 330, 379, 380, 418
Ghica Al. 378.
Ghimuş D. A. 9.
Ghiocel V. V. 213, 323.
Ghişoiu I. P. 29, 31, 34, 70, 107, 108, 111, 146, 192, 195, 252, 310, 347, 349, 350, 351.
Ghiţescu V. 9.
Ghiuţă V. G. 75.
Ginastera E. A. 378.
Gluşco N. 148.
Gobdelas 379.
Godeanu V. 470, 477.
Godeaux L. 93, 378
Godeaux R 263, 417.
Gonzales O. M. 222, 417.
Goormaghtigh R. 23, 93, 161, 181, 222, 252, 254, 263, 269, 281, 298, 403, 417.
Gordon O. W. 459.
Gospodin T. 146.
Grabovski E. 98.
Grassman 253.
Graves M. L. 340.
Grecu M. Gr. 349, 350.
Green G. H. 144, 263, 460.
Grigoriu C. 9
Grigoriu V. 212.
Gronwall H. T. 222.
Grossu I. A. 70.
Grossu I. M. 107, 108, 194.
Gruberman I. Gr. 310.
Grümbaum M. 199, 245.
Guldin 145, 181.
Gurney M. 263.
Gutzu V. 9.

Hadamard 83, 84
Haimovici M. 144.
Halperin H. A. 30, 196, 374.
Halphen 93.
Hamburger L. 244, 294, 433.
Hamerak C. 310, 347.
d'Hamilton 59
Hamley 460.
Hanganu D. M. 9.
Hanson H. E. 459
Haralamb P. E. 30.
Hardingham H. C. 297.
Hardy 24.
Haret C. Sp. 20, 47, 170, 361.
Hausdorff 459.
Hayashi T. 126, 455.
Hedrick R. E. 340.
Hegenberg 172.
Hermann 455.
Hermite Ch. 83.
Heytmanek C. 349.
Hilbert 83, 459.
Hill D. J. 23.
Hille E. 58, 222.
Hinckling N. A. 297.
Hoborsky 378.
Horovitz A. 342.
Horsfall O. I. 263.
Horstinski B. 123, 418.
Hortopan A. 313.
Huntigton 459.

Iacob E. 146, 310.
Ianculescu R. 9.
Iarcu D. 379.
Ignat D. 212.
Ignat P. 265.
Iliescu St. D. 98.
Iliescu Gh. 5, 9, 20, 322.
Iliescu Tr. 9.
Iliuţă-Dăbuleni I. I. 303, 310.
Ingraham H. M. 23, 222, 297, 459.
Inman S. 297.
Ioachimescu G. A. 9, 143, 301, 322, 416, 461.
Ioachimescu A. G. 5, 9.
Ioanovici A. 9.
Ionescu V. D. 9, 58, 80, 99, 102, 145, 181, 250, 264, 298, 341, 377.
Ionescu P. H. 308.
Ionescu I. 5, 9, 17, 20, 23, 24, 36, 38, 49, 79, 90, 94, 120, 125, 128, 129, 144, 145, 147, 148, 155, 159, 182, 190, 198, 214, 233, 235, 239, 276, 277, 279, 299, 300, 315, 316, 319, 322, 341, 342, 345, 360, 379, 380, 398, 399, 412, 413, 418, 420, 422, 439, 448, 455, 460, 462, 476, 479.
Ionescu I. P. 98.
Ionescu I V. 29, 70, 112, 225.
Ionescu-Biss. P. H. 29, 30, 34, 38, 58, 70, 71, 111, 148, 149, 192, 194, 217, 218, 232, 310, 313, 395.
Ionescu-Bujor C. 322, 359, 480.
Ionescu-Ţiu D. C. 29, 34, 71, 107, 195, 310, 350, 397.
Ionescu-Zane D. Gh. 9.

Iorga N. 342.
Iovănescu D. 310.
Istrate C. 301.
Ivănescu C. 75, 77, 118, 130, 152, 156, 157, 232, 240, 276, 313, 356, 397, 400, 416, 429, 436, 466, 472.

Jerabeck 209.
Jensen 378.
Jijie A. 9.
Julià G. 84, 94, 182, 299, 341, 378.
Jumanca Z. 310.
Juvet G 299.

Kamke 459.
Kaufmann N. 10.
Kellogg D. O. 377.
Kiepert 245.
Kimball F. B. 180, 459.
Klarkson M. J. 459.
Kline R. J. 459.
Kogălniceanu M. 21.
Kostal R. 341.
Kraitchik M. 330, 378, 417.
Kryloff 143.
Kummer 459.

Lagrange 301, 340, 461.
Laguerre 218.
Laisant A. C. 53, 413.
Lalande 302.
Lalescu Tr. 15, 95, 97, 131, 184, 202, 230, 264, 343.
Lambert G. 379.
Lamé 377, 401, 402, 403.
Landau 298.
Lane P. E. 297, 377.
Langley M. E. 460.
Lannoye M. 23.
Laplace S. P. 223, 300, 341, 461.
Latimer G. C. 340.
Laurel B. 460.
Lazăr Gh. 413.
Lazu C. 5, 10.
Lebădă D. 212, 323.
Leber M. 73, 226, 356, 313, 397.
Lebesgue 121.
Ledoux 342.
Leemans J. 24, 377.
Lefschetz S. 340.
Legendre 145, 158.
Lehmer H. D. 180, 181, 214, 263, 340, 417.
Lemoine 168, 209, 369, 370, 371.
Leucó I. 34.
Lewis P. E. 297.
Lewis-Carroll 377.
Lexis 180.
Libois P. 377.
Lichiardopol-Bura A. M. 31.
Linteş I. 5, 10, 240, 280, 380, 322, 347, 380, 400, 415, 440, 460, 465, 466, 472, 479.
Liouville 59, 84.
Liteanu I. Gh. 5, 10, 18, 50, 124, 322, 373
Lockwood H. E. 297.
Longchamps 23.
Longley R. W. 58.
Lord Kelvin 94.
Loria 222.
Lucas E. 330.
Luck J. J 459.
Lupescu Gh. C. 29, 32, 34, 70, 146, 194, 252.
Lusin 121.

Mac Laurin 257.
Makeham 144.
Malcoci C. 10.
Malinovschi R. 49.
Malpig 22.
Mandelbrojt S. 122.
Mănescu C. 24, 362.
Mănescu M. 88, 112, 212, 232, 313, 315, 322, 356, 397, 413.
Manicatide Al. 45, 46, 47.
Manoilescu M. 10, 380.
Manu G. 454.
Mărăcine B. 10.
Marcovici S. 264.
Mareşl. E. 315, 316, 397, 477.
Mareş Gr. 310.
Mareş T. 10.
Margulius M. 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 64, 70, 71, 75, 76, 98, 112, 145, 147, 148, 155, 194, 197, 213, 226, 229, 232, 233, 234, 271, 310, 312, 313, 344, 347, 349, 350, 351, 356, 395, 397, 398, 415, 429, 435, 436, 458, 468, 472.
Maria J. A. 263.
Markoff 418.
Martino 342.
Mateescu Cr. 5, 10, 265, 322, 380.
Mătieş V. I. 69, 75, 90, 114, 116, 176, 196, 198, 309, 460.
Mavrodin D. 316, 356, 397.
Mazilu C. P. 315, 316, 397.
McCoy H. N. 459.
Meersch-Van Der A. 297.
Melinte V. D. 310.
Menelaus 53, 65, 368, 369, 430, 435.
Menger 299.
La Menza F. 181, 298.
Mereuţă E. 70, 195, 234, 237, 356, 393, 397, 429.
Mereuţă V. 10.
Mériage 342.
Mersenne 340.
Mesnager A. 462.
Meylton 163.
Miclescu A. 97.
Mihăileanu N. N. 29, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 70, 71, 73, 74, 93, 107, 108, 146, 148, 149, 151, 153, 155, 192, 195, 225, 232, 252, 255, 266, 313, 351, 396, 431, 434.
Mihăilescu P. T. 10.
Mihalcea I. E. 107.
Mihalopol C. 10.
Mihoc G. 145, 181, 298, 343, 378.
Mikami Y. 455.
Milea E. 34.
Miller W. E. 263.
Milloux 84.
Mineur Ad. 23, 24, 93, 222, 263, 377, 434.
Mircea M. E. 10.
Mirea N. Şt. 15, 201, 202 327, 359.
Mirică M. 310.
Mitescu C. 10.
Mititelu C. Cl. 10.
Mititelu C. I. 10.
Mladenovici A. 98.
Mocănescu C. I. 310.
Montel P. 122, 123, 378.
Montessus de Ballore R. 181.
More L. R. 341, 418.
Morse 299.

Moţoc D. M. 31, 70, 148, 195, 310, 350.
Moţoi I. 15.
Muirhead F. R. 377.
Murărolu I. 29, 111, 303, 310, 347, 390.
Murphy 340.
Musselmann R. J 82.

Naforniţă 269.
Nagel 480.
Narlikar V. V. 460.
Narly C. 24.
Năsturaş D. 15.
Neamţu P. 11.
Nedelcu F. 184.
Negrea-Leonte A. M. 23, 30, 33, 70. 71, 75, 111, 146, 228, 252, 313.
Negretzu I. 11.
Negri V. 240.
Negură St. 11.
Nestor D. 245, 294
Neuberg J. 81, 163.
Nevanlinna 84 299.
Newton 58, 76, 250, 413.
Nichifor A. Gh. 11, 283, 322, 324.
Nicolaevici G. 15.
Nicolau H. C. 5, 11.
Nicolau H. D. 350, 393.
Nicolau V. G. 303.
Nicolau Th. M 11.
Nicolau-Dobridor I. 39.
Nicolescu N. 15.
Niculescu 343, 420.
Niculescu V. Al. 11, 125, 160, 223, 294, 322, 356, 357, 377, 400.
Niculescu Cr. 11, 342.
Niculescu G. 5, 11, 23, 50, 76, 80, 90, 94, 119, 125, 153, 197, 226, 228, 230, 280, 322, 354, 396, 429, 436, 437, 458, 472.
Niculescu M. 5, 11, 59, 84, 125, 163, 168, 294, 299, 333.
Noether 299.
Novacu V. 26, 280.

d'Ocagne M. 413.
Oldham W. H. 297.
Olteanu E. Şt. 34, 71, 152, 232, 272, 275, 278, 313, 317, 359, 395, 421, 468, 470.
Omer 448.
Onicescu O. 11, 145, 343, 378.
Oprescu G. 11.
Oprescu G. 30.
Oprescu N. 395.
Orănescu O. 5, 11, 468, 470.
Orăşeanu D. C. 5, 11, 18, 50, 322, 327, 374
Orăşeanu Gr. 11, 46, 47.
Ore O. 23.
Osgood F. W. 459.
Ott R. E. 459.
Ottulescu Eug. 11.

Padé 181.
Painlevé 122.
Palei R. E. A. C. 459.
Panaite N. Th. 71, 73, 265.
Panaitescu Sc. 11, 19, 49, 50, 213
Pănoiu Em. 33. 313.
Pantazi Al. 5, 11, 196, 298, 302, 322, 327, 374, 378, 380, 393.
Panţu Z. I. 266, 303, 310.
Papelier G. 118, 413, 435
Paraschiv N. A. 310.
Parepeanu C. I. 30, 34, 70, 71, 75, 112, 146, 151, 155, 197, 252, 313, 317, 393.
Parker V. W. 58, 263.
Pârvu A. 12, 160, 254, 279, 310, 320, 322, 440.
Pârvu D 480.
Pârvulescu C. 238, 316, 356, 397.
Pascal 36.
Paşcanu S. 12.
Pastor R. J. 144, 263
Patraulea N. N. 33, 34, 35, 71, 73, 112, 149, 313, 357.
Patraulea R. 33.
Patriciu G. T. 12.
Pătroianu M. 98.
Paul M 23.
Păun G. 347, 349.
Păun G. M. 310.
Pavel D. 379.
Pavel N. 310.
Peano 263.
Pearson 300.
Pepica C. 148.
Petersen J. 413.
Peterson S. T. 459.
Petrescu G. 378.
Petrescu I. I. 75, 234, 313, 357, 397, 470.
Petrescu M. 357.
Philipide M. 12.
Philippide D. 301, 302.
Phillips G. E. 144.
Piaggio H. T. H. 298.
Picard E. 59, 83, 84.
Piggott E. H. 377.
Pincherle S. 83.
Pitagora 35, 43, 129, 395.
Plancherel M. 83.
Plateau 459.
Poincaré H. 24.
Poinsot 461.
Poisson 362, 379, 460.
Pomey B. J. 418.
Pompeiu D. 81, 122, 181, 264, 378.
Poncelet 266
Popa E. 144.
Popa G. I. 29, 70, 195, 269, 310, 347, 349, 350, 393.
Popa D. Tr. 212, 322, 413.
Popescu N. C. 29, 30, 70, 192.
Popescu S. C. 45, 46, 47.
Popescu G. 12, 59, 310.
Popescu I. 12.
Popescu D. M. 98, 310, 349, 350.
Popescu I. N. 345.
Popescu N. P. 116.
Popescu D. St. 310, 312.
Popescu-Stăneşti I. M. 34, 71, 77, 149, 313.
Popovăţ P. 302.
Popovici C. C. 59, 61, 62, 98, 229.
Popovici P. D 98.
Popoviciu T. 12, 25, 26, 88, 133, 175, 294, 298, 372, 400, 462, 479.
Popp N. 12.
Popp Tr. 12.
Portocală M. 12.
Potemchin 301.
Potopeanu Gh. 5, 12.
Poulet P. 460.
Poussin de la Vallée 83.
Preda C. M. 232.
Predoescu I. M. 183, 213, 222.
Priestley J. H. 297.

Protopopescu Gr. 12.
Pruncu G. S. 196.
Ptocek. 418.

Rabinovici F. 98.
Racliş R. 12, 59, 84, 299, 342, 343.
Racoviţă E. 15.
Radoveanu N. 350.
Radu E. M. 12.
Raicu C. A. 350, 393.
Raicu A. I. 347.
Rainville D. E. 459.
Râmniceanu I. Cr. 29, 310, 347.
Ramsey 143.
Randels W. 459.
Răşcanu I R. 30.
Rentea N. 310, 347, 349, 350
Revici T. 12.
Richardson D. C. R. 222, 377.
Riemann 23, 24, 84, 93.
Rietz L. H. 180, 299.
Risser R. 144, 299.
Ritt F. J. 341, 419.
Roberts H. J. 263.
Robson A. 377.
Roco M. 15.
Rolle 473, 474, 475.
Roşanu D. 310, 347.
Roşca Şt. G. 33, 34, 35, 70, 71, 73, 74, 75, 111, 148, 149, 151, 226, 229, 271, 273, 313, 422, 429, 438, 468.
Roşu Al. 15, 124.
Roşu A. Al. 111, 124, 480.
Roşu V 13.
Rotaru D. 235.
Roth E. W. 58.
Rouché E 30, 89.
Rusiewicz S. 378.
Russe N. C. 350.
Russel 58
Rusu E. 57.
Rusu D. C. 71, 146, 148, 252.
Rutt E. N. 459.

Sachelarescu A. 33.
Săcoşanu Gh. 213.
Safin I. 347.
Sager N. I. 36, 73, 117, 152, 155, 232, 276, 313, 351, 356, 358, 395, 397, 429, 455, 471.
Sahanek J. 418.
Sălăgeanu A. 13.
Saligny A. 15, 18, 20, 289, 290, 291.
Saligny M. 13.
Salmon G. 415.
Sâmbotin Gh. 313.
Sandon F. 460.
Săpunaru S. Gh. 13.
Sarian M. 5, 13, 322.
Sassu V. I. 310.
Savin A. 310.
Savin C. I. 33, 34, 70, 71, 75, 76, 107, 117, 197, 200, 230, 250, 251, 266, 310, 312, 313, 398, 438, 468, 470, 478, 479.
Saxer W. 298.
Scarbourough B. J. 143.
Scarlat D. 107.
Schileru D. 98.
Schlömilch 263.
Schoemberg J. I. 263, 459
Schor A. O. 310.
Şcodranu A. 298, 401.
Seltzer S. 58.
Şerbănescu Gh. V. 13.
Şerban-Ulmeni D. 30, 112, 194, 310, 347, 349, 350.
Şerbu I. C. 30.
Sergescu B. 13.
Sergescu P. 5, 13, 59, 77, 80, 84, 87, 160, 183, 184, 223, 239, 264, 265, 299, 302, 342, 379, 417, 420, 437, 473.
Sermet M. G. 356.
Serweis Cl. 23, 162, 263, 418.
Severi 299.
Sfinţescu I. C. 13.
Sheppard 460.
Şiacaru-Ionescu 462.
Siddons W. A. 377.
Siebermann 378.
Sierpinski W. 131, 299, 378.
Simionescu D. Gh. 320.
Simson 23, 93, 222, 223.
Smântânescu A. 13.
Soare N. I. 212.
Sohat J. 378.
Sommerville Y. M. D. 298.
Şor I. 316.
Souslin 121.
Şova-Grigoreni C. I. 71, 313, 468.
Stamatescu I. 13, 343, 420.
Stan I. A. 29, 36, 70, 71, 119, 310.
Stan D. 13.
Stănculescu Gh. 212.
Stănescu M. C. 310.
Ştefănescu Ar. 478.
Ştefănescu Cr. 33, 350.
Ştefănescu I. Gh. 212.
Steffensen 300.
Steiner 245, 263, 369, 370, 372.
Stenzel 299.
Stewart 404.
Stieltjes 144.
Stirling 377.
Stoica Al. 34, 112, 148, 226, 233, 235, 397.
Stoicescu D. M. 395.
Stone H. M. 341, 420.
Stone O. 459.
Stratulat Gh 212.
Stroescu G. 98.
Struik J. D. 23.
Sudan G. 59, 420.
Sullivan N. J. 144.

Tănăsescu A. 13, 171, 413.
Tănăsescu C. 18.
Tănăsescu A. Gh. 20, 171.
Tănăsescu A. T. 13.
Tauber Al. 98.
Taylor 59, 84, 94, 123.
Tchebycheff 378, 460.
Teixeira G. F. 462.
Teodor D. I. 15.
Teodoreanu V. 13, 380, 417.
Teodorescu C. C. 264, 342, 379.
Teodorescu D. 378.
Teodorescu N. 223, 380.
Teodorescu N. N. 13.
Teodorescu I. S. 15.
Teodorescu Şt. 232.
Teodoriu L. 265, 302, 378.
Teodoru D. R. 13.
Ţerna M. 313.
Thébault V. 23, 24, 40, 43, 51, 53, 58, 65, 78, 82, 93, 94, 118, 127, 145, 150, 153, 160, 161, 162, 163, 173, 192, 199, 215, 216, 218, 234, 239, 248, 249, 250, 251, 263, 278, 279, 282, 319, 329, 343, 345, 351, 352, 399, 405, 417, 421, 439, 479.
Theodor N. P. 308.

Theoharide L. 33.
Thiele 144.
Thierrin H. G. 13.
Thomas Y. T. 143.
Thompson P. S. 413.
Thompson R. W. 144.
Ţino N O. 5, 13, 29, 32, 39, 53, 69, 71, 72, 107, 110, 149, 152, 155, 232, 240, 322, 327, 359, 374.
Ţiţeica G. 14.
Ţiţeica Gh. 5, 14, 16, 59, 83, 84, 95, 149, 226, 299, 322, 323, 374, 417, 419, 420, 434.
Tolmab C. R. 340.
Tomescu R 310.
Traynard E. C. 299.
Tresse A 413.
Trifan Ch. 73.
Trufinescu N. C. 155, 276.
Tschebotarow 299.
Tücker 94.
Tuckey O. C. 298, 377, 460.
Tummers J. 435.

Ulescu A. 14.
Umé B. 24, 93, 181, 222.
Ungheanu I. M. 310, 347, 349, 350.
Unterwood F. 377.
Uspensky V. J. 58.

Vălceanu N. I. 310, 349, 350.
Vâlcovici V. 223, 378.
Valiron 84, 299.
Vandermonde 298, 459.
Vardala I. 14.
Varlam M. P. 23, 33, 34, 35, 71, 75, 230, 313, 466.
Varlea-Gill J. 263.
Vasilache I. 14.
Vasilescu Fl. 14.
Vasilescu Gr. 14.
Vasilescu G. I. 14.
Vasilescu N. P. 350.
Vasilescu-Karpen N. 181, 380.
Vasilescu-Popescu C. 212, 397.
Vasiliu D. 5, 14, 222, 413.
Vasiliu C. I. 69, 98, 102, 157, 158, 186, 193, 209, 218, 239, 244, 266, 389.
Vasiliu M. 14.
Vasiliu-Leoben Gh. 303, 318, 322, 358, 440, 460, 477.
Vasu V. 64, 272.
Veblen-Whitehead 459.
Velea M. 29, 31, 70, 111, 146
Velicescu N. N. 30, 32, 34, 70, 310, 350, 351, 397, 399, 438.
Velicescu T. 310, 347.
Velicescu-Buc. Gh. T. 30.
Vignaux C. J. 24, 93.
Vissarion I. V. 33, 34, 35, 232.
Vlasopol B. 264.
Vlădescu A. 49.
Voicu I. 347, 349.
Voicu Gh. N. 310, 347, 349, 350.
Volterra V. 83, 96, 123, 144, 417.
Vrânceanu G. 299.
Vuibert H. 24, 29, 93, 144, 145, 181, 222, 234, 263, 298, 340, 352, 377, 417, 460.

Waerden V. 23.
Wall S. H. 181.
Walsh L. I. 377.
Ward R. D. 377.
Wassermann C. I. 310.
Wavre R. 94, 299.
Weierstrass 84.
Whitehead 58.
Whitney H. 58.
Whyburn T. G. 340.
Whytrow I. G. 143, 460.
Wihson A. W. 459.
Wilder E. C. 143
Wilder L. R. 58, 180.
Wilezynski I. E. 297.
Williams R. A. 58.
Williamson J. 340.
Wilson N. G. 298.
Wilson A. W. 58.
Wishart J. 460.
Woinarowsky R. 379.
Wong C. B. 180, 459.
Wright M. R. 460.

Young W. I. 143, 340.

Zaharescu I. 212.
Zaharia O. N. 24, 310.
Zahradnicek J. 341, 418.
Zamfirescu O. Gh. 310, 347, 349, 350.
Zamfirescu Gr. 14.
Zamfirescu I. 34.
Zamfirescu G. I. 30, 39, 70, 77, 108, 148, 149
Zane D. N. 34, 35, 71, 112, 116, 225, 313, 397.
Zapan Gh. 14, 79.
Zapan Gr. 14.
Zarankiewicz 263.
Zarda I. 146, 252, 437, 473.
Ziff S. M. 276, 315, 356, 397, 398, 475, 477.
Zlatcu St. C. 14.
Zottu I G. 15.
Zuckermann M. B. 98.

K. UVRAGE CITATE

Cărţi

		Pag.
***	Statutele şi Regulamentele fondurilor Soc. „Gazeta Matematică“	24
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de Algebră	25, 416
H. Vuibert	Relations entre les éléments d'un triangle	29, 234
E. Rouché et Ch. de Comberousse	Traité de Géométrie	30, 89
Al. Manicatide şi C. S. Popescu	Aritmetică practică cl. I	45, 47

		Pag.
Al. Manicatide, C. S. Popescu şi N. Abramescu	Aritmetică Raţională	45
Al. Manicatide şi C. S. Popescu	Aritmetica cl. III	46
Gr. Orăşanu	Aritmetica cl. II	46, 47
Sp. C. Haret	Aritmetica	47
Căp. Dragodănescu I. N.	Materialul şi tragerile Artileriei antiaeriene	49, 50
C. A. Laisant	Réçueil de problèmes de mathématiques	53
C. Bourlet	Leçons d'algèbre élémentaire	64
V. Conta	Teoria fatalismului	85
V. Conta	Teoria ondulaţiei universale	85, 86
V. Conta	Origina Speciilor	85
V. Conta	Incercări de metafizică	85
V. Conta	Bazele metafizicei	85
V. Conta	Intâile principii cari alcătuesc lumea	85
E. Blanc	Problèmes et compléments de mécanique	94, 143
R. Wavre	Figures planétaires et géodésie	94
N. N. Ganea	Calculul betonului armat vol. I, II şi III	94, 264
P. Aubert et G. Papelier	Exercices de géométrie analitique tome I	118
R. Risser	Applications de la statistique à la démographie et à la biologie	144
Gh. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie	149, 226, 434, 435
Hegenberg	Zahlen-Aritmetik	172
D. Emanuel	Lecţiuni de teoria Funcţiunilor	174
R. de Montessus de Ballore	La méthode de corrélation	181
G. Julia	Exercices d'analyse	182, 341
N. Abramescu	Lecţiuni de geometrie analitică	223, 452
F. G. M.	Exercices de Géométrie	226
Tr. Lalescu	Calculul algebric	230
Lesengle	„Précis de calcul Géométrique"	253
Bézout	Cours de mathématiques à l'usage de la Marine et de l'Artillerie	283
G. Juvet	Leçons d'analyse vectorielle	299
R. Risser et C. E. Traynard	Les principes de la statistique mathématique	299
***	Anuarul liceului şi şcoalelor comerciale „M. Kogălniceanu"	300
J. Chazy	Cours de mécanique rationnelle t. I	301
N. Bănescu	Viaţa şi opera lui Daniel Philippide	301
***	Anuarul institutului de Istorie Naţională	301
D. Philippide şi Gr. Constanda	Geografie modernă	301
E. Lucas	Théorie des nombres	330
M. Kraitchik	Recherches sur la théorie des nombres	330

		Pag
J. F. Ritt	Differential equations from the algebraic standpoint	341, 419
M. H. Stone	Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis	341, 420
R. L Moore	Foundations of point set theory	341, 418
E. Ceck	Trois théorèmes sur l'homologie	341
E. Ceck	Reseaux R à invariants egaux	341
J. Zahradnicek	Acţiunea forţei substanţelor radioactive asupra balanţei lui Koulomb	341
R. Kostal	Vibraţiunele sitzemelor acuplate	341
H. Galbrun	Théorie mathématique de l'assurance invalidité et de l'assurance nuptialité	342, 460
A. Horovitz	Abaca pentru dimensionarea plăcilor de beton armat	342
Cr. Niculescu	Curs de contabilitate industrială	342
N. Iorga	Istoria învăţământului românesc	342
Halphen	Oeuvres t. II	353
G. Ţiţeica	Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes	374
G. Julia	Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variable complexe	378
P. Montel	Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes	378
N. Abramescu	Lecţiuni de algebră superioară. Teoria Ecuaţiilor	393
Arhimede	Livre des Lemmes	405
S. P. Tompson	Le calcul intégral	413
I. Ionescu	Comparaţiunea rădăcinilor mai multor ecuaţiuni vol. I şi II	413
I. Ionescu	Isac Newton	413
I. Ionescu	Maşinile de calcul	413
I. Ionescu	Monografia	413
M. d'Ocagne	Notions sommaires de géométrie projective	413
C. A. Laisant	Initiation mathématiques	413
J. Petersen	Constructions géométriques	413
I. Ionescu	Geometrografia	413
Gh. Lazăr	Trigonometria	413
P. Aubert et G. Papelier	Exercices d'Algébre, d'Analyse et de Trigonométrie	413
A. Tresse	Éléments de géométrie analitique	413
G. Salmon	Courbes planes	415
V. Teodoreanu	Cuvântările adresate foştilor săi elevi în ziua de 14 Mai 1933	417
V. Voltera	Le calcul des variations son évolution et ses progrès son rôle dans la physique mathématique	417

		Pag.
J. Sahanek	Emisiunea undelor herţiane prin diode	418
B. Hostinski	Sur une équation fonctionelle de la théorie des probabilités	418
J. Sahradnicek	Măsura constantei de gravitaţiune prin balanţa de torsiune	418
J. B. Pomey	Applications des imaginaires au calcul vectoriel	418
G. Papelier	Exercices de géométrie moderne	435
Lt. Col. G. Manu	Algebra şi Aritmetica	454
***	Fisica populara cl. IV pr.	455
I. Falcoianu	Aritmetica Rationata	455
Y. Mikami	The mathematical papers from the far East .	455
Maior I. Linteş	Studiu asupra uzurii gurilor de foc	460
J. Chazy	Cours de mécanique rationnelle t. II.	460
I. Ionescu	Istoricul Invăţământului Ingineriei în România	462

Reviste

Gazeta Matematică 5, 15, 16, 18, 19, 20, 23, 37, 38, 44, 58, 77, 81, 87, 90, 107, 114, 120, 124, 125, 128, 129, 130, 131, 149, 161, 162, 163, 168, 170, 171, 174, 175, 182, 183, 184, 196, 200, 201, 203, 211, 213, 214, 215, 216, 218, 241, 244, 245, 246, 251, 254, 282, 283, 288, 289, 292, 294, 299, 309, 318, 321, 327, 328, 329, 330, 331, 333, 344, 345, 347, 356, 361, 367, 370, 372, 373, 374, 376, 379, 401, 413, 433, 436, 452, 455, 460, 462, 465, 476

Bulletin of the mathematical American Society . . 23, 58, 143, 180, 214, 222 263, 297, 340, 377, 459

Mathesis 23, 24, 81, 93, 94, 161, 162, 163, 181, 215, 222, 243, 251, 252, 263, 281, 298, 367, 377, 379, 417, 418

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 24, 58, 93, 145, 222

Boletin Matematico 24, 58, 93, 144, 181, 263, 298, 340, 417, 460

Boletin Matematico Elemental . 24, 58, 93, 145, 222, 398, 340, 378, 417, 460

Journal de Mathématiques Elémentaires 24, 93, 144, 145, 181, 222, 263, 281, 298, 340, 341, 352, 377, 417, 460

Revista de pedagogie 24

Revista matematică din Timişoara . . 24, 58, 88, 94, 131, 145, 181, 183, 223, 250, 255, 264, 298, 330, 341, 368, 369, 378, 417, 460

Revista „Aeronautică" 49

Revista Artileriei 49

The American Mathematical Monthly 82

Matematica 94, 378

Mathematische Zeitschrift 94

Rendiconti della Reale Accademia nazionale dei Lincei 94, 418

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris 94, 223, 300, 418

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences . . 94, 298, 374

Pag.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine 94, 340
Nouvelles Annales des Mathématiques 126, 161, 314, 368
The Mathematical Gazette 127, 143, 297, 377, 460
American Mathematical Society 144
Boletin del Seminario Matematico — J. Rey Pastor 144, 263
Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" 145, 263, 264, 378
Educational Times 161
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles 161
Journal de Vuibert 163
Bulletin de Mathématiques Elémentaires 172, 215
Bulletin de mathématique et de phisique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Roi „Carol II" . . 181, 264, 342, 378
Revista Matematică a elevilor Craioveni 182, 222
Foaie Matematică a elevilor liceului militar din Iaşi 182
Memoriile Academiei Române vol. 27 . . . . . 183, 223, 264
I. Aumean Recreaţii matematice, Fasc. I 184
Annales de Gergonné 184, 415
Curierul Matematic 208, 209, 243, 244, 294, 367, 390, 434, 435
Foaia Matematică 245, 294, 368
Natura 264, 342, 417
Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara 264, 379
Revista Critica 283
Verhandlungen des Internation. Mathematiker-Kongresses, Zürich 1932. 298, 437
Societatea Română de Ştiinţe secţia Matemateci. Buletinul şedinţelor . . 341
Sphinx 341, 417, 460
Revista Universitară Matematică 343
Jurnal Matematic 372
Zentralblatt für Mechanik 378
Index to the Mathematical Gazette 378
Buletinul Societăţii Politechnice 379
La mettallurgia italiana 379
L'enseignement mathématique 379
Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj 379
Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi 379
Journal de Bourget 405
Revue de mathématiques spéciales 454
Monitorul Oficial 454, 462
Journal of the Physic Scool in Tokio 455
Bulletin des Sciences Mathématiques 455

Extrase şi Suplimente

V. Thébault Contribution à la géométrie du triangle . . . 24
J. Leemans Sur une famille de triangles triplement homologiques et triplement métaparallèles . . . 24
V. Thébault Sur la géométrie du tetraèdre 94

		Pag.
N. Ciorănescu	Sur la définition fonctionelle des polynômes et quelques „formules à deux et à trois noveaux"	94
N. Ciorănescu	Sur les conditions linéaires dans l'intégration des équations différentielles ordinaires . .	94
N. Ciorănescu	La détermination d'une fonction harmonique par des conditions initiales globales	94
N. Ciorănescu	Quelques équations fonctionelles caractérizant la fonction linéaire	94
N. Ciorănescu	Nouveaux problèmes sur les équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique	94
N. Ciorănescu	Quelques propriétés des fonctions polyharmoniques en correlation avec certaines propriétés des polynômes	94
N. Botea	Sur la généralisation d'un théorème de Lord Kelvin	94
N. Botea	Asupra unor ecuaţii cu derivate parţiale . .223,	300
N. Abramescu	Formule pentru geometria triunghiului	223
C. C. Teodorescu	La correlation statistique	264
M. Ghermănescu	Sur l'équation de Bessel	264
P. V. Cazanacli	Evariste Galois	264
N. Botea	Sur une théorème de Mr. Pompeiu	264
C. C. Teodorescu	Essais de materiaux	342
R. Racliş	Congresul internaţional al Matematicienilor . .	342
C. Teodorescu	Confronte fra due tipi di barretti per prove di resilienza	379
G. Lambert	Des nombres qui se reproduisent à la droite de leurs puissances	379
M. Ghermănescu	Sur l'intégrale de Poisson	379
R. Woinarowsky	Sur une manière intrinseque d'envisager la distribution des vitesses dans un solide en mouvement	379
N. Ciorănescu	Sur les équations fonctionnelles du cosinus et du sinus circulaires et hyperboliques . . .	379
N. Ciorănescu	Quelques nouvelles conditions initiales pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique .	379
N. Ciorănescu	Quelques inégalités rélatives aux fonctions monotones	379
Cl. Servais	Sur la géométrie du tétraèdre	418
A. Devresse	Sur la problème de la carte par les methodes des fausses positions et du relevement italien	418
M. Ghermănescu	Sur l'analycité des solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles non linéaire . .	418
M. Ghermănescu	Sur l'équation aux différences finies	418
N. G. Botea	Sur les fonctions holomorphes	418

BIBLIOTECA CENTRALĂ A ASOCIAŢIUNII SIBIIU

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Anonim (3908); *Apostolescu Em.* (4267, 68); *Avram N. C. Subloc.* (4261, 62, 67); *Borza N.* (4259); *Chiriac Const.* (4228, 38, 59); *Chiriţă M.* (3988, 4239, 67, 68, A, E); *Cseke W.* (4259); *Dobrescu P.* (4187, 265); *Fabius Dorina* (4265, 67, 68); *Ferrari G. G.* (4259); *Ghiocel V.* (4259, 67); *Grigorescu A. V.* (4187, 262); *Ivănescu C.* (4080, 114, 219, 59, 64, 68, A, E, P); *Leber Margareta* (4265); *Lenco I.* (3988, 4106, 08, 20, 87, 276); *Mănescu M.* (4179, 231, 68); *Margulius M.* (3919, 2110, 3906, 4055, 239, 53, 59, 60, 61, 65, 68, 72); *Matei Al.* (4268); *Mavrodin D. D.* (4106, 08, 20, 38, 60); *Mazilu C. P.* (4197, 208, 28, 59, 61, 66, 67, 68, P); *Mereuţă Em.* (4261, 67, 68); *Mihăileanu N. N.* (3270, 4194, 95, 216. 29, 55, 64, 65, E, P); *Mircea A.* (3908, 5196, 255, 65); *Naneş Cornelia* (4268); *Negrea A. L. M.* (4190, 200, 08. 15, 19, 23, 33, 39, 45, 59, 61, 63, 65, 67, 68); *Neumann Maria* (4264); *Nicolaescu D. D.* (4259); *Parepeanu I. Subloc.* (4178, 79, 87, 96, 223, 33, 39, 45, 61, 65, 67, 68); *Petrescu I. I.* (4265, 67, 68); *Predoescu M. Tr.* (4178, 87, 96, 231, 53, 61, 65, 67, E); *Rotaru D.* (4259); *Sager N. I.* (4245, 59); *Savin C. I. Subloc.* (E, P); *Silas Gh.* (4261, 62, 72); *Stoica D. A.* (4272); *Thébault V.* (A, P); *Vissarion C. I. V.* (4239, 53, 67); *Zarican R.* (R); *Ziff S. M.* (4120, 253, 59, 71, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugărei 23, Bucureşti 4.